je $\varphi_+^{-1}(F) = \{x \in I : (\exists y \in \mathbb{R})\ (x, y) \in F\}$. Tedy vzor F při φ_+ je obrazem kompaktní množiny $F \subset S$ při spojitém zobrazení $(x, y) \mapsto x$, a je tedy kompaktní, a proto i uzavřenou podmnožinou I. Zobrazení $\varphi_+ : I \to \mathbb{R}$ je tudíž spojité. Proto je množina $\varphi_+(I)$ souvislá. Totéž platí o zobrazení $\varphi_-(x) = (x, y_-(x))$ a grafu y_-. Množina $\varphi_-(I)$ je tedy souvislá z podobných důvodů. Množiny $\varphi_+(I)$ a $\varphi_-(I)$ jsou souvislé, jejich sjednocení je rovno S a tyto dvě množiny mají neprázdný průnik (např. bod $(x_0, 0)$ leží v obou těchto množinách). Množina S je tedy sjednocením dvou souvislých podmnožin, které se protínají, a je proto souvislá. ■

8. Lokální vlastnosti funkcí více proměnných

§53. Limita a spojitost funkcí více proměnných. V tomto paragrafu spočteme několik příkladů na uvedené pojmy. Upozorňujeme ale na to, že i v [Z, 2.12 a 2.13] lze nalézt několik řešených příkladů.

Mnohokrát užijeme tvrzení souvislosti mezi limitou a spojitostí:

Funkce (zobrazení) f z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$ je spojitá v $a \in \mathbb{R}^m$, právě když $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Kromě vět o souvislosti mezi pojmem limity reálné funkce a aritmetickými operacemi, případně nerovnostmi, které budeme bez dalšího používat, připomeňme zejména větu o limitě složeného zobrazení:

Nechť g je zobrazení z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$, h je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^p$, $\lim_{v \to a} g(v) = b$ a $\lim_{w \to b} h(w) = c$. Je-li navíc splněno, že $g(v)$ je různé od b na nějakém prstencovém okolí a, pak je $\lim_{v \to a} (h \circ g)(v) = c$, tj. limita složeného zobrazení se za uvedených předpokladů rovná limitě „vnějšího" zobrazení v odpovídajícím bodě.

Poznámka. Jistě se setkáte i s následující variantou předchozího tvrzení:

Nechť g je zobrazení z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$, h je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^p$, $\lim_{v \to a} g(v) = b$ a h je spojité v b. Pak $\lim_{v \to a} (h \circ g)(v) = h(b)$.

Použití tohoto tvrzení je o poznání jednodušší a pohodlnější, než je tomu v případě předchozího tvrzení, a tak příklad na to neuvádíme.

Příklad Lze funkci $\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$?

Řešení. Pro $x^2+y^2 \neq 0$, t.j. $(x, y) \neq (0, 0)$, je zadaná funkce podílem funkcí $\sin xy$ a $\sqrt{x^2+y^2}$. Funkce $\sin xy$ je složením spojité funkce $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a polynomu

xy. Funkce $\sqrt{x^2+y^2}$ je složením funkce $\sqrt{\cdot}$, která je spojitá na intervalu $[0, \infty)$ s polynomem $x^2 + y^2$, jehož hodnoty jsou nezáporné. Připomeňme si, že polynomy dvou proměnných jsou spojité funkce na $\mathbb{R}^2$, neboť je lze popsat pomocí spojitých funkcí (projekcí) $(x, y) \mapsto x$ a $(x, y) \mapsto y$ a operací násobení a sčítání, které spojitost zachovávají. Funkce $\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ je tedy spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, protože $\sqrt{x^2+y^2} \neq 0$ pro $(x, y) \neq (0, 0)$. Proto ji lze spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$, právě když má vlastní limitu v počátku. Je

$$\frac{|\sin xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Funkce $\sqrt{x^2+y^2}$ je spojitá v počátku (viz výše), a její limita v počátku je tedy rovna její hodnotě tamtéž, t.j. nule. Protože absolutní hodnota naší funkce je omezena zdola nulovou funkcí a shora funkcí s nulovou limitou v počátku, má v počátku limitu nula.

