Mff 100

Dvojí použití l'Hospitalova pravidla však není nutné, počítáme-li na začátku trochu šikovněji:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{cotg}x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}.$$

Nyní použijeme l'Hospitalovo pravidlo. Bereme zde $f(x)=x\cos x-\sin x$, $g(x)=x^2\sin x$. Snadno vidíme, že $g'(x)=2x\sin x+x^2\cos x=x(2\sin x+x\cos x)\neq 0$ na $\mathscr{U}^*_{\pi/2}(0)$. Na $\mathscr{U}^{*-}_{\pi/2}(0)$ je totiž $2\sin x+x\cos x<0$ a na $\mathscr{U}^{*+}_{\pi/2}(0)$ je $2\sin x+x\cos x>0$. Vyjde

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x^2\sin x)'}=\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x\sin x+x^2\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}=\\&=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x+x\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{2\frac{\sin x}{x}+\cos x}=\\&=-\frac{1}{2\cdot 1+1}=-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Zde vidíme, že je dobré uvážlivě používat l'Hospitalovo pravidlo. Bezmyšlenkovité používání tohoto pravidla může často výpočet spíše zkomplikovat než zjednodušit. ▲

Příklad 4.63. Určete $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$.

Řešení. Položíme $f(x)=x(e^x+1)-2(e^x-1)$, $g(x)=x^3$. Ihned vidíme, že

$$\lim_{x\to 0}\big(x(e^x+1)-2(e^x-1)\big)=0,\qquad \lim_{x\to 0}x^3=0$$

a snadno je vidět, že i ostatní předpoklady l'Hospitalova pravidla (kromě existence limity podílu derivací) jsou splněny. Dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{\big(x(e^x+1)-2(e^x-1)\big)'}{(x^3)'}=\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+1+xe^x-2e^x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1+xe^x-e^x}{x^2}.\end{aligned}$$

Na výpočet poslední limity opět použijeme l'Hospitalovo pravidlo. Tentokrát je $f(x)=1+xe^x-e^x$, $g(x)=x^2$. Je

$$\lim_{x\to 0}(1+xe^x-e^x)=0,\qquad \lim_{x\to 0}x^2=0$$

a i ostatní předpoklady jsou splněny — kromě existence limity podílu derivací, ale tu budeme ihned počítat. Dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+xe^x-e^x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x-e^x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}e^x=\frac{1}{2}.$$

Tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

V tomto příkladě jsme museli l'Hospitalovo pravidlo použít dvakrát. Vícenásobné použití l'Hospitalova pravidla je poměrně častým jevem. ▲

$$\frac{1}{3-2x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}x}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{3}x\right)^{-1}.$$

Poté položíme $-\frac{2}{3}x=t$ a dostaneme funkci $\frac{1}{3}(1+t)^{-1}$. Její rozvoj do binomické řady je

$$\frac{1}{3}(1+t)^{-1}=\frac{1}{3}\left[1+\binom{-1}{1}t+\binom{-1}{2}t^2+\cdots+\binom{-1}{n}t^n+\cdots\right]=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}t^n,\quad t\in(-1,1).$$

Po dosazení za $t=-\frac{2}{3}x$ získáme Maclaurinovu řadu

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3-2x} &= \frac{1}{3}\left[1+\binom{-1}{1}\left(-\frac{2}{3}x\right)+\cdots+\binom{-1}{n}\left(-\frac{2}{3}x\right)^n+\cdots\right]= \\
&= 1+(-1)\left(-\frac{2}{3}x\right)+\cdots+\frac{(-1)^n n!}{n!}\left(\frac{2}{3}\right)^n(-1)^n x^n+\cdots= \\
&= \frac{1}{3}\left[1+\frac{2}{3}x+\frac{(-1)(-2)}{2!}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2x^2+\cdots+\frac{n!}{n!}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n+\cdots\right]= \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n.
\end{aligned}$$

d) $f(x)=\mathrm{e}^{\cos x}$.

Řešení. Provedeme rozvoje v Maclaurinovu řadu pro funkce e^x a $\cos x$

$$\mathrm{e}^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\cos x} &= \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2!}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x^4}{4!}}+\cdots=\mathrm{e}\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2!}\right)^2}{2!}+\cdots\right]\left[1+\frac{x^4}{4!}+\frac{\left(\frac{x^4}{4!}\right)^2}{2!}+\cdots\right]= \\
&= \mathrm{e}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+\cdots\right)\left(1+\frac{x^4}{24}+\frac{x^8}{2\cdot 24^2}+\cdots\right)=\mathrm{e}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}+\cdots\right).
\end{aligned}$$

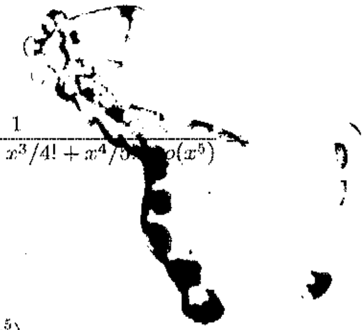
e) $f(x)=\mathrm{e}^x\sin x$.

Řešení. Maclaurinova řada pro funkci e^x (viz předchozí příklad) a $\sin x$ je

I.8. *Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce*

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

do čtvrtého řádu.



Návod: Na vhodném okolí nuly je

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + x^5/5! + o(x^6)} = \frac{1}{1 + x/2! + x^2/3! + x^3/4! + x^4/5! + o(x^5)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5) \right)^k =$$

Označme $V(x) = \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)$

$$= 1 - V(x) + V(x)^2 - V(x)^3 + V(x)^4 - V(x)^5 + o(x^5).$$

Rozveďme jednotlivé mocniny $V(x)$ do pátého řádu.

$$V(x) = \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)$$

$$V(x)^2 = \frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^3}{2!3!} + \frac{x^4}{3!3!} + 2\frac{x^4}{2!4!} + 2\frac{x^5}{2!5!} + 2\frac{x^5}{3!4!} + o(x^5)$$

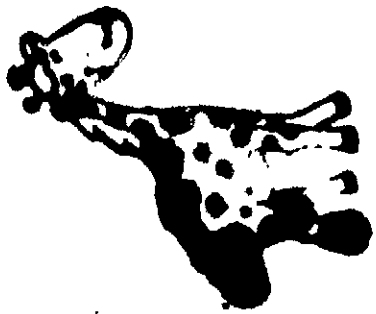
$$V(x)^3 = \frac{x^3}{2!2!2!} + 3\frac{x^4}{2!2!3!} + 3\frac{x^5}{2!2!4!} + 3\frac{x^5}{2!3!3!} + o(x^5)$$

$$V(x)^4 = \frac{x^4}{2!2!2!2!} + 4\frac{x^5}{2!2!2!3!} + o(x^5)$$

$$V(x)^5 = \frac{x^5}{2!2!2!2!2!} + o(x^5)$$

Když všechny příspěvky sečteme, resp. odečteme, dostaneme

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^5)$$



I.9. *Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce*

$$f(x) = \sqrt[3]{\sin x^3}$$

do třináctého řádu.

