Příklad 5.6. Uvažujme funkci $z = x^4y^6\cos(x^3 + y^3)$. Navrhněte, jak by mohly vypadat její vnitřní složky a vnější složka, pokud bychom tuto funkci chtěli chápat jako složenou funkci.

Řešení. Ve světle úvah prováděných v předcházejícím příkladě můžeme např. položit

$$u = g(x,y) = x^4y^6 \qquad v = h(x,y) = x^3 + y^3.$$

Odtud dostáváme, že vnější složkou je funkce $z = f(u,v) = u\cos v$.

Můžeme ale také zvolit

$$u = g(x,y) = x^2y^3 \qquad v = h(x,y) = x^3 + y^3.$$

Pak by vnější složka složené funkce měla tvar $z = f(u,v) = u^2\cos v$.

Jaké další možnosti vás napadají?

1a

Příklad 5.7. Vypočtěte derivaci složené funkce $z = u\sqrt{1+v^2}$, kde $u = \mathrm{e}^{2x}$, $v = \mathrm{e}^{-x}$.

Řešení. V tomto případě je proměnná z funkcí proměnné x. Máme tedy vypočítat obyčejnou derivaci funkce jedné proměnné pomocí pravidla pro derivování složené funkce. Využijeme vztahu

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

který v našem případě dává

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1+v^2}\cdot 2\mathrm{e}^{2x} + \frac{uv}{\sqrt{1+v^2}}\cdot(-\mathrm{e}^{-x}) =$$

$$= \frac{(1+\mathrm{e}^{-2x})2\mathrm{e}^{2x} - 1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2x}}} = \frac{2\mathrm{e}^{2x}+1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2x}}}.$$

1b

Příklad 5.8. Vypočtěte derivaci složené funkce $z = uv^2w^3$, kde $u = \sin x$, $v = -\cos x$, $w = \mathrm{e}^x$.

Řešení. Opět se jedná o výpočet obyčejné derivace funkce jedné proměnné pomocí pravidla pro derivování složené funkce. Využijeme vztahu

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x},$$

který nyní dává

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = v^2w^3 \cdot \cos x + 2uvw^3 \cdot \sin x + 3uv^2w^2 \cdot \mathrm{e}^x =$$

$$= \mathrm{e}^{3x} \cos x(\cos^2 x - 2\sin^2 x + 3\sin x \cos x) = \mathrm{e}^{3x} \cos x(\cos^2 x - 2\sin^2 x + \frac{3}{2}\sin 2x).$$

1c

Příklad 5.9. Vypočtěte parciální derivace složené funkce $z = \sin u \cos v$, kde $u = (x-y)^2$, $v = x^2 - y^2$ podle proměnných x a y.

Řešení. Pro výpočet využijeme vztahů ve větě 5.3, podle kterých máme nejdříve

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

a odtud

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos u \cos v \cdot 2(x-y) + (-\sin u \sin v) \cdot 2x =$$

$$= 2x\cos(u+v) - 2y \cos u \cos v.$$

Parciální derivaci podle y vypočteme podle vtahu

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos u \cos v \cdot (-2)(x-y) + (-\sin u \sin v) \cdot (-2y) =$$

$$= 2y\cos(u-v) - 2x \cos u \cos v.$$

1d

Příklad 5.10. Vypočtěte parciální derivace složené funkce $w = yz^2 - x^3$, kde $x = \mathrm{e}^{r-t}$, $y = \ln(r+2s+3t)$ a $z = \sqrt{rs+t}$ podle proměnných r, s a t.

Řešení. Pro výpočet využijeme vztahů ve větě 5.4, kdy $m = n = 3$. Máme

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = -3x^2 \cdot \mathrm{e}^{r-t} + z^2 \cdot \left(\frac{1}{r+2s+3t}\right) +$$