(Jiné zdůvodnění: Je $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ xy \neq 0}} \frac{\sin xy}{xy} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. První zlomek má limitu jedna pomocí věty o limitě složené funkce (užijeme ji na vnější funkci $\frac{\sin t}{t}$ a vnitřní funkci $(x, y) \mapsto xy$) a druhý zlomek má limitu nula jak bylo ukázáno výše. Protože na osách mimo počátek je funkce nulová, má limitu nula v počátku.) ■

Příklad Lze funkci $f(x, y) = \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$ spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$?

Řešení. Mohli bychom obdobně jako v minulém případě odůvodnit, že funkce je spojitá mimo počátek, kde není definovaná. Jak se ukáže, byla by to zbytečná práce, neboť neexistuje limita v počátku. Kdyby totiž existovala, tak by se podle věty o limitě složené funkce musela rovnat hodnotě $\lim_{t\to 0} f(t, 0)$ a zároveň též $\lim_{t \to 0} f(t, t)$. V prvním případě jsme za vnitřní funkci (zobrazení) zvolili $\varphi(t) = (t, 0)$, ve druhém $\psi(t) = (t, t)$; v obou případech je vnější funkcí funkce f. První z obou limit je rovna nule, zatímco druhá je rovna jedné polovině. Funkce f tedy nemůže mít v počátku limitu, a nelze ji tedy v počátku spojitě dodefinovat. ■

Příklad Lze funkci $f(x, y) = \frac{\sin x + \sin y}{x+y}$ spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$?

Řešení. Funkce je spojitá, pokud $x + y \neq 0$. To plyne ze spojitosti funkce sinus, polynomu $x+y$ a zachovávání spojitosti při sčítání a dělení. Bude nás proto zajímat $\lim_{\substack{(x,y)\to(a,-a) \\ x+y\neq 0}} f(x, y)$ pro $a \in \mathbb{R}$. Pomocí vzorce pro součet sinů je

$$f(x, y) = \frac{\sin \frac{x+y}{2}}{\frac{x+y}{2}} \cos \frac{x-y}{2}.$$

Protože $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ a $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x+y\neq 0}} \frac{x+y}{2} = 0$, je hledaná limita rovna díky spojitosti funkce kosinus hodnotě $\cos a$.

Definujeme-li tedy $f(a,-a) = \cos a$ pro všechna $a \in \mathbb{R}$, je f spojitá na celém $\mathbf{R}^2$, neboť pro $a \in \mathbf{R}$ je $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,-a)\\ x+y\neq 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,-a)\\ x+y=0}} f(x,y) = \cos a$, a tedy i $\lim\limits_{(x,y)\to(a,-a)} f(x,y) = \cos a$, jak se můžete snadno přesvědčit. ■

Příklad Spočtěte $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x+y\neq 0}} \frac{\sin x+\log(1+y)}{x+y}$.

Řešení. Uvažujeme-li funkci $\psi(t) = (t,0)$, dostáváme složením se zadanou funkcí, že limita, pokud existuje, se musí rovnat hodnotě $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

Možná až po několika pokusech dokázat, že limita je rovna jedné, dojdeme k podezření, že tomu tak být nemusí, a to zhruba proto, že jmenovatel $x+y$ může být velmi malý, zatímco hodnoty x a y významné pro velikost $\sin x$ a $\log(1+y)$ mohou být relativně větší. Tuto hrubou myšlenku zkusme realizovat tak, že budeme skládat naši funkci s funkcí $\varphi(t) = (t, -t+t^2)$, kde by se naznačený efekt mohl projevit. Pokud existuje hledaná limita, pak je dle věty o limitě složené funkce rovna

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t + \log(1-t+t^2)}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos t + \frac{-1+2t}{1-t+t^2}}{2t} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\sin t + \frac{2(1-t+t^2)-(2t-1)^2}{(1-t+t^2)^2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Zde jsme dvakrát užili L'Hospitalovo pravidlo. To bylo možné, protože limity v čitateli a jmenovateli v prvních dvou limitách jsou zřejmě nulové a protože poslední limita existuje.

