Teorie

3.2.4 Algebra limit

Nechť funkce $f(X)$ a $g(X)$ mají v bodě A vlastní limitu. Pak v bodě A mají limitu funkce $|f(X)|, c_1 f(X) \pm c_2 g(X)$, kde c_1, c_2 jsou konstanty, $f(X)g(X), \frac{f(X)}{g(X)}$ (je-li $\lim_{X \to A} g(X) \neq 0$) a platí:

a) $\lim_{X \to A} |f(X)| = |\lim_{X \to A} f(X)|$,

b) $\lim_{X \to A} (c_1 f(X) \pm c_2 g(X)) = c_1 \lim_{X \to A} f(X) \pm c_2 \lim_{X \to A} g(X)$,

c) $\lim_{X \to A} [f(X) g(X)] = \lim_{X \to A} f(X) \lim_{X \to A} g(X)$,

d) $\lim_{X \to A} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{\lim_{X \to A} f(X)}{\lim_{X \to A} g(X)}$.

3.2.5 Limitní přechod v aritmetických operacích

Nechť f a g jsou funkce definované na stejné množině v euklidovském prostoru. Předpokládejme, že $\lim_{x \to A} f(x) = b$, $\lim_{x \to A} g(x) = c, b, c \in E_1$. Pak platí následující tvrzení:

a) $\lim_{x \to A} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$,

b) $\lim_{x \to A} f(x) g(x) = bc$,

c) $\lim_{x \to A} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$, za předpokladu, že $c \neq 0$.

3.2.6 Omezená funkce

Nechť existuje vlastní limita $\lim_{\substack{X \to A \\ X \in M}} f(X)$. Pak existuje takové okolí U bodu A, že funkce f je omezená na množině $U \cap M$.

3.2.7 Spojitost funkce

Nechť f je funkce definovaná na množině $M \subseteq E_n$ a nechť A je hromadný bod množiny M, přičemž $A \in M$. Pak funkce f je spojitá v bodě A vzhledem k množině M, právě když $\lim_{\substack{X \to A \\ A \in M}} f(X) = f(A)$.

3.2.8 „Sevřená“ funkce

Nechť f a g jsou funkce definované na stejné množině v euklidovském prostoru. Předpokládejme, že $\lim_{x \to A} f(x) = b$, $\lim_{x \to A} g(x) = c$. Pak platí následující tvrzení: Platí-li pro funkci h na jistém prstencovém okolí bodu A nerovnost $f \leq h \leq g$ a je-li přitom $\lim_{x \to A} f(x) = \lim_{x \to A} g(x)$, pak $\lim_{x \to A} h(x) = \lim_{x \to A} f(x)$.

3.2.9 Souvislost dvojné a dvojnásobné limity

Nechť existuje dvojná limita $\lim_{[x,y] \to [x_0,y_0]} f(x,y)$, limity $\lim_{x \to x_0} f(x,y)$ pro všechny hodnoty proměnné y z určitého prstencového okolí bodu y_0 a limity $\lim_{y \to y_0} f(x,y)$ pro všechny hodnoty proměnné x z určitého prstencového okolí bodu x_0. Pak existují také dvojnásobné limity v následujícím vztahu a platí $\lim_{x \to x_0} [\lim_{y \to y_0} f(x,y)] = \lim_{[x,y] \to [x_0,y_0]} f(x,y) = \lim_{y \to y_0} [\lim_{x \to x_0} f(x,y)]$.

Obrácená věta neplatí. Z existence dvojnásobných limit neplyne existence dvojné limity. Tato vlastnost platí i pro funkce více reálných proměnných.

3.2.10 Ostatní vlastnosti

Nechť f a g jsou funkce definované na stejné množině v euklidovském prostoru. Předpokládejme, že $\lim_{x \to A} f(x) = b$, $\lim_{x \to A} g(x) = c, b, c \in E_1$. Pak platí následující tvrzení:

a) Nechť h (t) je funkce definovaná v jistém prstencovém okolí bodu b, která má v tomto bodě vlastní limitu a nechť existuje prstencové okolí P bodu A, že $f(x) \neq b$ pro $x \in P$. Pak $\lim_{x \to A} h(f(x)) = \lim_{t \to b} h(t)$.

b) Je-li $f \leq g$ na jistém prstencovém okolí bodu A, pak $b \leq c$.

c) Je-li $|f| \leq |g|$ na jistém prstencovém okolí bodu A a současně $\lim_{x \to A} g(x) = 0$, pak $\lim_{x \to A} f(x) = 0$.

[2][3][4][5]

3.3 Transformace kartézských souřadnic do souřadnic polárních

Pro mnoho výpočtů limit funkcí více reálných proměnných je výhodnější použít místo kartézských souřadnic souřadnice polární, proto se v této kapitole zabývám popisem procesu transformace tohoto typu souřadnic.

Pomocí polárních souřadnic je bod určen, obdobně jako u kartézských souřadnic, dvěma parametry, avšak u polárních souřadnic jsou jimi míněny vzdálenost ρ bodu od počátku a orientovaný úhel φ, který svírá polohový vektor daného bodu s kladnou částí osy x.

Vztah mezi kartézskými souřadnicemi (x, y) a polárními souřadnicemi (ρ, φ):

$$x = x_0 + \rho \cos \varphi$$
$$y = y_0 + \rho \sin \varphi$$
$$\rho \geq 0, \varphi \in \langle 0, 2\pi),$$

kde (x_0, y_0) je hromadný bod, ve kterém počítám limitu dané funkce. [6]

Teorie

3.4 METODY VÝPOČTŮ LIMIT FUNKCÍ VÍCE REÁLNÝCH PROMĚNNÝCH

V následující kapitole se budu věnovat výpočtům limit funkcí více reálných proměnných. Problematika výpočtu těchto limit je poněkud náročnější než výpočet limit funkcí jedné reálné proměnné. Jsou zde uvedeny nejčastější metody, které se k výpočtu používají. U každého příkladu je popsán postup, jaký jsem při počítání použila. Pro názornost jsou u některých příkladů znázorněny i grafy vytvořené v programu Mathematica. Z grafů je často patrné, kam funkce z různých směrů k danému hromadnému bodu směřuje. U některých příkladů lze dojít k výsledku i jiným způsobem. Ve dvou případech (Příklad č. 7, Příklad č. 8) je ukázáno i řešení pomocí „úzké" definice limity.