Návod: Je

$$f(x) = (x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} + o(x^{21}))^{1/3} =$$
$$= x(1 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + o(x^{18}))^{1/3}$$

Dále budeme aproximovat pouze závorku, stačí do dvanáctého řádu.

$$(1 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + o(x^{18}))^{1/3} =$$

Označme $V(x) = -\frac{x^6}{3!} + \frac{x^{12}}{5!} + o(x^{18})$, pak dostaneme

$$1 + \frac{1}{3}V(x) - \frac{2}{9}\frac{1}{2!}V(x)^2 + o(x^{13}) =$$

$$= 1 - \frac{1}{3}\frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{3}\frac{1}{5!}x^{12} - \frac{1}{9}\frac{1}{(3!)^2}x^{12} + o(x^{13}) = 1 - \frac{1}{18}x^6 - \frac{1}{3240}x^{12} + o(x^{13})$$

Mff DÚ

13.89°. $\dfrac{e^{2kx}-e^{kx}+1}{e^{2kx}+e^{kx}+1}\dfrac{\sin kx}{\sqrt[4]{k}}$

13.90°. $\lg\left(1+\dfrac{x^2}{k}\right)\sin kx$

13.91°. $\lg\left(1+\dfrac{x^2}{k^2}\right)\sin(k\pi x)$

13.92°. $\dfrac{k}{k^2+1}\sin^2 kx$

13.93°. $\sin\dfrac{x}{k}\sin kx$

13.94°. $\dfrac{\operatorname{arctg} kx}{\operatorname{arctg} 2kx}\dfrac{\sin kx}{k^\alpha}$ v $\mathbb{R}_+$

13.95°. $\operatorname{arctg} kx \operatorname{arccotg} kx \cos kx$ v $\mathbb{R}_+^0$

13.96°. $\dfrac{\operatorname{arccotg} kx}{\operatorname{arccotg} 2kx}\dfrac{\cos(k\pi x)}{k^\alpha}$ v $\mathbb{R}_+^0$

C. Najděte poloměry konvergence těchto řad:

13.97. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!\,z^k}{k^k}$

13.98. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^k z^k}{(k!)^2}$

13.99. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!\,z^k}{(2k)!!}$

13.100. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!!\,z^k}{k!}$

13.101. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^\alpha z^{2k}}{(2k)!!}$

13.102. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(\operatorname{arccotg} e^k)\,z^k$

13.103. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{j}^{k}\frac{1}{j}\Big)z^k$

13.104. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(\sin k)\,z^k$

13.105. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^{k^2}z^k$

D. Pro každou z následujících funkcí (proměnné x nebo z) najděte (reálnou nebo komplexní) Taylorovu řadu o středu uvedeném za středníkem. Pro každou z nalezených řad vypočtěte poloměr konvergence.

13.106°. $e^{z^2}\sin z;\ 0$

13.107°. $\cosh z\cos z;\ 0$

13.108°. $\lg(1+x)\lg(1+x^3);\ 0$

13.109°. $\operatorname{arccotg}^2 x;\ 0$

13.110°. $e^{-z}\sinh z;\ 0$

13.111°. $\sin x\arcsin x;\ 0$

13.112°. $\dfrac{e^{iz}}{1+z^2};\ 0$

13.113°. $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}};\ 0$

13.114°. $\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{1+x^2};\ 0$

13.115°. $\sin z;\ \tfrac{1}{2}\pi$

13.116°. $e^z;\ 1$

13.117°. $e^z;\ i\pi$

13.118°. $\cosh z;\ i$

13.119°. $\lg x\sin\pi x;\ 1$

13.120°. $\lg^3(1-x);\ 0$

Mff Dú

13.88. **BK:** $\mathbb{R}$; **STK:** $\overline{I} \cap N_2 = \emptyset$, kde $N_2 := \{2n\pi;\, n \in \mathbb{Z}\}$; **LSK:** $\mathbb{R} - N_2$; **NSK:** $x\pm$ pro všechna $x \in N_2$, $\pm\infty\mp$

13.89. jako ve cvičení **13.88**

13.90. **BK:** $\mathbb{R}$; **STK:** $\overline{I} \cap N_3 = \emptyset$, kde $N_3 := \{\pm 2n\pi;\, n \in \mathbb{N}\}$; **LSK:** $\mathbb{R} - N_3$; **NSK:** $x\pm$ pro všechna $x \in N_3$, $\pm\infty\mp$

13.91. **BK:** $\mathbb{R}$; **STK:** $\overline{I} \cap N_4 = \emptyset$, kde $N_4 := \{\pm 2n;\, n \in \mathbb{N}\}$; **LSK:** $\mathbb{R} - N_4$; **NSK:** $x\pm$ pro všechna $x \in N_4$, $\pm\infty\mp$

13.92. řada konverguje jen v bodech $x \equiv 0 \mod \pi$

13.93. jako ve cvičení **13.90**

13.94. jako ve cvičení **13.86**

13.95. **BK:** $\mathbb{R}_+^0 - N_5$, kde $N_5 := \{2n\pi;\, n \in \mathbb{N}\}$; **STK:** $\overline{I} \cap (\{0\} \cup N_5) = \emptyset$; **LSK:** $\mathbb{R}_+ - N_5$; **NSK:** $0+$, $x\pm$ pro všechna $x \in N_5$, $\pm\infty\mp$