Protože by limita musela nabývat dvou různých hodnot, dostáváme, že nemůže existovat. ■

§54. Parciální derivace a totální diferenciál. Připomeňme si, že nejčastějším způsobem, jak zjistit existenci totálního diferenciálu a jeho hodnoty je použití následujících faktů:

Je-li f funkce z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbb{R}$ taková, že parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ jsou spojité v bodě $a \in \mathbf{R}^n$ (jako funkce n proměnných), pak funkce f má v bodě a totální diferenciál $df(a)$.

Existuje-li totální diferenciál f v bodě a, pak existují parciální derivace f v a a $df(a)$ má v bodě $h \in \mathbf{R}^n$ hodnotu $d_h f(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k$.

To nám dává možnost postupovat při vyšetřování totálního diferenciálu následovně. Spočítáme parciální derivace funkce na okolí zkoumaného bodu a. Jsou-li v bodě a spojité, víme co je totální diferenciál díky oběma uvedeným tvrzením. Nejsou-li spojité, ale známe jejich hodnotu v bodě a, pak víme díky druhému uvedenému tvrzení, co je totálním diferenciálem, pokud existuje. Zda je to skutečně diferenciál či nikoliv, to zjistíme užitím definice totálního diferenciálu.

Nutnou podmínku pro existenci totálního diferenciálu, která může ulehčit důkaz neexistence diferenciálu, dává tvrzení:

Existuje-li totální diferenciál reálné funkce n proměnných f v bodě $a \in \mathbb{R}^n$, pak je f v bodě a spojitá.

Příklad Dodefinujte funkci $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$ na $\mathbb{R}^2$ tak, aby měla totální diferenciál ve všech bodech a spočtěte ho.

Řešení. Pro $(x,y) \in G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ je funkce definovaná a snadno spočteme její parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2y(x^2+y^2)-x^3y2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3(x^2+y^2)-x^3y2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

To jsou spojité funkce dvou proměnných na G, neboť jsou to racionální funkce na svém definičním oboru. Proto má funkce f na G totální diferenciál, přičemž ten je v bodě $(x,y) \in G$ zobrazením

$$df(x,y)\colon (h_1,h_2) \mapsto \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}h_1 + \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}h_2.$$

Má-li být f rozšířena na $\mathbb{R}^2$ tak, aby měla totální diferenciál, musí být rozšířena spojitě. Protože $\lim_{t\to 0} f(t,0) = 0$, je nutnou podmínkou pro takové rozšíření, že $f(0,0) = 0$. Dodefinujeme proto f v počátku nulou a uvažujeme, zda má totální diferenciál v počátku. Protože nyní máme $f(x,0) = f(0,y) = 0$ pro všechna $x,y \in \mathbb{R}$, jsou obě parciální derivace funkce f v počátku nulové z definice. Existuje-li totální diferenciál, musí platit, že $df(0,0)\colon (h_1,h_2) \mapsto 0$, tedy, že je to nulová lineární forma. Ověříme, že ta je totálním diferenciálem f v počátku podle definice:

Položme

$$\varepsilon(h_1,h_2) = \frac{|f((0,0)+(h_1,h_2)) - f(0,0) - d_{(h_1,h_2)}f(0,0)|}{\|(h_1,h_2)\|} = \frac{|h_1^2h_1h_2|}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le$$

$$\le \frac{h_1^2}{h_1^2+h_2^2}\frac{h_1^2+h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le \|(h_1,h_2)\|.$$

Je tedy $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ a totální diferenciál f v počátku je roven nulové formě dle definice. ■

Příklad Vyšetřete, zda funkci $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}\log(1+xy)$ lze dodefinovat na nějakém okolí počátku tak, aby v něm měla totální diferenciál.