1d

$$+2yz \cdot \left(\frac{s}{2\sqrt{rs+t}}\right) = -3\mathrm{e}^{3(r-t)} + \frac{rs+t}{r+2s+3t} + s\ln(r+2s+3t).$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = -3x^2 \cdot 0 + z^2 \cdot \left(\frac{2}{r+2s+3t}\right) +$$

$$+2yz \cdot \left(\frac{r}{2\sqrt{rs+t}}\right) = \frac{2(rs+t)}{r+2s+3t} + r\ln(r+2s+3t).$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = -3x^2 \cdot (-\mathrm{e}^{r-t}) + z^2 \cdot \left(\frac{3}{r+2s+3t}\right) +$$

$$+2yz \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{rs+t}}\right) = 3\mathrm{e}^{3(r-t)} + \frac{3(rs+t)}{r+2s+3t} + \ln(r+2s+3t).$$

Příklad 5.11. Je dáno $g(x,y) = f(x^2-y^2, y^2-x^2)$, přičemž o funkci f předpokládáme, že je diferencovatelná. Ukažte, že funkce g vyhovuje rovnici

$$y\frac{\partial g}{\partial x} + x\frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

Řešení. Položme $u = x^2 - y^2$ a $v = y^2 - x^2$. Potom na základě pravidla pro derivování složené funkce obdržíme

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v}(-2x),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot (-2y) + \frac{\partial f}{\partial v}(2y).$$

Odtud vyplývá

$$y\frac{\partial g}{\partial x} + x\frac{\partial g}{\partial y} = \left(2xy\frac{\partial f}{\partial u} - 2xy\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \left(-2xy\frac{\partial f}{\partial u} + 2xy\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0.$$

Příklad 5.12. Je-li dán tlak v kilopascalech, objem v litrech a teplota ve stupních Kelvina jednoho molu ideálního plynu, pak jsou tyto tři veličiny svázány vztahem $PV = 8{,}31T$. Určete, jak rychle se mění v daném okamžiku

11. Derivování složených funkcí

V tomto oddíle si ukážeme základní metody použití věty o derivaci složené funkce více proměnných. Začněme tím, že připomeneme znění této věty (viz [D2, Věta 189]).

Nechť $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ jsou funkce s proměnných, které mají v bodě $a \in \mathbb{R}^s$ totální diferenciál. Položme $b = (\varphi_1(a), \dots, \varphi_r(a))$. Je-li f funkce r proměnných, která má totální diferenciál v bodě b, potom funkce (s proměnných) definovaná předpisem $F(x) = f(\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x))$ má totální diferenciál v bodě a a pro $j = 1, \dots, s$ platí $\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_i}(b) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a)$.

§73. Nejjednodušším použitím je **přímá aplikace** na výpočet parciálních derivací složené funkce (případně též derivací ve směru či totálního diferenciálu).

(2) <u>Příklad</u> Nechť funkce f má vlastní derivaci v každém bodě $\mathbb{R}$. Položme $g(x,y) = f(x^2+y^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Vyjádřete parciální derivace prvního řádu funkce g pomocí derivace funkce f.

Řešení. Protože f má vlastní derivaci, má i totální diferenciál v každém bodě $\mathbb{R}$. Navíc funkce x^2+y^2 má zřejmě spojité parciální derivace prvního řádu (uvědomte si, že funkce $(x,y) \mapsto 2x$ a $(x,y) \mapsto 2y$ jsou spojité na $\mathbb{R}^2$), a tedy má totální diferenciál v každém bodě (viz §54). Proto má g totální diferenciál a platí $\frac{\partial g}{\partial x} = f'(x^2+y^2) \cdot 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y} = f'(x^2+y^2) \cdot 2y$ na celém $\mathbb{R}^2$. ∎

(3) <u>Příklad</u> Nechť funkce $f = f(u,v)$ je třídy C^2 na okolí bodu $(a+b, a-b)$. Položme $g(x,y) = f(x+y, x-y)$. Vyjádřete $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a,b)$ pomocí derivací funkce f.