13.96. v $\mathbb{R}_+^0$ řada konverguje (bodově, stejnoměrně, lokálně stejnoměrně), právě když to platí o řadě $\sum_{k=1}^{\infty} (\cos k\pi x)/k^{\alpha}$ (sr. s Př. 13.11, kde místo x píšeme πx)

C. Za číslem každého z cvičení 13.97–13.105 je uveden poloměr konvergence příslušné mocninné řady.

13.97. e	**13.98.** $+\infty$	**13.99.** 1	**13.100.** $\frac{1}{2}$	**13.101.** $+\infty$
13.102. e	**13.103.** 1	**13.104.** 1	**13.105.** e^{-1}	

D. U komplexních Taylorových řad uvádíme kruh konvergence, u reálných řad otevřený interval, který je průnikem kruhu konvergence s reálnou osou. Symbol $[\ldots]$ v horní mezi několika součtů znamená celou část výrazu uvnitř závorek.

13.106. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n+1}$ v $\mathbb{C}$, kde $\displaystyle c_n := (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(2n-2k+1)!}$

13.107. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{4n}$ v $\mathbb{C}$, kde $\displaystyle c_n := 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!\,(4n-2k)!} + \frac{(-1)^n}{((2n)!)^2}$

13.108. $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} c_n x^n$ v $(-1,1)$, kde $\displaystyle c_n := (-1)^n \sum_{k=1}^{[(n-1)/3]} \frac{1}{k(n-3k)}$

13.109. $\displaystyle\frac{1}{4}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ v $(-1,1)$, kde pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$c_{2n-1} := \frac{(-1)^n \pi}{2n-1}, \quad c_{2n} := \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$$

MAT 3 DÚ

(325) Vypočtěte
$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx.$$

Řešení:

S využitím metody per-partes dostaneme
$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v = \operatorname{tg} x & v' = \frac{1}{\cos^2 x} \end{array} \right| = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx =$$
$$= x \operatorname{tg} x - \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C.$$

Mff 406

(350) Vypočtěte

$$\int \frac{3x+7}{x^2-4x+15}\,dx.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+7}{x^2-4x+15}\,dx &= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+15}\,dx + 13\int \frac{dx}{x^2-4x+15} = \\
&= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+15\right| + 13\int \frac{dx}{(x-2)^2+11} = \\
&= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+15\right| + \frac{13}{11}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{11}}\right)^2+1} \left|\begin{array}{c} t = \frac{x-2}{\sqrt{11}} \\ dt = \frac{1}{\sqrt{11}}dx \end{array}\right| = \\
&= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+15\right| + \frac{13\sqrt{11}}{11}\int \frac{dt}{t^2+1} = \\
&= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+15\right| + \frac{13\sqrt{11}}{11}\operatorname{arctg} t + C = \\
&= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+15\right| + \frac{13}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{11}} + C.
\end{aligned}$$

MĦf 4 DÚ

(351) Vypočtěte

$$\int \frac{x^3+2x+x-1}{x^2-x+1}\,dx.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+2x+x-1}{x^2-x+1}\,dx &= \int (x+3)\,dx + \int \frac{3x-4}{x^2-x+1}\,dx = \\
&= \frac{x^2}{2}+3x+\frac{3}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \\
&= \frac{x^2}{2}+3x+\frac{3}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx - \frac{10}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} \left|\begin{array}{c} t=\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \\ dt=\frac{2}{\sqrt{3}}dx \end{array}\right| = \\
&= \frac{x^2}{2}+3x+\frac{3}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx - \frac{5\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} = \\
&= \frac{x^2}{2}+3x+\frac{3}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx - \frac{5\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} t + C = \\
&= \frac{x^2}{2}+3x+\frac{3}{2}\ln\left|x^2-x+1\right| - \frac{5\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

Uff 400

(359) Vypočtěte

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+4x+13)^2}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+4x+13)^2}\,dx = \int \frac{2x+4}{(x^2+4x+13)^2}\,dx - 3\int \frac{dx}{(x^2+4x+13)^2} \left| \begin{array}{l} t = x^2+4x+13 \\ dt = (12x+4)\,dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2} - 3\int \frac{dx}{\left[(x+2)^2+9\right]^2} =$$

$$= -\frac{1}{x^2+4x+13} - 3\int \frac{dx}{9^2\left[\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1\right]^2} \left| \begin{array}{l} w = \frac{x+2}{3} \\ dw = \frac{1}{3}dx \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{x^2+4x+13} - 3\frac{3}{81}\int \frac{dw}{(w^2+1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{x^2+4x+13} - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} w + \frac{1}{2}\frac{w}{w^2+1}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{x^2+4x+13} - \frac{1}{18}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} - \frac{1}{18}\frac{\frac{x+2}{3}}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1} + C =$$

$$= -\frac{1}{18}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} - \frac{1}{6}\frac{x+8}{x^2+4x+13} + C.$$

Mff SDÚ

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt\,.$$

Shrnutí:

Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)dx$ můžeme řešit substitucí

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $\quad x \in (-\pi, \pi)$.

Pak vyjádříme

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.4. Vypočtěte integrál $\int \frac{1}{\sin x}dx$, $x \in (0, \pi)$.

Řešení:

Uvedený integrál jsme již jednou řešili substitucí (příklad 1.4.6). Z výše odvozených vztahů snadno dostaneme:

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C\,.$$

Příklad 1.5.5. Vypočtěte integrál $\int \frac{1}{\cos x - 2\sin x + 3}dx$.

