27. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. *P*arciální derivací funkce f v bodě $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ podle proměnné x_i definujeme jako limitu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)}{t}.$$

Definice 2. Derivace (totální diferenciál)

Nechť je dána reálná funkce n-proměnných $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definovaná na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$. Pokud existuje lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0,$$

potom toto lineární zobrazení L značíme $df(a)$ nebo také $f'(a)$ a nazýváme jej **derivací** nebo také **totálním diferenciálem** funkce f v bodě a. Zobrazení, které bodu a přiřazuje $df(a)$, resp. $f'(a)$, značíme df, resp. f' a nazýváme jej diferenciálem funkce f.

Věta 3. Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má totální diferenciál $df(a)$ v bodě a. Potom $df(a)$ je lineární zobrazení, které vektoru $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ přiřazuje číslo $df(a)(h)$ a platí, že

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} h_i.$$

Věta 4. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je reálná funkce, jejíž všechny parciální derivace jsou spojité v bodě a. Potom funkce f má v bodě a totální diferenciál určený předpisem

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} dx_i.$$

Příklady

1. Lze funkce spojitě rozšířit na celé $\mathbb{R}^2$?

   (a) $$f(x,y)=\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

   (b) $$f(x,y)=\frac{\sin xy}{x^2+y^2}$$

   (c) $$f(x,y)=\frac{\sin x+\sin y}{x+y}$$

2. Dodefinujte funkci $f(x,y)=\frac{x^3y}{x^2+y^2}$ tak, aby měla totální diferenciál ve všech bodech a spočtěte ho.
3. Lze dodefinovat funkci $f(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2}\ln(1+xy)$ tak, aby měla totální diferenciál ve všech bodech?
4. Určete totální diferenciál funkce $(xy)^{1/3}$.
5. Ověřte z definice totální diferenciál funkce x^2+y^2 v bodě $[x_0,y_0]$.
6. Dodefinujte funkci $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ tak, aby měla totální diferenciál ve všech bodech a spočtěte ho.
7. Zjistěte, kde je funkce $f(x,y)=\ln(x+y)$ definovaná, spojitá, kde má parciální derivace a totální diferenciál.
8. Spočtěte parciální derivace funkce $|x^2-y^2|$ všude, kde existují.
9. Spočtěte parciální derivace funkce $e^{x^2-y}+7y+|xy|$ všude, kde existují.