Řešení. Protože funkce xy je spojitá v počátku a má v něm hodnotu nula, je na nějakém okolí počátku její hodnota větší než -1 a funkce f je na příslušném prstencovém okolí počátku definovaná.

Má-li funkce mít totální diferenciál v počátku, musí v něm být dokonce spojitá. Protože $f(0,y) = 0$ pro všechna $y \neq 0$, je jedinou možností, jak dodefinovat f v počátku, položit $f(0,0) = 0$.

Protože nyní je $f(0,y) = f(x,0) = 0$ pro všechna $x,y \in \mathbb{R}$, tak parciální derivace v počátku jsou nulové. Jediným možným kandidátem na totální diferenciál v počátku je tedy nulová lineární forma na $\mathbb{R}^2$. Je-li skutečně totálním diferenciálem,

pak podle definice musí platit, že $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$. Složíme-li ovšem zkoumanou funkci proměnných h_1, h_2 v prstencovém okolí počátku s funkcí $t \mapsto (t,t)$, pak zjistíme, že limita pro $t \to 0_+$ je rovna $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a to je ve sporu s větou o limitě složené funkce.

(Poznamenejme, že pokud bychom vyšetřovali napřed parciální derivace funkce f v okolí počátku, pak bychom po jistém úsilí s jejich výpočtem a se zkoumáním limity zjistili, že nejsou v počátku spojité. Neexistenci limity bychom mohli dokázat též zkoumáním „po osách“a „po diagonále“, tedy skládáním s $t \mapsto (t,0)$, $t \mapsto (0,t)$ a $t \mapsto (t,t)$. Tím bychom ovšem dospěli k tomu, že tato cesta k cíli nevede a pak bychom jistě přistoupili ke zkoumání diferenciálu podle definice jako výše. Protože funkci f lze spojitě dodefinovat nulou v počátku, nelze nutnou podmínku spojitosti užít k vyvrácení existence diferenciálu v tomto případě. Je proto dobré získat cit pro to, kterému postupu dát přednost, abychom aspoň nad jednoduššími příklady neztráceli příliš mnoho času.) ■

§55. Derivace ve směru. K výpočtu derivace ve směru je často výhodné užít totální diferenciál, pokud existuje:

Existuje-li totální diferenciál $df(a)$ funkce f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, pak derivace ve směru $h \in \mathbb{R}^n$ ($\partial_h f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$) je rovna hodnotě $d_h f(a)$ tohoto diferenciálu v h. Poznamenejme, že geometrické představě směru odpovídají jen nenulová h a že někdy se o derivaci ve směru mluví jen v případě, že $\|h\| = 1$.

Příklad Spočtěte derivaci funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg} xy$ v bodě $(1,1)$ ve směru $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$.

Řešení. Parciální derivace jsou $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{1+x^2y^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{1+x^2y^2}$. To jsou funkce dvou proměnných, které jsou spojité na $\mathbb{R}^2$, speciálně jsou spojité v bodě $(1,1)$. Funkce f má tedy totální diferenciál v bodě $(1,1)$ a derivace f v bodě $(1,1)$ ve směru $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ je rovna hodnotě totálního diferenciálu $df(1,1)$ v bodě $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$, tedy je rovna $\frac{1}{2}\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$. ■

§56. Tečná nadrovina. Existuje-li totální diferenciál reálné funkce více proměnných, můžeme mluvit o tečné nadrovině k jejímu grafu:

Má-li funkce f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ totální diferenciál v bodě a, pak graf zobrazení $x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(a) + d_{x-a}f(a)$, (t.j. množina

$$(a, f(a)) + L = \{(a, f(a)) + (\xi, \eta) \colon a \in \mathbb{R}^n,\ (\xi,\eta) \in L\},$$

kde L je graf zobrazení $df(a)$) je tečnou nadrovinou ke grafu f v bodě $(a, f(a))$.