Ve většině případů se zabývám funkcemi dvou reálných proměnných. Pro funkce více reálných proměnných by byl postup obdobný, avšak poněkud složitější. U některých výpočtů limit funkcí dvou reálných proměnných použiji transformaci kartézských souřadnic na souřadnice polární, avšak u funkcí tří reálných proměnných už může dojít k převodu kartézských souřadnic do sférických souřadnic. Proto je pro výpočet limit složitějších funkcí výhodnější použít počítačový program, například Mathematica či Matlab.

Nejprve popíši způsoby, kterými lze dojít k požadovanému výsledku u výpočtu limit, a následně ukážu nějaké příklady.

Pokud mám vypočítat limitu funkce $f(x,y)$ pro $x \to x_0$ a $y \to y_0$, mohu použít tyto metody:

a) Jestliže je funkce f v hledaném bodě (x_0, y_0) spojitá, pak mohu za neznámé x, y dosadit a dostanu $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}(x,y) = f(x_0,y_0)$.

(Příklad č. 4, Příklad č. 5, Příklad č. 6)

b) Pokud po dosazení hromadného bodu do funkce dostanu neurčitý výraz, tak se mohu pokusit pomocí elementárních úprav funkci upravit tak, aby byl výsledný tvar vhodnější. Poté už lze postupovat obdobně jako v a).

(Příklad č. 7, Příklad č. 8)

c) Výpočty lze také provést tak, že zavedu substituci, ve které se nachází funkce, která je definována v jistém okolí bodu (x_0, y_0). Nejčastěji se zavádí substituce: $y = kx$ pro $x \to 0$ a $y \to 0$ nebo $y = k(x - x_0) + y_0$ pro $x \to x_0$ a $y \to y_0$. V tomto případě se k bodu přibližujeme po svazku přímek. Pokud se budu k bodu (x_0, y_0) blížit po parabolách, tak si daný bod (x_0, y_0) zvolím vrcholem paraboly, a poté dostanu substituci: $y - y_0 = k(x - x_0)^2$. Po úpravách bude

$y = k(x - x_0)^2 + y_0$. Jestliže se poté tyto dvě limity nerovnají, nebo je jedna z těchto limit závislá na koeficientu (směrnici) k, tak mohu tvrdit, že původní limita neexistuje. Avšak pokud se limity rovnají, tak o původní limitě nelze říci, že existuje.

(Příklad č. 9, Příklad č. 10, Příklad č. 11, Příklad č. 12, Příklad č. 13)

d) Jinou možností je vypočtení dvojnásobných limit. Pokud se tyto limity nerovnají, tak hned mohu o limitě v bodě (x_0, y_0) říci, že neexistuje. Avšak pokud se dvojnásobné limity rovnat budou, tak o existenci dvojné limity nelze nic říci a musím pokračovat ve výpočtu. Dvojnásobné limity lze také použít pro ověření správnosti vypočtené limity (pokud se rovnají obě dvojnásobné limity a limita dvojná, tak je výsledek správný).

(Příklad č. 14, Příklad č. 15, Příklad č. 16, Příklad č. 17)

e) Lze také použít již zmiňovanou transformaci kartézských souřadnic do souřadnic polárních a algebraickými úpravami eliminovat jednu proměnnou (φ).

Věta, která platí pro limitu funkce při transformaci souřadnic:

Funkce f má v bodě (x_0, y_0) limitu b, jestliže existuje nezáporná funkce g: $< 0,\infty) \to < 0,\infty)$ splňující $\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho) = 0$ taková, že $|f(x_0 + \rho\cos\varphi,\ y_0 + +\rho\sin\varphi) - b| < g(\rho)$ pro každé $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ a $\varphi > 0$ dostatečně malé. Speciálně, platí-li po transformaci do polárních souřadnic $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0^+} h(\rho)g(\varphi)$ kde $\lim_{\rho\to 0^+} h(\rho) = 0$ a funkce $g(\varphi)$ je omezená pro $\varphi \in < 0, 2\pi)$, pak $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = 0$.

[9]

(Příklad č. 18, Příklad č. 19)

f) Další alternativou výpočtu je použití základních limit. Mám na mysli použití stejných vzorců jako u funkcí jedné proměnné. K těmto vzorcům se dostanu pomocí vhodné substituce. Příklady některých vzorců, které se používají: $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{\sin f(x,y)}{f(x,y)} = 1$, $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{\ln(1+f(x,y))}{f(x,y)} = 1$, $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} (1 + f(x,y))^{\frac{1}{f(x,y)}} = e$, pokud $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = 0$.

(Příklad č. 20, Příklad č. 21, Příklad č. 22, Příklad č. 23)

Poznámka

Následující úlohy, a to především úlohy k samostatnému řešení a úlohy obsažené v kontrolním testu, jsou určeny především pro zájemce o tuto problematiku. Podstatné je, aby jste si uvědomili základní rozdíl mezi limitou funkce jedné a limitou funkce více proměnných.

Řešené úlohy

(1a) **Příklad 4.3.1.** Vypočítejte

$$\lim_{[x,y]\to[2,4]} \frac{x+2y}{2x+y}.$$

Řešení: Dosadíme limitní bod, tedy

$$\lim_{[x,y]\to[2,4]} \frac{x+2y}{2x+y} = \frac{2+2\cdot 4}{2\cdot 2+4} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$

(1b) **Příklad 4.3.2.** Vypočítejte

$$\lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{xy+2x+y+2}{xy^2+y^2+x+1}.$$

Řešení: Postupným upravováním dostaneme

$$\lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{xy+2x+y+2}{xy^2+y^2+x+1} = „\tfrac{0}{0}“ = \lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{x(y+2)+(y+2)}{y^2(x+1)+(x+1)}$$
$$= \lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{(y+2)(x+1)}{(x+1)(y^2+1)} = \lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{y+2}{y^2+1} = 2.$$

(1c) **Příklad 4.3.3.** Vypočítejte

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Řešení: K bodu $[0,0]$ se budeme blížit po přímkách, tj. cestu volíme po přímkách obsahujících bod $[0,0]$. Takové přímky mají rovnice $y = kx$, kde $k \in \mathbb{R}$ je parametr. Bude-li řešení záviset na parametru k, limita neexistuje. Dosadíme a dostáváme

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{2xy}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2k}{1+k^2} = \frac{2k}{1+k^2}.$$

(1c) Limita závisí na parametru k. Pro různé hodnoty k dostáváme různou hodnotu limity. Limita proto neexistuje. Pokud limita nebude záviset na parametru k, pak o existenci limity nemůžeme nic říci. Nevíme, jestli existuje nebo neexistuje. Důvod je ten, že přímky tvoří pouze část možností, jak se k limitnímu bodu můžeme blížit.