Řešení. Funkce $x+y$ i $x-y$ jsou třídy C^1 na $\mathbb{R}^2$, mají tedy totální diferenciál v každém bodě. Funkce f má totální diferenciál na okolí bodu $(a+b, a-b)$, platí tedy

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(x+y, x-y) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y, x-y) \cdot 1 = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(x+y, x-y) + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y, x-y)\end{aligned}$$

na okolí bodu (a,b). Dále funkce $\frac{\partial f}{\partial u}$ a $\frac{\partial f}{\partial v}$ mají totální diferenciál v bodě $(a+b, a-b)$ (protože mají spojité parciální derivace prvního řádu na okolí tohoto bodu), a tedy

3

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(a+b,a-b) - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a+b,a-b)+ \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(a+b,a-b) - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(a+b,a-b) = \\ = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(a+b,a-b) - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(a+b,a-b).\end{aligned}$$

■

<u>Příklad</u> Nechť $f = f(t,u)$ má totální diferenciál v bodě $(1,1)$ a splňuje $f(1,1) = 1$. Spočtěte $\frac{\partial g}{\partial t}(1,1)$ pomocí derivací funkce f, je-li

$$g(t,u) = f(f(t,u)^{f(u,t)}, f(u,t)^{f(t,u)}).$$

Řešení. Funkce $(t,u) \mapsto f(t,u)$ má totální diferenciál v bodě $(1,1)$ podle zadání, funkce $(t,u) \mapsto f(u,t)$ má totální diferenciál v bodě $(1,1)$ podle výše uvedené věty (aplikované pro $\varphi_1(t,u) = u$ a $\varphi_2(t,u) = t$). Tedy i funkce $f(t,u)^{f(u,t)}$ a $f(u,t)^{f(t,u)}$ mají totální diferenciál v bodě $(1,1)$ (užíváme definici obecné mocniny, podle níž $f(t,u)^{f(u,t)} = \exp(f(u,t)\log f(t,u))$ a podobně v druhém případě). Protože navíc $f(1,1)^{f(1,1)} = 1$, má podle výše uvedené věty totální diferenciál v bodě $(1,1)$ i funkce g. Navíc platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial t}(1,1) = \Bigg(\frac{\partial f}{\partial t}(f(t,u)^{f(u,t)}, f(u,t)^{f(t,u)}) \cdot f(t,u)^{f(u,t)} \cdot \\ \cdot (\frac{\partial f}{\partial u}(u,t)\log f(t,u) + \frac{f(u,t)}{f(t,u)} \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(t,u))+ \\ + \frac{\partial f}{\partial u}(f(t,u)^{f(u,t)}, f(u,t)^{f(t,u)}) \cdot \\ \cdot f(u,t)^{f(t,u)} \cdot (\frac{\partial f}{\partial t}(t,u)\log f(u,t) + \frac{f(t,u)}{f(u,t)} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(u,t)) \Bigg)_{\substack{t=1\\u=1}} \\ = (\frac{\partial f}{\partial t}(1,1))^2 + (\frac{\partial f}{\partial u}(1,1))^2.\end{aligned}$$

Značení použité v tomto výpočtu může být poněkud matoucí. Uvádíme ho proto, že se s takovým značením čtenář může setkat i jinde, a je tedy užitečné mu rozumět. Nejasnosti mohou vzniknout z toho, že písmena t, u se používají ve dvou různých významech. Jednak označují první a druhou proměnnou funkce f (a také g), tedy $\frac{\partial f}{\partial t}$ znamená derivace funkce f podle první proměnné, $\frac{\partial f}{\partial u}$ derivaci funkce f podle druhé proměnné. A potom označují čísla, která do výrazu dosazujeme. Takže $\frac{\partial f}{\partial u}(u,t)$ označuje derivaci funkce f podle druhé proměnné v bodě (u,t) (čili $\partial_2 f(u,t)$), nikoli derivaci výrazu $f(u,t)$ podle u (tu bychom značili $\frac{\partial}{\partial u}(f(u,t))$ a

Functions of two variables, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

The chain rule for change of coordinates in a plane.

Theorem

If the functions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *and the change of coordinate functions* $x, y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *are differentiable, with* $x(t,s)$ *and* $y(t,s)$, *then the function* $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *given by the composition* $\hat{f}(t,s) = f\big(x(t,s), y(t,s)\big)$ *is differentiable and holds*

$$\hat{f}_t = f_x\, x_t + f_y\, y_t$$
$$\hat{f}_s = f_x\, x_s + f_y\, y_s.$$

Remark: We denote by $f(x,y)$ the function values in the coordinates (x,y), while we denote by $\hat{f}(t,s)$ are the function values in the coordinates (t,s).