Příklad Nechť T je tečná rovina ke grafu funkce $p(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$, která je kolmá k přímce $\{(t,t,t) \in \mathbb{R}^3 \colon t \in \mathbb{R}\}$. Ve kterém bodě protíná T „osu x“(t.j. přímku $\{(0,0,t) \in \mathbb{R}^3; t \in \mathbb{R}\}$)?

KUCHAŘKA NA HLEDÁNÍ EXTRÉMŮ FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

Na základě poznámek ze cvičení zpracoval

Honza „Irigi“ Olšina

Algoritmy, které popíši fungují pro obecně n neznámých - ve všech textech ale budu psát pouze dvě souřadnice, i když napíšu, jak by se postupovalo pro souřadnic více.

Totální diferenciál
Totální diferenciál definuje limita

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(x+h_1,y+h_2)-f(x,y)-d\vec{f}(\vec{x},y)\cdot(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \qquad (\hat{\heartsuit})$$

Nutnou podmínkou pro existenci totálního diferenciálu je **existence prvních parciálních derivací**, pokud neexistují, zjevně neexistuje ani ($\hat{\heartsuit}$). Pokud **existují první parciální derivace**, potom jedinou přípustnou hodnotou $d\vec{f}(x,y)\cdot(h_1,h_2)$ je

$$d\vec{f}(x,y)\cdot(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}h_2$$

Postačující podmínkou je buďto **spojitost prvních parciálních derivací**, nebo existence ($\hat{\heartsuit}$).

Příklad: Zjistěte zda a kde má funkce $(xy)^{1/3}$ totální diferenciál.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^{-2/3}y^{1/3}}{3}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y^{-2/3}x^{1/3}}{3}$$

Je vidět, že derivace jsou mimo osy spojité, tudíž mimo osy existuje totální diferenciál. Na osách je funkční hodnota $(xy)^{1/3}=0$, ale první parciální derivace zde nejsou definovány (jsou v limitě nekonečné), proto na osách totální diferenciál není.
V počátku soustavy souřadnic jsou první parciální derivace nulové, protože

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

a obdobně pro derivaci podle y.
Proto pokud totální diferenciál existuje, pak má hodnotu $d\vec{f}(x,y)\cdot(h_1,h_2)=0$. Ověříme jeho existenci dosazením do ($\hat{\heartsuit}$). Přejdeme k polárním souřadnicím:

$$h_1 = r\sin(\phi)$$
$$h_2 = r\cos(\phi)$$

Tedy dosadím do ($\hat{\heartsuit}$):

$$\lim_{r\to 0}\frac{(h_1h_2)^{1/3}-0-0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{r\to 0}\frac{(r\sin(\phi)r\cos(\phi))^{1/3}}{r}$$

Tato limita neexistuje (resp. závisí na úhlu ϕ), totální diferenciál tedy v počátku neexistuje.

Hledám-li extrém funkcí více proměnných $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, prohledávám jednak „kandidáty“ na extrém a jednak hledám extrém na okraji, což je extrém s vazbou.

Lokální extrémy
1. Nutná podmínka pro to, aby funkce měla v bodě extrém je, aby první parciální derivace byly nulové:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

5 Totální diferenciál

Definice 5.1. *Funkce f má v bodě a totální diferenciál, pokud existuje lineární zobrazení $\mathrm{d}f(a) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$, pro které platí*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f(a)[h]}{\|h\|} = 0 .$$

Jinými slovy platí

$$f(a+h) - f(a) = \mathrm{d}f(a)[h] + \omega(h) , \quad \text{kde} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{\|h\|} = 0 .$$

Zatímco parciální derivace charakterizuje změnu funkce pouze v určitém směru, totální diferenciál nám něco říká o chování funkce pro všechny malé přírůstky h. Jeho interpretace je nahrazení funkce tečnou rovinou ke grafu funkce v daném bodě. Pokud má funkce v nějakém bodě spojité parciální derivace, pak tam má diferenciál. Platí následující věta.