(1d) **Příklad 4.3.4.** Vypočítejte

$$\lim_{[x,y]\to[1,2]} \frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}.$$

Řešení: K vypočítání této limity použijeme následující **větu o dvojnásobné limitě.**

Věta 4.3.1.

Jestliže existují limity

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) = a_1, \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) = a_2, \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = a,$$

pak $a = a_1 = a_2$.

Prakticky postupujeme tak, že si vybereme jednu proměnnou, např. proměnnou y, druhou pak považujeme za konstantu. Počítáme limitu funkce jedné proměnné, funkce závisející pouze na y. Dostaneme výraz, který již nebude obsahovat proměnnou y, ale pouze x. Nyní x budeme chápat jako proměnnou a vypočítáme limitu z funkce jedné proměnné, funkce závisející pouze na x, získáme hodnotu a_1,

$$\begin{aligned} a_1 &= \lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 2}\frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{4x^2-4}{x^4+16-17} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{4(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{4}{(x^2+1)} = 2. \end{aligned}$$

Totéž uděláme pro obě proměnné v opačném pořadí a dostáváme hodnotu a_2,

$$a_2 = \lim_{y\to 2}\left(\lim_{x\to 1}\frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}\right) = \lim_{y\to 2}\frac{y^2-4}{(y^2+4)(y^2-4)} = \lim_{y\to 2}\frac{1}{(y^2+4)} = \frac{1}{8}.$$

Vidíme, že $a_1 \neq a_2$, limita neexistuje. Pozor, jestliže $a_1 = a_2$, pak o existenci

(1d) limity se opět nedá nic říci. Může, ale také nemusí existovat.

Na závěr kapitoly si nadefinujeme spojitost funkce dvou proměnných.

Definice 4.3.4.

Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ je **spojitá v bodě** $[x_0, y_0] \in D_f$, jestliže platí

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Funkce $z = f(x, y)$ je **spojitá**, je-li spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte limitu $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[-1,6]} \frac{2x+3y-1}{x^4-y}$.
2. Vypočtěte limitu $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12}]} \sin(x+y)\cdot\cos(x-y)$.
3. Vypočtěte limitu $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[-1,4]} \frac{x^3+1}{y(x+1)}$.
4. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x(y+1)}{2x+3y}$.
5. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[1,4]} \frac{x^2-1}{y-4}$.
6. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^3-y^2}{xy-y^3}$.
7. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[-1,-3]} \frac{y^3-x^3+26}{x+y+4}$.
8. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]} \frac{2x+1}{x+y+1}$.
9. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2+x}{xy+y}$.
10. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{(x^2+y+1)(x^2-y+1)-1}{y}$.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. -3.
2. $\frac{3}{4}$.

(2e)

Příklad č. 22 Vypočtěte $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{\sin xyz}{x}$.

Řešení: Celou funkci rozšířím výrazem $\frac{yz}{yz}$ a vzniklou funkci rozdělím podle věty 3.2.4. Zvolím si substituci $t = xyz$. Následně lze u funkce opět najít podobnost se vzorcem pro výpočet limity funkce jedné reálné proměnné ($\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$). Po složení jednotlivých funkcí dostanu limitu rovnou 0.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{\sin xyz}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{\sin xyz}{x}\cdot\frac{yz}{yz} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{\sin xyz}{xyz}\cdot yz = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{\sin xyz}{xyz}\cdot \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} yz =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{\sin xyz}{xyz} = \left|\begin{matrix} t = xyz \\ t\to 0\end{matrix}\right| = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} yz = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} y\cdot \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} z = 0\cdot 0 = 0 \end{cases} = 1\cdot 0 = 0.$$

(1e)

Příklad č. 23 Rozhodněte o existenci limity $\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\operatorname{tg} xy}{y}$, a pokud existuje, vypočítejte ji.

Řešení: Celou funkci rozšířím takzvanou chytrou jedničkou, tj. $\frac{x}{x}$. Rozložím novou funkci na dvě funkce $f(x,y) = \frac{\operatorname{tg} xy}{xy}$ a $g(x) = x$, podle věty týkající se algebry limit. Při výpočtu limity funkce $f(x,y)$ využiji substituci a funkci tangens si vyjádřím pomocí funkcí sinus a kosinus. Po dosazení dostávám limitu funkce $f(x,y)$ rovnou jedné a limitu funkce g(x) rovnou 2. Tudíž je výsledná limita v bodě (2, 0) rovna dvěma.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\operatorname{tg} xy}{y} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\operatorname{tg} xy}{y}\cdot\frac{x}{x} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\operatorname{tg} xy}{xy}\cdot x = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\operatorname{tg} xy}{xy}\cdot\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} x =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\operatorname{tg} xy}{xy} = \left|\begin{matrix} t = xy \\ t\to 0\end{matrix}\right| = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg} t}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{\cos t} = 1\cdot 1 = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} x = 2 \end{cases} = 1\cdot 2 = 2.$$

(2f)

Příklad č. 24 Určete limitu $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} x\sin\frac{1}{x-y+z}$.