Řešení:

Použijeme substituci $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Z výše odvozených vztahů snadno dostaneme:

$$\int \frac{1}{\cos x - 2\sin x + 3}dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - 2\frac{2t}{1+t^2} + 3}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{1-t^2-4t+3+3t^2}dt =$$

$$= \int \frac{2}{2t^2-4t+4}dt = \int \frac{1}{t^2-2t+2}dt = \int \frac{1}{t^2-2t+1+1}dt = \int \frac{1}{1+(t-1)^2}dt =$$

$$= \operatorname{arctg}(t-1) + C = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1) + C\,.$$

Vyjádříme si x :

$x^2 + 2x + 1 = x^2t^2 + 2tx + 1$
$x^2 \cdot (1 - t^2) = x \cdot (2t - 1)$
$x = \frac{2t-1}{1-t^2} \Rightarrow x = \varphi(t) = \frac{2t-1}{1-t^2}$

Dále si musíme vyjádřit dx :

$dx = \frac{2\cdot(1-t^2)-(2t-1)(-2t)}{(1-t^2)^2}\, dt = \frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}\, dt$

Vyjádříme také odmocninu :

$\sqrt{x^2+x+1} = xt + 1 = \frac{2t-1}{1-t^2} \cdot t + 1 = \frac{2t^2-t+1-t^2}{1-t^2} = \frac{t^2-t+1}{1-t^2}$

Po substituci do I dostáváme :

$\mathrm{I} = \int \frac{\frac{2(t^2-t+1)}{(1-t^2)^2}}{\frac{2t-1}{1-t^2}\cdot\frac{t^2-t+1}{1-t^2}}\, dt = \int \frac{2\, dt}{2t-1} = ln|2t-1| = ln|2\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} - 1| = ln|\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-2-x}{x}| +$

$+$ C, kde jsme si z rovnice : $\sqrt{x^2+x+1} = xt + 1$ vyjádřili $t : t = \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$

Eulerova substituce třetího typu

16

Příklad 10.
Najděte primitivní funkci k funkci $\int \frac{dx}{(x+4)\cdot\sqrt{x^2+3x-4}}$
Řešení : $\mathrm{I} = \int \frac{dx}{(x+4)\cdot\sqrt{x^2+3x-4}}$
Můžeme rozložit

$x^2 + 3x - 4 = (x-1)\cdot(x+4)$

Potom

$\sqrt{x^2+3x-4} = t\cdot(x-1)$

a opět si vyjádříme x :

$x^2 + 3x - 4 = t^2 \cdot (x-1)^2$
$t^2 = \frac{(x-1)\cdot(x+4)}{(x-1)\cdot(x-1)} = \frac{x+4}{x-1}$
$t^2x - t^2 = x + 4$
$x \cdot (t^2 - 1) = t^2 + 4$
$x = \frac{t^2+4}{t^2-1} \Rightarrow x = \varphi(t) = \frac{t^2+4}{t^2-1}$

Pro další výpočet je nutné si vyjádřit i dx:

$dx = \frac{2t\cdot(t^2-1)-(t^2+4)\cdot 2t}{(t^2-1)^2}\, dt = -\frac{10t}{(t^2-1)^2}\, dt$

Vyjádříme také odmocninu :

$\sqrt{x^2+3x-4} = t\cdot(x-1) = t\cdot(\frac{t^2+4}{t^2-1} - 1) = t\cdot\frac{t^2+4-t^2+1}{t^2-1} = \frac{5t}{t^2-1}$
$\mathrm{I} = \int \frac{\frac{-10t}{(t^2-1)^2}}{(\frac{t^2+4}{t^2-1}+4)\frac{5t}{t^2-1}}\, dt = -2\int \frac{dt}{t^2+4+4t^2-4} = -\frac{2}{5}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{5t} = *$
Z rovnice $t^2 = \frac{x+4}{x-1}$ vyjádříme $t : t = \sqrt{\frac{x+4}{x-1}}$

Návratem k původní proměnné x dostáváme :

$* = \frac{2}{5\cdot\sqrt{\frac{x+4}{x-1}}} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{x-1}{x+4}} + \mathrm{C}$

vyjde $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Přitom pro $u \in \langle 1, 2\rangle$ je $\sqrt{u^2} = |u| = u$. Celkově vyjde:

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x = u^2 \\ \mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u \\ 1 \rightsquigarrow 1,\ 4 \rightsquigarrow 2 \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{u-1}{u+1}\,2u\,\mathrm{d}u = \int_1^2 \frac{2u^2-2u}{u+1}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \int_1^2 \left(2u - 4 + \frac{4}{u+1}\right)\mathrm{d}u = \left[u^2 - 4u + 4\ln|u+1|\right]_1^2 =$$

$$= (4 - 8 + 4\ln 3) - (1 - 4 + 4\ln 2) = 4\ln 3 - 4\ln 2 - 1.$$

Vzniklou neryze lomenou racionální funkci $\frac{2u^2-2u}{u+1}$ bylo třeba převést na ryze lomenou:

$$\frac{2u^2-2u}{u+1} = 2u - 4 + \frac{4}{u+1}.$$

Jiná možnost při určování nových mezí by byla omezit se na interval $(-\infty, 0)$, kde je funkce $\varphi(u)$ klesající, a zvolit $\alpha = -1$, $\beta = -2$. Pak by ovšem pro $u \in \langle -2, -1\rangle$ bylo $\sqrt{u^2} = |u| = -u$.

b) Integrand je na daném intervalu spojitý, takže určitý integrál existuje. Příslušný neurčitý integrál je typu (2.32). Nejrychleji ho vyřešíme pomocí substituce, kterou určíme z rovnice $\sqrt{x^2+1} - x = t$ (jde o druhou Eulerovu substituci). Úpravou a umocněním z tohoto vztahu dostaneme

$$\sqrt{x^2+1} = x + t \quad\Rightarrow\quad x^2 + 1 = x^2 + 2tx + t^2 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{1-t^2}{2t}.$$

Dále si připravíme derivaci:

$$\varphi(t) = \frac{1-t^2}{2t} \quad\Rightarrow\quad \varphi'(t) = \frac{-2t\cdot 2t - (1-t^2)\cdot 2}{4t^2} = -\frac{t^2+1}{2t^2}.$$

Konečně nalezneme nové meze. Do vztahu $\sqrt{x^2+1} - x = t$ dosadíme staré meze (jsou pro proměnnou x). Pro $x = 0$ vyjde $t = 1$, pro $x = 1$ vyjde $t = \sqrt{2} - 1$. Tedy $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{2} - 1$ ve vzorci (3.15) (který používáme zprava doleva — zadaný integrál chápeme jako pravý — a označení proměnných x a t je zaměněno). Vyšlo $\alpha > \beta$.