4

Functions of two variables, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

The chain rule for change of coordinates in a plane.

Example

Given the function $f(x,y) = x^2 + 3y^2$, in Cartesian coordinates (x,y), find the derivatives of f in polar coordinates (r,θ).

Solution: The relation between Cartesian and polar coordinates is

$$x(r,\theta) = r\cos(\theta), \qquad y(r,\theta) = r\sin(\theta).$$

The function f in polar coordinates is $\hat{f}(r,\theta) = f(x(r,\theta), y(r,\theta))$.
The chain rule says $\hat{f}_r = f_x\, x_r + f_y\, y_r$ and $\hat{f}_\theta = f_x\, x_\theta + f_y\, y_\theta$, hence

$$\hat{f}_r = 2x\cos(\theta) + 6y\sin(\theta) \;\Rightarrow\; \hat{f}_r = 2r\cos^2(\theta) + 6r\sin^2(\theta).$$

$$\hat{f}_\theta = -2xr\sin(\theta) + 6yr\cos(\theta),$$

$$\hat{f}_\theta = -2r^2\cos(\theta)\sin(\theta) + 6r^2\cos(\theta)\sin(\theta). \qquad \triangleleft$$

♣ **Example #1**

Q: The elevation of a hill is described by

5

$$z = z(x, y) = \exp\left\{-(x^2 + y^2)\right\} \ . \tag{3.20}$$

By deriving the function in plane polars, find $\partial z/\partial r$ and $\partial z/\partial \phi$ and comment on their values. Determine the value of r where the hill is steepest.

A: Plane polars are (r, ϕ) where $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$.

This is old in terms of new, and we know the function, ⇒CASE 1A.

The hill is therefore

$$z = \exp\left\{-r^2\right\} \ . \tag{3.21}$$

So

$$\frac{\partial z}{\partial r} = -2r\exp\left\{-r^2\right\} \quad \text{and} \quad \frac{\partial z}{\partial \phi} = 0 \ . \tag{3.22}$$

The change of height is all in the radial direction. $\partial z/\partial \phi = 0$ means that if you move at constant r (that is, "round" the hill) you will not change height at all.

The gradient is a function of r alone, so we can find the total derivative

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\text{Slope} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(-2r\exp\left\{-r^2\right\}\right) = (-2 + 4r^2)\exp\left\{-r^2\right\} \tag{3.23}$$

This is zero when $r = 1/\sqrt{2}$ and Slope $= -\sqrt{2}\exp\{-1/2\}$.

♣ **Example #2.**

Here is one that can be solved using all approaches.

Q: Find the partial derivatives $\partial f/\partial u$ and $\partial f/\partial v$ when

$$f = f(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{and} \quad u = (x + y) \quad v = (x - y) \ . \tag{3.24}$$

A: Transformation is new in terms of old. ⇒CASE 2.

Try CASE 2A: Can we invert the transformation? Yes! Adding then substracting we find

$$x = \frac{1}{2}(u + v) \quad y = \frac{1}{2}(u - v) \ . \tag{3.25}$$

Now goto CASE 1. We know the function, ⇒**CASE 1A.**

$$f = F(u, v) = x^2 - y^2 = \frac{1}{4}\left((u + v)^2 - (u - v)^2\right) = uv \tag{3.26}$$

je podle věty o derivaci součinu a věty o derivaci složené funkce

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= nx^{n-1}f + x^n\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = nx^{n-1}f - \frac{yx^{n-2}}{a}\frac{\partial f}{\partial u} \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= x^n\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{x^{n-1}}{a}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x^n z}{by^2}\frac{\partial f}{\partial v} \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= x^n\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{x^n}{by}\frac{\partial f}{\partial v}
\end{aligned}$$

Po dosazení do dané rovnice dostaneme

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} &= x\left(nx^{n-1}f - \frac{yx^{n-2}}{a}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + y\left(\frac{x^{n-1}}{a}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x^n z}{by^2}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{x^n z}{by}\frac{\partial f}{\partial v} = \\
&= nx^n f(u,v) = nF(x,y,z)\,.
\end{aligned}$$