Řešení: Limitu budu řešit pomocí odhadu. Mohu totiž tvrdit, že pokud vynásobím proměnnou x funkcí sinus v absolutní hodnotě, vždy dostanu číslo menší nebo rovné absolutní hodnotě z x, protože absolutní hodnota funkce sinus je vždy menší nebo rovna 1. Využiji zde také znalosti věty uvedené v kapitole 3.2.10. Proto se tato limita rovná nule.

$$\left|x\sin\frac{1}{x-y+z}\right| \le |x|$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} |x| = 0 \to \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} x\sin\frac{1}{x-y+z} = 0.$$

(1f)

Příklad č. 25 Dokažte, že platí $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

Řešení: K dokázání tohoto tvrzení opět použiji odhad hodnot funkcí v okolí bodu (0, 0). Nejprve si funkci rozložím na dvě funkce podle kapitoly 3.2.4. Dostanu limity: $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x$ a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$. Je zřejmé, že $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x = 0$. Funkce $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ je omezená na množině $E_2 \setminus \{[0,0]\}$, protože pro všechna (x, y) z definičního oboru platí $-\frac{1}{2}\le\frac{xy}{x^2+y^2}\le\frac{1}{2}$. Pokud ověřím tuto nerovnost, bude zřejmé, že opravdu platí pro všechna $(x,y) \neq (0,0)$. Konečně platí, že součin funkce mající limitu rovnou nule a funkce omezené je roven nule.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x = 0$$

$$-\frac{1}{2}\le\frac{xy}{x^2+y^2}\le\frac{1}{2}$$

$$\to \begin{cases} -\frac{1}{2}\le\frac{xy}{x^2+y^2} \to -2xy \le x^2+y^2 \to 0\le x^2+2xy+y^2 \to 0 \le (x+y)^2 \\ \frac{xy}{x^2+y^2}\le\frac{1}{2} \to 2xy\le x^2+y^2 \to 0\le x^2-2xy+y^2 \to 0\le (x-y)^2 \end{cases}$$

$$\to f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ je omezená.}$$

$$\to \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\cdot \text{omezená funkce} = 0.$$

26. Příklad Vyšetřete, zda je funkce $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$ spojitá v bodě $[0,0]$.

Řešení Aby byla funkce f spojitá v bodě $[0,0]$, musí mít v tomto bodě limitu rovnu nule. Dokažme, že tomu tak je. Použijeme větu, která tvrdí, že limita součinu funkce jejíž limita je nula a ohraničené funkce je rovna rovněž nula. Zřejmě platí

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} x \cdot \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Přitom $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} x = 0$. Ukažme nyní že funkce $\frac{xy}{x^2+y^2}$ je ohraničená. Platí

$$\left(|x|-|y|\right)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2|xy| + y^2 \geq 0 \Rightarrow 2|xy| \leq x^2+y^2 \Rightarrow \frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Tedy funkce $\frac{xy}{x^2+y^2}$ je ohraničená.

27. Příklad Vyšetřete, zda je funkce $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^2}{x^8+y^4} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0] \end{cases}$ spojitá v bodě $[0,0]$.

Řešení Aby byla funkce f spojitá v bodě $[0,0]$, musí mít v tomto bodě limitu rovnu nule. Metoda postupných limit, metoda svazku přímek i metoda polárních souřadnic dávají výsledek nula. Metodou svazku parabol ukažme, že limita nula není a tedy zkoumaná funkce je v daném bodě nespojitá.

$$L^{**} = \lim_{x\to0,\,y=kx^2} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4} = \lim_{x\to0} \frac{x^4(kx^2)^2}{x^8+(kx^2)^4} = \lim_{x\to0} \frac{k^2x^8}{(1+k^4)x^8} = \frac{k^2}{1+k^4}.$$

Limita L^{**} závisí na parametru k. Odtud podle věty o jednoznačnosti limity plyne, že funkce f je v $[0,0]$ nespojitá.

(1g) **28. Příklad** Spočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$.

Řešení Do funkce nelze bezprostředně dosadit. Provedeme proto vhodnou algebraickou úpravu. Výraz rozšíříme.

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{(\sqrt{x^2+y^2+1}-1)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)} =$$

$$= \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{(x^2+y^2+1-1)}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

29. Příklad Spočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[2,2]} \dfrac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$.

Řešení Provedeme algebraickou úpravu funkce. Rozložíme čitatele i jmenovatele výrazu a provedeme pokrácení.

$$\lim_{[x,y]\to[2,2]} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} = \lim_{[x,y]\to[2,2]} \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)} = \lim_{[x,y]\to[2,2]} \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{4+4+4}{4(4+4)} = \frac{3}{8}.$$

30. Příklad Spočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$.

Na základě uvedených skutečností je zřejmé, že

$$\lim_{(x,y)\to(5,5)} (1 - y + x)^{\frac{4}{x-y}} = e^4.$$

- Při výpočtech se snažíme funkce různě algebraicky upravovat, abychom např. dostali součin dvou limit, kde jedna je limitou funkce jedné proměnné a druhá zjednodušená limita funkce více proměnných. Součin dostaneme následující úpravou:

  $$f(X) \cdot g(X) = \frac{f(X)}{\frac{1}{g(X)}}.$$

  U limity funkce jedné proměnné si můžeme vypomoci L'Hospitalovým pravidlem nebo jinými úpravami, které u funkcí více proměnných použít nemůžeme.

(1h) **Příklad 3.1.7.** Vypočítejte:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(1 + \frac{2}{|x| + |y| + |z|}\right)^{|x|+|y|+|z|}.$$

Řešení: Zavedeme substituci $t = |x| + |y| + |z|$ a použijeme větu 2.2.4. Zřejmě je $|x| + |y| + |z| \neq 0$ v ryzím okolí bodu $(0, 0, 0)$:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(1 + \frac{2}{|x| + |y| + |z|}\right)^{|x|+|y|+|z|} = \lim_{t\to 0} \left(1 + \frac{2}{t}\right)^t = \left|1^0\right| = \lim_{t\to 0} e^{t \ln\left(1+\frac{2}{t}\right)}.$$

Zde musíme vypočítat limitu výrazu v exponentu, a poté dosadíme výsledek zpět. Ve výpočtu této dílčí limity použijeme L'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{t\to 0} \left[t \ln\left(1 + \frac{2}{t}\right)\right] = |0 \cdot \infty| = \lim_{t\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{t}\right)}{\frac{1}{t}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{t\to 0} \frac{2}{1 + \frac{2}{t}} = \lim_{t\to 0} \frac{2t}{t+2} = 0.$$

Pokud dosadíme tento dílčí výsledek do předešlé limity, dostáváme:

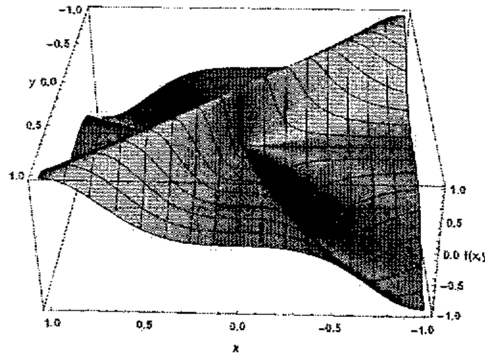
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(1 + \frac{2}{|x| + |y| + |z|}\right)^{|x|+|y|+|z|} = e^0 = 1.$$

- U úloh, u kterých potřebujeme ověřit neexistenci limity funkce, využíváme znalostí postupných limit z poznámky 2.2.2. Dále můžeme použít i substituce typu: $y = k(x - x_0) + y_0$ nebo $y = kx^2$, o kterých již byla řeč.