Funkce $\varphi(t)$ není definovaná pro $t = 0$. Ze vztahu pro $\varphi'(t)$ je na první pohled vidět, že $\varphi'(t) < 0$ pro $t \neq 0$. Tedy funkce $\varphi(t)$ je na intervalu $(0, +\infty)$ klesající, a tudíž prostě zobrazuje interval $\langle\sqrt{2} - 1, 1\rangle$ na interval $\langle 0, 1\rangle$. Postupně dostaneme (všimněte si záměny pořadí mezí, čímž se změní znaménko):

3

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1} - x} = \left| \begin{array}{l} x = \frac{1-t^2}{2t} \\ \mathrm{d}x = -\frac{t^2+1}{2t^2}\,\mathrm{d}t \\ 0 \rightsquigarrow 1,\ 1 \rightsquigarrow \sqrt{2}-1 \end{array} \right| = \int_1^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{t}\cdot\left(-\frac{t^2+1}{2t^2}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{\sqrt{2}-1}^1 \frac{t^2+1}{2t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}-1}^1 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\ln|t| - \frac{1}{2t^2}\right]_{\sqrt{2}-1}^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln 1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\ln(\sqrt{2}-1) - \frac{1}{2(\sqrt{2}-1)^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1) + \frac{1}{4(3-2\sqrt{2})} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1).$$

c) Integrand je na daném intervalu spojitý, takže určitý integrál existuje. Příslušný neurčitý integrál je typu (2.32). Doporučenou substitucí bylo $x = \operatorname{tg} v$. Stejně tak lze ale použít substituci $x = \operatorname{cotg} v$, která se ukáže v našem případě vhodnější.

Určíme nové meze. Funkce $\varphi(v) = \operatorname{cotg} v$ je klesající na intervalu $(0, \pi)$. Má platit $\operatorname{cotg}\alpha = 0$, $\operatorname{cotg}\beta = 1$. Můžeme tedy zvolit $\alpha = \pi/2$, $\beta = \pi/4$. Pak bude interval $\langle\pi/4, \pi/2\rangle$ funkcí $\varphi(v)$ prostě zobrazen na interval $\langle 0, 1\rangle$. Na intervalu $\langle\pi/4, \pi/2\rangle$ je $\sin v > 0$, takže $|\sin v| = \sin v$.

Provedením substituce dostaneme (opět se změní pořadí mezí, čímž se změní znaménko):

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{cotg} v \\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{\sin^2 v}\,\mathrm{d}v \\ 0 \rightsquigarrow \frac{\pi}{2},\ 1 \rightsquigarrow \frac{\pi}{4} \end{array} \right| = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \sqrt{\frac{\cos^2 v}{\sin^2 v} + 1}\cdot\frac{-1}{\sin^2 v}\,\mathrm{d}v =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{|\sin v|}\cdot\frac{1}{\sin^2 v}\,\mathrm{d}v = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^3 v}\,\mathrm{d}v.$$

Vzniklý integrál budeme řešit opět substituční metodou. Jde o integrál typu (2.18), kde $m = 0$ a $n = -3$. Doporučená substituce je $t = \cos v$. My však dáme přednost univerzální substituci $t = \operatorname{tg}\frac{v}{2}$ — viz (2.20), která bude rychlejší, protože vede na jednodušší racionální lomenou funkci. (Právě proto jsme zvolili výchozí substituci $x = \operatorname{cotg} v$; přesvědčte se, že substituce $x = \operatorname{tg} v$ by vedla na integrál z $1/\cos^3 v$, jehož výpočet je o něco pracnější.)

V případě substituce $t = \operatorname{tg}\frac{v}{2}$ jde opět o použití vzorce (3.15) zprava doleva — nezapomeňte, že pro výpočet diferenciálu vycházíme ze vztahu $v = 2\operatorname{arctg} t$. Avšak funkce $\operatorname{tg}\frac{v}{2}$ je prostá na intervalu $(-\pi, \pi)$, takže určení nových mezí je proto snadné. Dosazením za v vyjde, že dolní mez bude $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$, horní mez bude $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. S použitím

Mff 5Dú

Nechť funkce φ je definována na intervalu (α,β), má na něm spojitou derivaci a zobrazuje jej do intervalu I; funkce f nechť je spojitá na I. Předpokládejme dále, že existují limity $a = \lim_{t\to\alpha+} \varphi(t)$ a $b = \lim_{t\to\beta-} \varphi(t)$. Pak

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx,$$

má-li aspoň jedna strana smysl a navíc $a \neq b$ nebo $a = b \in I$.

Při aplikaci této věty nám může vyjít také $a = b$ nebo $a > b$. Přitom ovšem užíváme konvenci, že

$$\int_a^a f = 0, \qquad \int_a^b f = -\int_b^a f.$$

Příklad Spočtěte $\int_0^{9\pi/2} \sin^n x \cos x\,dx$ pro $n = 1, 2, \dots$

Řešení. Položme $\varphi(x) = \sin x$, $f(y) = y^n$, $(\alpha,\beta) = (0, 9\pi/2)$, $I = \mathbb{R}$. Vychází $a = 0$, $b = 1$, tedy

$$\int_0^{9\pi/2} \sin^n x \cos x\,dx = \int_0^1 y^n\,dy = \left[\frac{y^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

■

Příklad Spočtěte $\int_0^{10\pi} \left(\operatorname{arctg}\left(\sin^3 x + \sin\sin x\right) - \sin x\right)\cdot\cos x\,dx$.

Řešení. Položíme-li $\varphi(x) = \sin x$, $f(y) = \operatorname{arctg}(y^3 + \sin y) - y$, $(\alpha,\beta) = (0, 10\pi)$, $I = \mathbb{R}$, vychází $a = b = 0 \in I$, a tedy integrál ze zadání je roven

$$\int_0^0 (\operatorname{arctg}(y^3 + \sin y) - y)\,dy = 0.$$

■

Poznamenejme, že v předchozím příkladu bychom neuměli spočítat primitivní funkci, a přesto víme, že integrál je nulový.