6

Ukažte, že funkce $F(x,y,z) = \dfrac{xy}{z}\ln x + xf\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right)$, kde f je spojitě diferencovatelná funkce, vyhovuje vztahu

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = F + \frac{xy}{z}$$

Řešení: Označme $u = \dfrac{y}{x}$ a $v = \dfrac{z}{x}$. Pak je podle věty o derivaci složené funkce

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\frac{\partial f}{\partial u} - -\frac{z}{x^2}\frac{\partial f}{\partial v}\,, \qquad \frac{\partial f(u,v)}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial u}\,, \qquad \frac{\partial f(u,v)}{\partial z} = \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial v}\,.$$

Z toho dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{y\ln x}{z} + \frac{y}{z} + f - \frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial u} - -\frac{z}{x}\frac{\partial f}{\partial v} \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{x\ln x}{z} + \frac{\partial f}{\partial u} \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= -\frac{xy\ln x}{z^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\,.
\end{aligned}$$

Když dosadíme tyto derivace do dané rovnice, dostaneme

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} &= x\left(\frac{y\ln x}{z} + \frac{y}{z} + f - \frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{z}{x}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + y\left(\frac{x\ln x}{z} + \frac{\partial f}{\partial u}\right) + z\left(-\frac{xy\ln x}{z^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \\
&= \frac{xy}{z} + \frac{xy\ln x}{z} + xf(u,v) = \frac{xy}{z} + F(x,y,z)\,.
\end{aligned}$$

Napište Taylorův rozvoj funkce

$$f(x,y) = \mathrm{e}^x\ln(1+y)$$

v bodě $(0,0)$.

Řešení: Protože je $\dfrac{\mathrm{d}^k \mathrm{e}^x}{\mathrm{d}x^k} = \mathrm{e}^x$ a pro $\ell \geq 1$ platí (dokáže se indukcí)

$$\frac{\mathrm{d}^\ell \ln(1+y)}{\mathrm{d}y^\ell} = \frac{(-1)^{\ell-1}(\ell-1)!}{(1+y)^\ell}\,,$$

je

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,y) = \mathrm{e}^x \ln(1+y)\,, \qquad \frac{\partial^{k+\ell} f}{\partial x^k \partial y^\ell}(x,y) = \mathrm{e}^x \, \frac{(-1)^{\ell-1}(\ell-1)!}{(1+y)^\ell} \quad \text{pro } \ \ell > 0\,.$$

Z toho dostanu

$$\frac{\partial^{k+\ell} f}{\partial x^k \partial y^\ell}(0,0) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ \ell = 0\,, \\ (-1)^{\ell-1}(\ell-1)! & \text{pro } \ \ell > 0\,. \end{cases}$$

Tedy n–tý diferenciál funkce $f(x,y)$ v bodě $[0;0]$ je

$$\mathrm{d}^n f(0,0;x,y) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-\ell} \partial y^\ell}(0,0)\, x^{n-\ell} y^\ell = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{n!}{\ell \cdot (n-\ell)!}\, x^{n-\ell} y^\ell$$

A Taylorův rozvoj funkce $f(x,y)$ v bodě $[0;0]$ je podle definice

$$T_f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, \mathrm{d}^n f(0,0;x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell \cdot (n-\ell)!}\, x^{n-\ell} y^\ell = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell \cdot k!}\, x^k y^\ell\,.$$

7

Nechť funkce f a g mají spojité derivace druhého řádu. Dokažte, že funkce $F(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0\,.$$

Řešení: Máme najít druhé derivace funkce $F(x,y) = xf(u) + yg(u)$, kde $u = x + y$. Protože

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 1\,,$$

jsou podle věty o derivaci složené funkce první derivace rovny

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f + xf' + yg'\,, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = xf' + g + yg'$$

a pro druhé derivace snadno dostaneme

$$\frac{\partial^F}{\partial x^2} = 2f' + xf'' + yg''\,, \quad \frac{\partial^F}{\partial x \partial y} = f' + xf'' + g' + yg''\,, \quad \frac{\partial^F}{\partial y^2} = xf'' + 2g' + yg''$$