Příklad 3.1.8. Přesvědčte se o existenci nebo neexistenci následující limity:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - 2y}{3x + y}.$$

$$\rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^3y^3}{x^6+y^6} \text{ neexistuje.}$$



Obr. 6. Funkce $f(x,y) = \frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}$ má v počátku neobvyklý průběh, který značí, že limita v tomto bodě neexistuje.

V daném případě graf funkce $f(x,y)$ naznačuje, že by bylo třeba prozkoumat parciální funkce $f(x,x)$ a $f(x,0)$. Je $f(x,x) = 1$ pro $x \neq 0$, $f(x,x) = 0$ pro $x \neq 0$. V sebemenším okolí počátku se tedy vyskytují funkční hodnoty 1 i 0 a dvojná limita nemůže existovat.

Příklad č. 17 Zjistěte, zda existuje $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2\sin\frac{1}{x}+y^2}{x^2+y^2}$.

Řešení: Pokud vypočtu dvojnásobné limity této funkce, zjistím, že jedna z těchto limit neexistuje. Proto limita funkce $f(x,y) = \frac{x^2\sin\frac{1}{x}+y^2}{x^2+y^2}$ v bodě (0, 0) neexistuje.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+0}{x^2+0} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} = \text{neexistuje.}$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0\cdot\sin\frac{1}{0}+y^2}{0+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0}1 = 1.$$

Závěr: Je $\lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x} = 0$. Fakt, že první činitel má limitu nula, je zcela jasný a funkce $h(x) = \sin\frac{1}{x}$ je omezená. Proto

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+y^2}{x^2+y^2} \text{ neexistuje.}$$

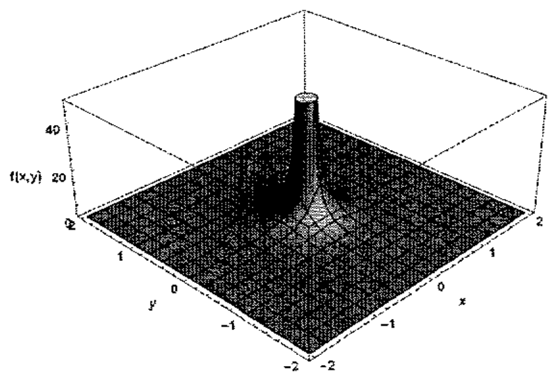
(1i)

Příklad č. 18 Vypočítejte limitu v bodu [0, 0] funkce $\frac{1}{x^2+y^2}$.

Řešení: Daná funkce má definiční obor $D(f) = E_2 \setminus \{[0,0]\}$, proto nelze postupovat stejně jako v příkladech, kde jen dosadím za proměnné. Při řešení této limity použiji převod z kartézských souřadnic do souřadnic polárních. Po této transformaci se ve jmenovateli objeví známý vzorec pro počítání s goniometrickými funkcemi $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Po uvedené úvaze je již zřejmé, že limita této funkce v daném bodě je rovna nekonečnu.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{x^2+y^2} = \left|\begin{matrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ \rho,\varphi \to 0 \end{matrix}\right| = \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \varphi\to 0}}\frac{1}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \varphi\to 0}}\frac{1}{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}$$

$$= \lim_{\rho\to 0^+}\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{0} = \infty.$$



Obr. 7. V okolí bodu (0, 0) funkce $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ roste nade všechny meze, to znamená, že limita je v tomto bodě rovna nekonečnu.

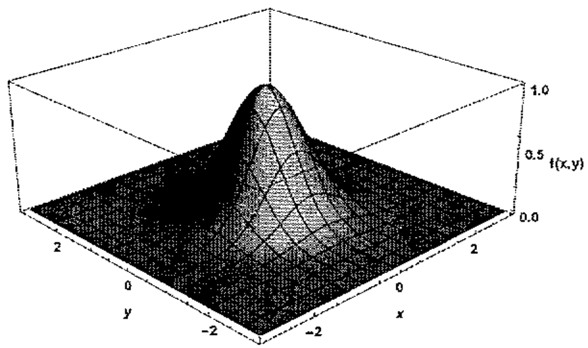
g) Dále je možné využít odhadu pomocí funkcí (posloupností), o jejichž průběhu v daném bodě mám představu a liší se jen málo od původní funkce. (Příklad č. 24, Příklad č. 25, Příklad č. 26, Příklad č. 27)

(2a)

Příklad č. 4 Určete $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{-x^2-y^2}$.

Řešení: Tuto limitu lze jednoduše vyřešit tím, že za neznámé x, y dosadím hromadný bod (0, 0), protože daná funkce je spojitá v celém prostoru E_2.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{-x^2-y^2} = e^{-0-0} = e^0 = 1.$$



Obr. 3. Graf funkce $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$, ze kterého je patrné, že v bodě (0, 0) má limitu rovnou hodnotě 1.

Příklad č. 5 Určete $\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{x+6}{3x-y+5}$.

Řešení: Funkce je v bodě (2, 1) definována a spojitá, proto mohu za neznámé x, y dosadit tento hromadný bod a limitu nalézt.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{x+6}{3x-y+5} = \frac{2+6}{3\cdot 2-1+5} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Příklad č. 6 Stanovte limitu funkce $f(x,y,z) = x^3y^2z$ v bodě (1, 2, 1).

Řešení: Funkci lze pomocí algebry limit rozdělit na součin spojitých funkcí $g(x,y,z) = x^3, h(x,y,z) = y^2, i(x,y,z) = z$. Poté lze dosadit limitní bod a limitu vypočítat.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2\\ z\to 1}} x^3y^2z = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2\\ z\to 1}} x^3 \cdot \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2\\ z\to 1}} y^2 \cdot \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2\\ z\to 1}} z = 1\cdot 4\cdot 1 = 4.$$

(2b)

Příklad č. 7 Přesvědčte se, že $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2} = 4$.