2. Příklad Spočtěte $\int_{-\pi/3}^{\pi} \frac{1}{(1+\cos x)^2}\cdot\left(\sin\frac{1}{1+\cos x}\right)\cdot\sin x\,dx$.

Řešení. Použijme první substituční metodu pro funkci $\varphi(x) = 1 + \cos x$, $(\alpha,\beta) = (-\pi/3, \pi)$, $I = (0, +\infty)$ a $f(y) = -\frac{1}{y^2}\sin\frac{1}{y}$. Dostaneme $a = \frac{1}{2}$ a $b = 0$. Tedy integrál ze zadání je roven

$$\int_{1/2}^0 \left(-\frac{1}{y^2}\right)\sin\frac{1}{y}\,dy = \int_0^{1/2} \frac{1}{y^2}\sin\frac{1}{y}\,dy.$$

Mff JDU

Použijme první substituční metodu ještě jednou, tentokrát je $\varphi(y) = 1/y$, $(\alpha,\beta) = (0, 1/2)$, $I = (0, +\infty)$, $f(z) = -\sin z$. Vychází $a = +\infty$, $b = 2$, a tedy náš integrál je roven

$$\int_{+\infty}^2 (-\sin z)\,dz = \int_2^{+\infty} \sin z\,dz = [-\cos z]_2^{+\infty},$$

kterýžto přírůstek nemá smysl, protože funkce $-\cos z$ nemá limitu v $+\infty$. A tedy podle věty z úvodu tohoto paragrafu integrál ze zadání neexistuje. ■

Následující příklad ukazuje, že předpoklady v úvodní větě jsou nezbytné.

Příklad Spočtěte $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1+\cos x)^2}\cdot\left(\sin\frac{1}{1+\cos x}\right)\cdot\sin x\,dx$.

Řešení. Zkusme postupovat jako v předchozím příkladu pomocí první substituční metody. Funkce φ a f jsou stejné, $(\alpha,\beta) = (-\pi,\pi)$, $I = (0, +\infty)$. Vychází tedy $a = b = 0$. Protože $0 \notin I$, nejsou splněny předpoklady věty, a tudíž ji nemůžeme použít. Navíc použití jejího závěru vede k chybnému výsledku, totiž k tomu, že integrál je nulový. Spočteme-li však primitivní funkci (podle první substituční metody pro primitivní funkce z §4 s použitím stejných funkcí jako v předchozím příkladu), dostaneme

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1+\cos x)^2}\cdot\sin\frac{1}{1+\cos x}\sin x\,dx = \left[-\cos\frac{1}{1+\cos x}\right]_{-\pi}^{\pi},$$

kterýžto přírůstek nemá smysl, protože ani jedna z příslušných limit neexistuje. ■

§14. **Druhá substituční metoda** spočívá v užití věty z §13 opačným směrem, totiž pro výpočet integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$ pomocí integrálu $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ pro vhodnou funkci φ. Zpravidla se užívá důsledek:

Nechť φ má na (α,β) spojitou derivaci a prostě zobrazuje interval (α,β) na interval (a,b). Nechť f je spojitá na (a,b). Pak

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,dt,$$

má-li aspoň jedna strana smysl.

Příklad Spočtěte $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Řešení. Proveďme substituci pomocí funkce $\varphi(t) = \sin t$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. Funkce φ zobrazuje tento interval na interval $(-1, 1)$ a má v něm všude derivaci $\varphi'(t) =$

$\boxed{\text{6DÚ}}$

b) $\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{x^{3/2}}\,dx$ ... integrand je spojitý na $(0,1]$ ... problematický bod je jen 0

$\operatorname{tg} x = x + o(x^2) = x\cdot(1+o(x))$ ... Maclaurin 2. stupně

$\Downarrow$

srovnání $\operatorname{tg} x \sim x$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{tg} x}{x^{3/2}}\cdot\frac{1}{\frac{x}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to 0+}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{x^{3/2}}\,dx \ K \iff \int_0^1 \frac{x}{x^{3/2}}\,dx \ K$ $\qquad \int_0^1 \frac{x}{x^{3/2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 < \infty \Rightarrow$ KONV.

ú3 c) $\int_0^\infty \frac{x\sin x}{1+x}\,dx = \int_0^\infty \frac{x+1}{x+1}\sin x - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1} = \int_0^\infty \sin x\,dx - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1}\,dx$

integrand je spojitý na $[0,\infty)$ ... problematické je jen ∞

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1}\,dx$ konverguje dle Dirichleta: $\frac{1}{x+1} \searrow 0$ pro $x\to\infty$

$\left|\int_0^A \sin x\right| = |\cos 0 - \cos A| \le 2 \quad \forall A\in(0,\infty)$

$\int_0^\infty \sin x\,dx = \lim_{x\to\infty} \cos x - \lim_{x\to 0+} \cos x$ NEEX. $\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x \sin x}{x+1}\,dx$ DIVERGUJE

ú2 c) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ ... integrand je spoj. na $(-1,1)$, problematické jsou oba kraje

$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} \Rightarrow$ srovnání s $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ v 1

a s $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ v -1

v 1: $\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} \overset{\text{VoAL}}{\underset{\text{VoLSF}}{=}} \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONV. $\iff \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ KONV. $\iff \int_0^1 y^{-\frac12}\,dy$ KONV.

subst. $y = 1-x$

v -1: $\lim_{x\to -1+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} \overset{\text{VoAL}}{\underset{\text{VoLSF}}{=}} \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONV. $\iff \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ KONV. $\iff \int_0^1 z^{-\frac12}\,dz$ KONV.

subst. $z = 1+x$

Tedy $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONVERGUJE

---

d) $\int_0^1 x^{\ln x}\,dx = \int_0^1 e^{\ln^2 x}\,dx$ ... integrand je spoj. na $(0,1]$, problém jen v 0.

