26. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Heine)**.** Nechť (X, ρ), (Y, σ) jsou metrické prostory, $f : X \to Y$, $M \subset X$, $a \in M'$, $b \in Y$. Pak

$$\lim_{x \to a, x \in M} f(x) = b$$

právě tehdy, když: pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset M \setminus \{a\}$ platí

$$x_n \to a \implies f(x_n) \to b.$$

Věta 2 (Aritmetika limit)**.** Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $f, g : X \to \mathbb{R}$, $M \subset X$, $a \in M'$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nechť $\lim_{x \to a, x \in M} f(x) = \alpha$ a $\lim_{x \to a, x \in M} g(x) = \beta$. Pak

1. $\lim_{x \to a, x \in M} f(x) + g(x) = \alpha + \beta$
2. $\lim_{x \to a, x \in M} f(x) \cdot g(x) = \alpha \cdot \beta$
3. $\lim_{x \to a, x \in M} f(x)/g(x) = \alpha/\beta$, pokud $\beta \neq 0$.

Věta 3 (O limitě složeného zobrazení)**.** Nechť (X, ρ), (Y, σ) a (Z, τ) jsou metrické prostory, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Nechť $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ a nechť platí:

1. $\exists \delta > 0$: $f((P(a, \delta) \cap A) \subset B$
2. $\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = b$
3. $\lim_{y \to b, y \in B} g(y) = c$

Nechť platí jedna z podmínek

(P) $\exists \eta > 0$: $b \notin f((P(a, \delta) \cap A)$

(S) zobrazení g je spojité v bodě b vzhledem k B.

Pak

$$\lim_{x \to a, x \in A} g(f(x)) = c.$$

Věta 4 (2 policajti)**.** Nechť existuje prstencové okolí $P(x_0, y_0)$ takové, že na $P(x_0, y_0)$ platí

$$h(x, y) \leq f(x, y) \leq g(x, y).$$

Nechť dále

$$\lim_{[x,y] \to [x_0, y_0]} h(x, y) = L \lim_{[x,y] \to [x_0, y_0]} g(x, y),$$

$L \in \mathbb{R}$. Pak také existuje

$$\lim_{[x,y] \to [x_0, y_0]} f(x, y) = L.$$

Poznámka 5 (O dvojnásobné limitě)**.** Pokud existují limity $\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y) = L_1$ a $\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y) = L_2$ a $L_1 \neq L_2$, tak limita $\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y)$ **neexistuje. Opačné tvrzení neplatí.**

Věta 6. Polární souřadnice zavedeme vztahy $x = x_0 + r\cos\varphi$, $y = y_0 + r\sin\varphi$, kde $r > 0$ a $\varphi \in [0; 2\pi)$.

Pak pokud $L \in \mathbb{R}$ a existuje nezáporná funkce $g(r)$ taková, že

$$\lim_{r\to 0+} g(r) = 0 \qquad \text{a} \qquad |f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) - L| \leq g(r)$$

pro každé r z nějakého pravého prstencového okolí 0 a každé $\varphi \in [0; 2\pi)$, pak

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = L.$$

Speciálně pokud po transformaci dostaneme $f(x,y) = g(r)h(\varphi)$, kde $\lim_{r\to 0+} g(r) = 0$ a $h(\varphi)$ je omezená pro $\varphi \in [0; 2\pi)$, pak

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = 0.$$

Příklady

1. Spočtěte limity funkcí více proměnných nebo ukažte, že neexistují

(a)
$$\lim_{[x,y]\to[2,4]} \frac{x+2y}{2x+y}$$

(b)
$$\lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{xy+2x+y+2}{xy^2+y^2+x+1}$$

(c)
$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

(d)
$$\lim_{[x,y]\to[1,2]} \frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}$$

(e)
$$\lim_{[x,y]\to[2,0]} \frac{\tan xy}{y}$$

(f)
$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} x\frac{xy}{x^2+y^2}$$

(g)
$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$$

(h)
$$\lim_{[x,y,z]\to[0,0,0]} \left(1+\frac{2}{|x|+|y|+|z|}\right)^{|x|+|y|+|z|}$$

(i)
$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{x^2+y^2}$$

2. Spočtěte limity funkcí více proměnných nebo ukažte, že neexistují

(a)
$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} e^{-x^2-y^2}$$

(b)
$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy}{\sqrt{xy+4}-2}$$

(c)
$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x+y}{x-y}$$

(d)
$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x-5y}{7x+y}$$

(e)
$$\lim_{[x,y,z]\to[0,0,0]} \frac{\sin xyz}{x}$$

(f)
$$\lim_{[x,y,z]\to[0,0,0]} x\sin\frac{1}{x-y+z}$$

3. Spočtěte limity transformací do polárních souřadnic

(a)
$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1-\cos^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

(b)
$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

(c)
$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$$

(d)
$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

(e)
$$\lim_{[x,y,z]\to[0,0,0]} \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$$