Řešení: Funkce $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2}$ není definována v bodě (0, 0) a podle „úzké" definice limity ještě na osách x, y. Podle této definice limita funkce $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2}$ v bodě (0, 0) neexistuje, protože v každém redukovaném okolí bodu (0, 0) existuje nekonečně mnoho bodů, ve kterých neexistuje funkční hodnota. Funkční hodnoty by se ale bez výjimek měly blížit k hodnotě limity. Nyní přistoupím k prozkoumání chování limity na množině $E_2 \setminus \{(0,0)\}$. Nejjednodušší možnost, jak dojít k výsledku, je rozšířit celý výraz „chytrou" jedničkou. Poté už snadnými algebraickými úpravami vypočítám limitu funkce $f(x,y)$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2}\cdot\frac{\sqrt{xy+4}+2}{\sqrt{xy+4}+2}$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy\cdot(\sqrt{xy+4}+2)}{xy+4-4} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy\cdot(\sqrt{xy+4}+2)}{xy} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (\sqrt{xy+4}+2)$$
$$= \sqrt{0\cdot 0+4}+2 = 4.$$

(2c)

Příklad č. 11 Rozhodněte, zda existuje $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x-y}$.

Řešení: Bod (0, 0) je bodem nespojitosti funkce $\frac{x+y}{x-y}$. Opět se budu snažit dokázat, že existuje taková křivka, že pokud se po ní budu blížit k bodu (0, 0), tak dostanu jinou hodnotu než při přibližování po jiné křivce. Tím dospěji k tomu, že funkce $\frac{x+y}{x-y}$ nemá v bodě (0, 0) limitu. Nejdříve substituuji rovnicí paraboly ($y = kx^2$). Po dosazení dostanu hodnotu 1. Limita proto může existovat, ale již při dosazení rovnice přímky ($y = kx$) se ve výsledku vyskytuje parametr k, takže je tato limita pro různé hodnoty směrnice různá. Proto $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x-y}$ neexistuje.

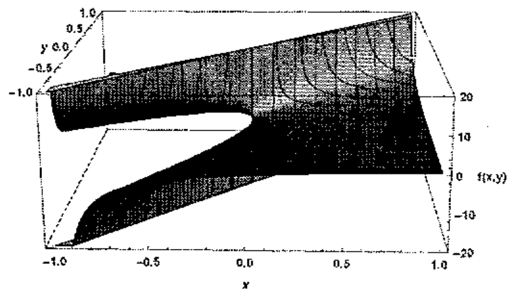
- Substituce $y = kx^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+kx^2}{x-kx^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x(1+kx)}{x(1-kx)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+kx}{1-kx} = 1.$$

- Substituce $y = kx$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+kx}{x-kx} = \lim_{x\to 0}\frac{x(1+k)}{x(1-k)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+k}{1-k} = \frac{1+k}{1-k}, \text{pro } k \neq 1.$$

$\rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x-y}$ neexistuje.



Obr. 5. Grafické znázornění funkce $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$. Zde je patrné, že limita v bodě (0, 0) nemůže existovat.

Příklad č. 12 Vypočtěte $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{x+y}$.

Řešení: Funkce $f(x,y)$ není definována nejen v bodě (0, 0), ale ani na přímce o rovnici $y = -x$. Z toho je jasné, že $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{x+y}$ neexistuje podle „úzké" definice limity.

Pokusím se zjistit, co se děje v těsném okolí přímky o rovnici $y = kx$, a také v těsném okolí paraboly o rovnici $y = kx^2$. V obou případech vyjde limita rovna nule, to znamená, že limita může existovat. Vyšetřím funkční hodnoty v bodech $(x, -x + x^2)$, $(x, -x - x^2), x \neq 0$. Tyto body volím proto, že se k přímce $y = -x$ přibližují velmi blízko, protože pro malé hodnoty x, je druhá mocnina tohoto čísla velmi malá. Pro bod $(x, -x + x^2)$ jsou pro $x \to 0$ v každém okolí bodu (0, 0) funkční hodnoty blízké číslu dva. Pokud se přibližuji k přímce $y = -x$ „zezdola" (bod $(x, -x - x^2)$), je vidět, že se funkční hodnoty v okolí bodu (0, 0) blíží k hodnotě -2. To znamená, že $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{x+y}$ počítaná vzhledem k definičnímu oboru této funkce neexistuje.

- Substituce $y = kx$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+k^2x^2}{x+kx} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+k^2)}{x(1+k)} = \lim_{x\to 0}\frac{x(1+k^2)}{1+k} = 0.$$

- Substituce $y = kx^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+k^2x^4}{x+kx^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+k^2x^2)}{x(1+kx)} = \lim_{x\to 0}\frac{x(1+k^2x^2)}{1+kx} = 0.$$

- Substituce $y = -x + x^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+(-x+x^2)^2}{x+(-x+x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^2-2x^3+x^4}{x^2} = \lim_{x\to 0}(2-2x+x^2) = 2-2\cdot 0+0$$
$$= 2.$$

- Substituce $y = -x - x^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+(-x-x^2)^2}{x+(-x-x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^2+2x^3+x^4}{-x^2} = \lim_{x\to 0}(-2-2x-x^2) = -2-2\cdot 0-0$$
$$= -2.$$

$$\rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{x+y} \text{ neexistuje.}$$

Příklad č. 13 Určete $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^6}$.

Řešení: Opět nejprve prostuduji, co se děje, kdybychom se přibližovali do počátku po přímkách a parabolách. Obě tyto limity vyjdou rovny nule. Když ale studuji křivku $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ (pro $x > 0$), po algebraických úpravách zjistím, že když postupuji do bodu (0, 0) po této křivce, nachází se na ní body s funkčními hodnotami rostoucími k nekonečnu. Dvojná limita proto existovat nebude.