Věta 5.2. *Nechť má funkce $f : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ v bodě a totální diferenciál. Pak je v bodě a spojitá, má v něm parciální derivace 1. řádu podle všech proměnných a platí $\mathrm{d}f(a)[h] = \sum_{i=1}^{r} h_i \partial_{x_i} f$.*

Příklad 5.3. *Najděte totální diferenciál funkce $f(x,y) = x^2+y^2$ v bodě (x_0, y_0).*

Řešení: Nejdříve vypočteme parciální derivace podle obou proměnných v bodě (x_0, y_0).

$$\partial_x f(x_0, y_0) = 2x_0 , \quad \partial_y f(x_0, y_0) = 2y_0 .$$

Pokud totální diferenciál existuje, má tedy tvar $2x_0h_1 + 2y_0h_2$.

$$\begin{aligned} \omega(h) &= f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - \mathrm{d}f(x_0, y_0)[h] = \\ &= (x_0 + h_1)^2 + (y_0 + h_2)^2 - x_0^2 - y_0^2 - 2x_0h_1 - 2y_0h_2 = h_1^2 + h_2^2 . \end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \|h\| = 0 .$$

Totálním diferenciálem funkce f v bodě (x_0, y_0) tedy je $2x_0h_1 + 2y_0h_2$.

Příklad 5.4. *Určete, zda funkce $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ má v počátku totální diferenciál.*

Řešení: Protože funkci nelze v počátku derivovat (nemá tam smysl), vypočítáme derivace přímo z definice

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0 ,$$
$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0 .$$

Totální diferenciál tedy je

$$\mathrm{d}f(0,0)[h] = \partial_x f(0,0)h_1 + \partial_y f(0,0)h_2 = 0h_1 + 0h_2 = 0\,.$$

Nyní ověříme, jestli tento kandidát je skutečně diferenciálem.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - \mathrm{d}f(0,0)[h]}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{h_1 h_2}{h_1^2+h_2^2} \neq 0\,.$$

Protože limita neexistuje, neexistuje ani totální diferenciál v tomto bodě.

Příklad 5.5. *Zjistěte, kde je funkce $f(x,y) = \ln(x+y)$ definovaná, spojitá, kde má parciální derivace 1. řádu a kde totální diferenciál.*

Řešení: Funkce je definovaná na polorovině $x+y>0$. V celé této polorovině je spojitá a má parciální derivace 1. řádu

$$\partial_x f = \partial_y f = \frac{1}{x+y}\,,$$

které jsou zjevně spojité v celé polorovině. Protože jsou parciální derivace spojité, má funkce totální diferenciál.

6 Taylorův rozvoj

Obdobně jako v jedné proměnné můžeme ve více proměnných vyjádřit hladkou funkci Taylorovým rozvojem. Má-li funkce f jako funkce n proměnných spojité parciální derivace až do řádu $(k+1)$ včetně na okolí bodu $a=(a_1,\ldots,a_n)$, platí na jeho okolí

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\left[(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^j f(a) + R_{k+1}(x)\,,$$

kde

$$R_{k+1}(x) = \frac{1}{(k+1)!}\left[(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{k+1} f(a+\delta(x-a))\,,$$

$\delta \in (0,1)$.

7 Příklady k samostatnému procvičování

Příklad 7.1. *Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ platí:*

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0$$

a přitom limita funkce dvou proměnných $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje.

... 43 44 45 46 47 48 49 50 **51** 52 53 54 55 56 57 58 59 ...