Pro $0<x<e^{-1}$ je $\ln x < -1$, tedy $x^{\ln x} > x^{-1}$ pro $0<x<e^{-1}(<1)$

$$\int_0^1 \cancel{\ln x}\, x^{\ln x}\,dx = \int_0^{e^{-1}} x^{\ln x}\,dx + \underbrace{\int_{e^{-1}}^1 x^{\ln x}\,dx}_{\in\mathbb{R}} > \int_0^{e^{-1}} x^{-1}\,dx + c = +\infty \Rightarrow \text{DIV.}$$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x \, dx$ ... integrand spojitý na $(0,\frac{\pi}{2})$, problém v 0 i v $\frac{\pi}{2}$.

v 0: $\lim\limits_{x\to 0+} \cos^q x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p \overset{\text{VoLSF}}{=} 1$

srovnání: $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin^p x \cos^q x}{x^p} = 1 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^p x \cos^q x \, dx$ KONV $\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^p$ KONV.

proto: $p > -1 \Rightarrow$ KONV, $p \le -1 \Rightarrow$ DIV.

v $\frac{\pi}{2}$: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-} \sin^p x = 1$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-} \left(\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}\right)^q \overset{\text{VoLSF}}{=} 1$

srovnání: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-} \frac{\sin^p x \cos^q x}{(\frac{\pi}{2}-x)^q} = 1 \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x \, dx$ KONV $\Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}-x)^q$ KONV.

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}-x)^q \, dx \underset{y=\frac{\pi}{2}-x}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} y^q \, dy$ ... proto $q > -1 \Rightarrow$ KONV, $q \le -1 \Rightarrow$ DIV.

ZÁVĚR: $(p > -1) \wedge (q > -1) \Rightarrow$ KONV

$(p \le -1) \vee (q \le -1) \Rightarrow$ DIV.

ÚLOHA 3

a) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx$ ... integrand spojitý na $(0,\infty)$, problém v 0 i v ∞

v 0: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{\sin x}{x^\alpha}}{x^{1-\alpha}} = 1 \Rightarrow$ srovnání s $\int_0^\pi x^{1-\alpha} \, dx$ ($\sin x \ge 0$ na $(0,\pi)$)

Tedy $1-\alpha > -1$, tj. $\alpha < 2 \Rightarrow$ KONV.
$\alpha \ge 2 \Rightarrow$ DIV.

v ∞: AK: $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$ $\quad -\alpha < -1 \Rightarrow$ ABS. KONV. (tj. $\alpha > 1$)

NAK: Kdykoli $\alpha > 0$, pak $\frac{1}{x^\alpha} \Downarrow 0$ pro $x \to \infty$.

$\forall M > 1$: $\left|\int_1^M \sin x \, dx\right| = |\cos 1 - \cos M| \le 2$, tedy částečné integrály jsou omezené

DIV: Je-li $\alpha \le 0$, pak v ∞ není splněna Bolzano-Cauchyova podm.

Skutečně, nechť $k \in \mathbb{N}$ spočtěme $\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx \ge \left((2k+1)\pi\right)^{-\alpha} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin x \, dx =$
$= 2 \cdot \left((2k+1)\pi\right)^{|\alpha|}$

Tedy $\exists \varepsilon > 0 : \forall x_0 \in (0,\infty) : \exists c, d > x_0,\ c<d : \int_c^d \frac{\sin x}{x^\alpha} > \varepsilon$

stačí $\varepsilon = 2$

stačí $c = 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{N}$ tak, aby $c > x_0$
$d = (2k+1)\pi$

Tedy pro $\alpha \le 0$ integrál v ∞ diverguje

k) $\int_0^{\pi/4} tg^\alpha x \cos(\cotg x)\,dx$ ... integrand je spojitý na $(0,\frac{\pi}{4}]$

• $(\cotg x)' = -(1+\cotg^2 x)^{\in(-\infty,0)}$ pro $x\in(0,\frac{\pi}{4})$ (i jinde, ale tam je to nezajímavé)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^\alpha x\cos(\cotg x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cotg x}\right)^\alpha \cos(\cotg x)\,\frac{-(1+\cotg^2 x)}{-(1+\cotg^2 x)}\,dx \quad = (*)$$

subst. $\cotg x = y$ $\qquad \cotg: (0,\frac{\pi}{4}] \leftrightarrow [1,\infty)$

$\underbrace{-(1+\cotg^2 x)}_{\in\mathbb{R}\ \forall x\in(0,\frac{\pi}{4})}dx = dy$

$(*) = \int_1^\infty y^{-\alpha}\cos y\,\frac{1}{1+y^2}\,dy.$ $\qquad$ $\cos y$ má omez. část. integrály

$\frac{1}{y^{2+\alpha}+y^\alpha}\searrow 0$ pokud $2+\alpha>0$, $\alpha>-2$ $\rightarrow$ NAK (Dirichlet)

~~Ok~~ $|\cos y|\cdot\frac{1}{y^\alpha(1+y^2)} \le \frac{1}{y^\alpha(1+y^2)} \Rightarrow \left.\begin{matrix}2+\alpha>1\\ \alpha>-1\end{matrix}\right\} \Rightarrow AK$

• $\alpha\in(-2,-1] \Rightarrow \neg AK$ vzhledem k nerovnosti $|\cos y|\ge \frac{1}{2}+\frac{\cos 2y}{2}$
• $\alpha\le -2 \Rightarrow DIV$, není splněna Bolzano-Cauchyova podmínka.

---

l) $\int_{-1}^1 \sin\frac{1+x}{1-x}\,\frac{dx}{(1-x^2)^\alpha}$ ... integrand je spojitý na $(-1,1)$, problém jen v -1, tak v 1

v -1: $1-x \xrightarrow[x\to-1+]{} 2$, $1+x\to 0$, $(1-x)^\alpha\to 2^\alpha$, $\frac{\sin\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{1+x}\to\frac{1}{2}$

srovnání: $\lim_{x\to-1+}\frac{\sin\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1}{(1-x)^\alpha}\cdot\frac{1}{(1+x)^\alpha}}{(1+x)\cdot\frac{1}{(1+x)^\alpha}} = 2^{-\alpha-1}$ $\Rightarrow$ stačí vyšetřit $\int_{-1}^0 (1+x)^{-\alpha}dx =$