- Substituce $y = kx$

$$\lim_{x\to 0}\frac{xk^2x^2}{x^2+k^6x^6} = \lim_{x\to 0}\frac{k^2x^3}{x^2(1+k^6x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{k^2x}{1+k^6x^4} = \frac{0}{1} = 0.$$

- Substituce $y = kx^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{xk^2x^4}{x^2+k^6x^{12}} = \lim_{x\to 0}\frac{k^2x^5}{x^2(1+k^6x^{10})} = \lim_{x\to 0}\frac{k^2x^3}{1+k^6x^{10}} = \frac{0}{1} = 0.$$

- Substituce $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{xx^{\frac{2}{3}}}{x^2+\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^6} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{5}{3}}}{2x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{0} = \infty.$$

$$\to \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^6} \text{ neexistuje.}$$

(2d)

Příklad č. 14 Určete $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x-5y}{7x+y}$.

Řešení: Definiční obor funkce je $E_2 \setminus \{[0,0]\}$. V tomto příkladu využiji okolnosti, že pokud se dvojnásobné limity nerovnají, tak limita dané funkce neexistuje. Vypočítám proto dvojnásobné limity, a protože jsou navzájem různé, mohu říci, že daná limita neexistuje.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-5y}{7x+y}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{7x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{7} = \frac{1}{7}.$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-5y}{7x+y}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{-5y}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{-5}{1} = -5.$$

$$\to \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x-5y}{7x+y} \text{ neexistuje.}$$

Příklad č. 15 Přesvědčte se, že pokud limita $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^2+7y^2}{5x-8y}$ existuje, je rovna nule.

Řešení: Nejprve určím dvojnásobné limity. Tyto limity se rovnají, limita proto může existovat. O existenci se přesvědčím substitucí $y = kx$. Limita po úpravách opět vyjde rovna nule. Proto $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^2+7y^2}{5x-8y}$ existuje a je rovna 0.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2x^2+7y^2}{5x-8y}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{5} = \frac{2\cdot 0}{5} = 0.$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+7y^2}{5x-8y}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{7y^2}{-8y} = \lim_{y\to 0}\frac{-7y}{8} = \frac{-7\cdot 0}{8} = 0.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2x^2+7y^2}{5x-8y} = |y = kx| \lim_{x\to 0}\frac{2x^2+7k^2x^2}{5x-8kx} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(2+7k^2)}{x(5-8k)} = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{2+7k^2}{5-8k} = 0.$$

Závěr: Pokud limita $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^2+7y^2}{5x-8y}$ existuje, platí

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2x^2+7y^2}{5x-8y} = 0.$$

Příklad č. 16 Určete $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}$.

Řešení: Po výpočtu dvojnásobných limit mohu tvrdit, že limita $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}$ může existovat, protože se tyto dvojnásobné limity rovnají, respektive obě jsou rovné 0. Dále zkusím do limity dosadit za proměnnou y svazek přímek ($y = kx$). Po algebraických úpravách ale vyjde tato limita závislá na směrnici k. Proto limita funkce $f(x,y) = \frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}$ v bodě (0, 0) neexistuje.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2x^3\cdot 0}{x^6+0} = 0.$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{2\cdot 0\cdot y^3}{0+y^6} = 0.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2x^3y^3}{x^6+y^6} = |y = kx| = \lim_{x\to 0}\frac{2x^3k^3x^3}{x^6+k^6x^6} = \lim_{x\to 0}\frac{2k^3x^6}{x^6(1+k^6)} = \lim_{x\to 0}\frac{2k^3}{1+k^6}$$

$$= \frac{2k^3}{1+k^6}.$$

kdy bod $[x_0, y_0]$ nazýváme pólem. Výhodou tohoto popisu je, že potom limitní přechod $[x, y] \to [x_0, y_0]$ lze nahradit limitním přechodem $\rho \to 0$. Uvedený postup ilustruje následující ukázka.

qa **Příklad 5** *Vypočtěte limitu* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

Protože v tomto případě funkční hodnota neexistuje (po dosazení je ve jmenovateli 0), použijeme transformaci do polárních souřadnic. Po nahrazení proměnných x, y má funkce tvar:

$$\frac{1-\cos^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1-\cos^2(\rho^2)}{\rho^4},$$

proto výpočet uvedené limity nahradíme výpočtem limity funkce jedné proměnné a při výpočtu můžeme použít aparát funkce jedné proměnné, v tomto případě L'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{1-\cos^2(\rho^2)}{\rho^4} = \lim_{\rho\to 0} \frac{4\rho\sin(\rho^2)\cos(\rho^2)}{4\rho^3}$$
$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\sin(\rho^2)}{\rho^2} \cdot \lim_{\rho\to 0} \cos(\rho^2) = 1$$

Poznamenejme, že v případě kdy výsledek závisí na φ limita neexistuje viz. ukázka 2.2. Dále je nutné uvědomit si, že limitní přechod pro $\rho \to 0$ musí obecně zohlednit i možnou závislost $\varphi(\rho)$, viz ukázka 2.3. Analogicky lze postupovat i u limity funkce 3 proměnných s využitím sférických souřadnic.

1.4 Parciální derivace, derivace ve směru

Pro funkce více proměnných se zavádí pojem parciální derivace, který využívá pojem derivace funkce jedné proměnné.

Definice 4 *Parciální derivací funkce* $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *v bodě* $A = (a_1, ..., a_n)$ *podle proměnné* x_i *rozumíme derivací funkce jedné proměnné* $y(x) = f(a_1, .., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n)$ *v bodě* a_i. *Tuto derivaci zapisujeme dvěma možnými způsoby:*

$$f'_{x_i}(A) \quad \textit{nebo} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(A).$$

Tedy všechny proměnné kromě proměnné x_i „zafixujeme",tj. nazíráme na ně při derivování jako na konstanty a derivujeme pouze podle proměnné x_i. Pro grafické vyjádření pojmu parciální derivace se omezíme pouze na funkce dvou proměnných v bodě $[x_0, y_0]$. V tomto případě „zafixování" proměnné x, resp. y značí omezit se na rovinu $x = x_0$, resp. $y = y_0$. Potom ve shodě s geometrickým významem derivace funkce jedné proměnné je derivace $f'_x(x_0, y_0)$ rovna směrnici tečny v bodě $[x_0, y_0]$ k průsečnici funkce $f(x, y)$ s rovinou $x = x_0$. Analogické úvahy platí i pro $f'_y(x_0, y_0)$. Situace je znázorněna na následujícím obrázku

Jestliže funkce $y = f(X)$ má definovanou parciální derivaci podle proměnné x_i v každém bodě množiny M,je funkce přiřazující každému bodu této množiny hodnotu této parciální derivace nazývána parciální derivací funkce $y = f(X)$ podle proměnné x_i, což

EVALUATING LIMITS WITH POLAR COORDINATES

PAOLO MASULLI

Let f be a function $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, such that $(0,0)$ is a limit point of D. We want to evaluate its limit for $(x,y) \to (0,0)$. One method is to use **polar coordinates** centered at the origin, via the substitution

$$\boxed{x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta.}$$

This way we get a new function $(r,\theta) \mapsto F(r,\theta)$ and evaluate its limit for $r \to 0^+$. In fact this corresponds to $(x,y) \to 0$ in f. But there is some extra condition to verify, to be able to conclude that the limit $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ is the same of $\lim_{r\to 0^+} F(r,\theta)$.