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (B)

LS 1997-98

Příklad 1 : Určete hodnost matice A a rozhodněte, zda platí $\det A = 0$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1,2]$;

$$f(x,y) = |x^2 - y^2|. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1$$

určuje v jistém okolí bodu $[1,0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x,y) = 2x + 4y \qquad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \le 1, x \ge 0,\ y \ge 0\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^2 + 3x + 2}{(x+1)(x^2+x+1)}\,dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (B)

LS 1997-98

Příklad B1 : Převeďme matici A pomocí elementárních řádkových úprav na schodovitou matici:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & -8 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & 4 & -9 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 8 & -103 & -134 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & 63 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 41 & 54, \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & 63 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{63} \end{pmatrix}.$$

Matice A má hodnost 5, a je tedy regulární. Proto platí $\det A \neq 0$.

Příklad B2 : Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. V bodech, kde $y^2 \neq x^2$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \operatorname{sgn}(x^2-y^2)\cdot 2x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\operatorname{sgn}(x^2-y^2)\cdot 2y.$$

V bodech, kde $y^2 = x^2$, zkusme počítat parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ podle definice

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{|(x+t)^2-y^2|}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{|2xt+t^2|}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t}|2x+t|. \end{aligned}$$

Poslední limita existuje, jen když $x = 0$, a je rovna nule. Vzhledem k symetrii funkce f ($f(x,y) = f(y,x)$) totéž platí pro $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = 3 - 2\cdot(x-1) + 4\cdot(y-2).$$

Příklad B3 : Položme

$$F(x,y) = 2x^4y + x^3 + y^3 + xy - 1.$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (D)

LS 1997-98

Příklad 1 : Spočtěte determinant matice A.

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = e^{x^2 - y} + 7y + |xy|. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\log(x + \operatorname{arctg} y + 1) + xy = 0$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M. Nakreslete množinu M.

$$f(x, y) = -y^2 + x^2 + \frac{4}{3}x^3 \qquad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 4, x \le 0\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Spočtěte

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x+2}\,dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (D)

LS 1997-98

Příklad D1 : Platí

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 32.$$

Příklad D2 : Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. V bodech $[x,y]$, kde $xy \neq 0$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x^2-y} \cdot 2x + \operatorname{sgn}(xy) \cdot y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^{x^2-y} + 7 + \operatorname{sgn}(xy) \cdot x.$$

Zbývá vyšetřit parciální derivace v bodech, kde $xy = 0$. Z věty o aritmetice limit plyne, že funkce f má parciální derivaci podle x (resp. podle y) v bodě $[x,y]$ právě tehdy, když ji tam má funkce $g : [x,y] \to |xy|$ (je totiž $f - g \in C^1(\mathbb{R}^2)$). Počítejme derivace funkce g v bodech $[x,0]$, $x \in \mathbb{R}$, a $[0,y]$, $y \in \mathbb{R}$, podle definice:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(x+t,0) - g(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(x,t) - g(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|xt|}{t} = \lim_{t\to 0} |x| \operatorname{sgn} t.$$

Poslední limita existuje, právě když $x = 0$, a v tomto případě je nulová.

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{g(0,y+t) - g(0,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t,y) - g(0,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|ty|}{t} = \lim_{t\to 0} |y| \operatorname{sgn} t.$$

Poslední limita existuje, právě když $y = 0$, a v tomto případě je nulová.

Z výše uvedeného vyplývá, že

$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,y];\ y \in \mathbb{R},\ y \neq 0\},$$
$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,0];\ x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}.$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = 1/e + 16 + (2/e + 2) \cdot (x-1) + (8 - 1/e) \cdot (y-2).$$

Příklad D3 : Položme

$$F(x,y) = \log(x + \operatorname{arctg} y + 1) + xy.$$

Funkce F je definována na jisté otevřené množině G obsahující bod $[0,0]$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x + \operatorname{arctg} y + 1} + y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x + \operatorname{arctg} y + 1} \cdot \frac{1}{1+y^2} + x.$$