$\left(\begin{matrix}\alpha\ge1\Rightarrow DIV\\ \alpha<1\Rightarrow KONV\end{matrix}\right) \Leftarrow \int_0^1 y^{-\alpha}dy$

v 1: $\frac{1+x}{1-x} = -1+\frac{2}{1-x}$ $\qquad \left(-1+\frac{2}{1-x}\right)' = \frac{2}{(1-x)^2}$

$$\int_0^1 \sin\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{dx}{(1-x^2)^\alpha} = \int_0^1 \sin\left(-1+\frac{2}{1-x}\right)\cdot\frac{1}{(1-x)^{\alpha-2}\cdot 2}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}\cdot\frac{dx}{(1+x)^\alpha} = (*)$$

subst. $-1+\frac{2}{1-x}=y$ $\Rightarrow$ $x=\frac{y-1}{y+1}$ $\qquad [0,1)\xrightarrow{bij}[1,\infty)$

$\frac{2}{(1-x)^2}dx = dy$

$$(*) = \int_1^\infty \sin y\cdot\frac{1}{2\cdot\left(\frac{2}{y+1}\right)^{\alpha-2}}\cdot\frac{dy}{\left(\frac{2y}{y+1}\right)^\alpha} = 2^{1-2\alpha}\int_1^\infty \underbrace{\frac{(y+1)^{2\alpha-2}}{y^\alpha}}\cdot\sin y\,dy$$

$\alpha<2$ ⇒ KLESÁ, a to do nuly ... Dirichlet ⇒ NAK
$\alpha=2$ ⇒ KLESÁ, ale ne do nuly
$\alpha>2$ ⇒ ROSTE ⇒ NEBUDE SPLNĚN BC ⇒ DIV

• $\alpha<1 \Rightarrow AK$, lze porovnat s $y^{\alpha-2}$
• $1\le\alpha<2 \Rightarrow \neg AK$ ... standardní trik $|\sin y|\ge\frac{1}{2}-\frac{\cos 2y}{2}$

• pro $\alpha=-2$ existuje $\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y^2}\operatorname{tg}^2\frac{1}{y}\overset{VoBL}{\underset{VoLSF}{=}}1$

$\Rightarrow$ tedy není splněna Bolzano-Cauchyova podmínka $\Rightarrow$ DIV.

AK: $\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\operatorname{tg}^\alpha x\sin\frac{1}{x}|\,dx\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^\alpha x\,dx\dots\quad\alpha>-1\Rightarrow AK$ (srovnávací kritérium $\int_0^1 x^\alpha$)

¬AK: $\int_{\frac{4}{\pi}}^{\infty}\frac{1}{y^2}\operatorname{tg}^\alpha\frac{1}{y}|\sin y|\,dy\ge\int_{\frac{4}{\pi}}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{y^2}\cdot\operatorname{tg}^\alpha\frac{1}{y}}_{=+\infty\text{ pro }\alpha\le-1}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 2y}{2}\right)dy=+\infty$ pro $-1\ge\alpha>-2$

srovnání s $y^{-2-\alpha}$ $\qquad$ konv. dle Dirichleta pro $\alpha>-2$

závěr: AK pro $-1<\alpha<1$

NAK pro $-2<\alpha\le-1$

D pro $\alpha\le-2$ nebo $\alpha\ge1$.

---

n) $\int_0^1 x^\alpha\operatorname{arctg}x\cdot\cos\frac{1}{x}$ … integrand spojitý na $(0,1]$

v 0: AK: $\int_0^1|x^\alpha\operatorname{arctg}x\cos\frac{1}{x}|\,dx\le\int_0^1x^\alpha\cdot\operatorname{arctg}x\,dx\dots\lim_{x\to0+}\frac{x^\alpha\operatorname{arctg}x}{x^{\alpha+1}}=1$

tedy konv. $\Leftrightarrow\int_0^1x^{\alpha+1}dx$ konv. … $\alpha+1>-1$, $\alpha>-2\Rightarrow AK$.

NAK: $\int_0^1x^{\alpha+2}\operatorname{arctg}x\,\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx$

• $\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$ má omez. částečné integrály:

$\left|\int_m^1\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx\right|=\left|\int_1^{1/m}\cos y\,dy\right|\le2\quad\forall m\in(0,1)$.

• monotonie $x^{\alpha+2}\operatorname{arctg}x$ na pravém okolí nuly:

$(x^{\alpha+2}\operatorname{arctg}x)'=(\alpha+2)x^{\alpha+1}\operatorname{arctg}x+\frac{x^{\alpha+2}}{1+x^2}=\underbrace{x^{\alpha+2}}_{>0}\underbrace{\left((\alpha+2)\cdot\frac{\operatorname{arctg}x}{x}+\frac{1}{1+x^2}\right)}_{\xrightarrow{x\to0+}\alpha+3}$

$\alpha>-3\Rightarrow$ roste, $\quad\alpha<-3\Rightarrow$ klesá

• limita v nule: $\lim_{x\to0+}x^{\alpha+2}\operatorname{arctg}x\xrightarrow{\alpha>-3}0$, $\xrightarrow{\alpha\le-3}1,\ \infty$

Dle Dirichleta máme NAK pro $\alpha>-3$.

¬AK: $\int_0^1|x^{\alpha}\operatorname{arctg}x\cos\frac{1}{x}|\,dx\ge\int_0^1\underbrace{x^\alpha\operatorname{arctg}x}_{=+\infty\text{ pro }\alpha\le-2}\cdot\left(1+\cos\frac{2}{x}\right)dx=+\infty$ pro $-3<\alpha\le-2$.

(srovnání s $x^{\alpha+1}$) $\qquad$ konverguje dle Dirichleta pro $\alpha>-3$

D: Pro $\alpha\le-3$ není splněna Bolzano-Cauchyova podmínka:

$\lim_{x\to0+}x^{\alpha+2}\operatorname{arctg}x>\frac{1}{2}\Rightarrow\int_{(3\frac{\pi}{2}+2k\pi)^{-1}}^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)^{-1}}x^{\alpha+2}\operatorname{arctg}x\cdot\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}>\frac{1}{2}\int_{(\frac{3}{2}\pi+2k\pi)^{-1}}^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)^{-1}}\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx=1$

$\Downarrow$

pro $x<x_0$ je $x^{\alpha+2}\operatorname{arctg}x>\frac{1}{2}$

$\Downarrow$ $k\in\mathbb{N}$ voleno tak, aby $\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}<x_0$