TEORIE

Theorem 1. *We have*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l,$$

(for l finite or $\pm\infty$) if and only if

$$\lim_{r\to 0^+} F(r,\theta) = l$$

***uniformly** in θ, for $\theta \in [0, 2\pi)$.*

"Uniformly" here means that $F(r,\theta)$ has to approach l as r approaches 0, independently of the value of $\theta \in [0,2\pi)$.

9b

Example 2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$. After passing to polar coordinates, we get

$$\lim_{r\to 0^+} r\cos^2\theta\sin\theta.$$

By the usual inequalities $-1 \le \cos\theta, \sin\theta \le 1$, we get that $-1 \le \cos^2\theta\sin\theta \le 1$, and so

$$-r \le r\cos^2\theta\sin\theta \le r.$$

Of course $\lim_{r\to 0} r = \lim_{r\to 0} -r = 0$, therefore, by the Squeeze Theorem, we have that

$$\lim_{r\to 0^+} r\cos^2\theta\sin\theta = 0,$$

and this holds independently of θ. Hence the wanted limit is also 0: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

Example 3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$. We do the usual substitution and get

$$\lim_{r\to 0^+} r\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + \sin\theta}.$$

In this case, the limit for $r \to 0^+$ clearly depends on θ. This leads us to suspect that the wanted limit of f does not exist. To check this, we take two different paths through $(0,0)$. If we consider the path $y = x^2$ we get

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2x^2}{x^4 + (x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

If we take another path, $y = x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2x}{x^4 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2(x^2+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0.$$

We have obtained different values, therefore the initial limit $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ does not exist.

Good to know:

- If, after the substitution, all r simplify, and we are left with an expression in θ, then the limit does not exist.
- As a rule of thumb, if we are left with θ only in the denominator, we suspect that the limit does not exist (see Example 3).
- If θ only occurs in the numerator, then we can often use inequalities to show that the limit $r \to 0$ is independent of θ (as in Example 2) and so compute $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

E-mail address: masulli@qgm.au.dk

Date: September 15, 2011.

Polar Coordinates and Limits

9c

Consider
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}.$$
You try different paths (such as all lines through the origin, $y = mx$, a parabola or two, etc.) and you notice you keep getting 0. This leads you to believe the limit exists and is 0. So you decide to try polar coordinates: $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, and take the limit as $r \to 0^+$. So for this one, you get

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0^+} \frac{r^4\cos^4(\theta)+r^4\sin^4(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)} &= \lim_{r\to 0^+} \frac{r^4(\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta))}{r^2} \\ &= \lim_{r\to 0^+} r^2(\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)).\end{aligned}$$

You want to say this limit is 0, and it is. But remember that we want to be 0 independent of θ. Implicitly, what you're using is that

$$0 \le |r^2(\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta))| \le r^2|\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)| \le r^2\cdot 2 = 2r^2.$$

Now as $r \to 0^+$, $2r^2 \to 0$, and so by squeeze theorem, $r^2(\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)) \to 0$ as well. So the limit is 0. The key is that the limit was of r^2 times something *bounded*.

9b

Here's another one for you:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}.$$
Again, you try some different paths, like lines and such, and you keep getting 0. So you want to prove this limit is 0. Well, you go to polar coordinates and you get

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{r^2(\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta))} = \lim_{r\to 0^+} r\cos^2(\theta)\sin(\theta).$$

We want to say this goes to 0. Can we do this? Yes, because we have r times something bounded. Indeed,
$$|\cos^2(\theta)\sin(\theta)| \le 1$$
since each of $\cos^2(\theta)$ and $\sin(\theta)$ is bounded by 1. Therefore

$$|r\cos^2(\theta)\sin(\theta)| \le |r| \to 0$$

as $r \to 0^+$. Therefore the whole limit is 0.

Now look at the limit we had today:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}.$$

and

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= r^3 \cos^3\theta + r^3 \sin^3\theta \\ &= r^3 \left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right) \end{aligned}$$

Also, saying $(x, y) \to (0, 0)$ *is equivalent to saying* $r \to 0^+$. *Hence, we have:*

9 d

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right)}{r^2} \\ &= \lim_{r\to 0^+} r\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

There is also an equivalent of the squeeze theorem. Suppose we are trying to find $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ given $f(x, y)$ and we suspect the limit might be L.

Theorem 208 *Suppose that* $|f(x, y) - L| \leq g(x, y)$ *for every* (x, y) *inside a disk centered at* (a, b), *except maybe at* (a, b). *If* $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = 0$ *then* $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$.

The difficulty with this theorem is that we must suspect what the limit is going to be. This is not too much of a problem. If you have tried a table of values and found that along all the paths the table allows you to investigate, the limit is the same, or if you have tried to compute the limit along different paths and have found the same value every time. Then, you might suspect the limit exists and is the common value you have found. It is this value you would try in the squeeze theorem. The second difficulty is finding the function g. This is done using approximation of the initial function f. How it is done depends on f. We illustrate how to do it with a few examples.

Example 209 *Find* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ *for* $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$.
The reader will check that computing this limit along various paths such as $x = 0$, $y = 0$, $y = x$ *gives* 0. *So, you might start suspecting the limit exists and is* 0. *We now use the squeeze theorem to try to prove it. In other words, we need to find a function* $g(x, y)$ *such that* $|f(x, y) - 0| \leq g(x, y)$ *and* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0$.