A po dosazení do dané rovnice získáme

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2f' + xf'' + yg'' - 2\big(f' + xf'' + g' + yg''\big) + xf'' + 2g' + yg'' = 0\,.$$

Laplaceův operátor

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

v $\mathbb{R}^n$ vyjádřete pro funkci, která závisí pouze na vzdálenosti bodu $x = (x_1, \ldots, x_n)$ od počátku souřadnicové soustavy, tj.

$$f\,(x_1, \ldots x_n) = F(r)\,, \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2, \ldots + x_n^2}\,.$$

Řešení: Jedná se o derivaci složené funkce. Protože pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ je

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{x_k}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{x_k}{r}\,,$$

platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{x_k}{r}\, F'\,.$$

Pro druhou derivaci dostanu (počítám ji jako součin tří funkcí)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(x_k\, \frac{1}{r}\, F'\right) = \frac{F'}{r} - \frac{x_k^2}{r^3}\, F' + \frac{x_k^2}{r^2}\, F''\,.$$

Tedy hledaný Laplaceův operátor je

$$\triangle f = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{F'}{r} - \frac{x_k^2}{r^3}\, F' + \frac{x_k^2}{r^2}\, F''\right) = \frac{nF'}{r} - \frac{r^2}{r^3}\, F' + \frac{r^2}{r^2}\, F'' = F'' + \frac{n-1}{r}\, F'\,.$$

8

Výraz

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

přetransformujte pro funkci $F(u, v) = f(x, y)$, kde

$$u = y\,, \quad v = \frac{y}{x}\,.$$

Řešení: Musíme najít druhé parciální derivace složené funkce. Podle věty o derivování složených funkcí platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\frac{\partial F}{\partial v}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{x}\frac{\partial F}{\partial v}$$

Podobně zjistíme, že druhé derivace jsou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{2y}{x^3}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{x}\frac{\partial F}{\partial v}\right) = -\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial F}{\partial v}$$

Když tyto derivace dosadíme do dané rovnice, dostaneme

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x\left(\frac{2y}{x^3}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) + y\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial F}{\partial v}\right) =$$
$$= \frac{y}{x^2}\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$$

Ze vztahů $u = y$ a $v = \dfrac{y}{x}$ plyne $x = \dfrac{u}{v}$ a $y = u$. jestliže dosadíme dostaneme výsledek

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{v^2}{u}\frac{\partial F}{\partial v} - v^2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\,.$$

podle věty z počátku tohoto oddílu by se rovnala $\frac{\partial f}{\partial t}(u,t) = \partial_1 f(u,t)$). Pro lepší ozřejmení výpočtu ho uvedeme ještě jednou s jiným značením. Pišme $g(x,y) = f(f(x,y)^{f(y,x)}, f(y,x)^{f(x,y)})$ a počítejme

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = \Bigg(& \frac{\partial f}{\partial t}(f(x,y)^{f(y,x)}, f(y,x)^{f(x,y)}) \cdot f(x,y)^{f(y,x)} \cdot \\ & \cdot \big(\frac{\partial f}{\partial u}(y,x)\log f(x,y) + \frac{f(y,x)}{f(x,y)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,y)\big) + \\ + & \frac{\partial f}{\partial u}(f(x,y)^{f(y,x)}, f(y,x)^{f(x,y)}) \cdot \\ & \cdot f(y,x)^{f(x,y)} \cdot \big(\frac{\partial f}{\partial t}(x,y)\log f(y,x) + \frac{f(x,y)}{f(y,x)}\frac{\partial f}{\partial u}(y,x)\big)\Bigg)_{\substack{x=1\\y=1}} \\ = & \big(\frac{\partial f}{\partial t}(1,1)\big)^2 + \big(\frac{\partial f}{\partial u}(1,1)\big)^2.\end{aligned}$$

■

9

§74. Další možností je tzv. **nepřímá aplikace**. Spočívá v tom, že známé hodnoty vyjádříme pomocí neznámých, a tyto neznámé pak vypočítáme jako řešení vzniklé rovnice případně soustavy rovnic.

Příklad Nechť $u = u(x,y)$ je funkce třídy C^1 na $\mathbb{R}^2$ splňující $u(x,x^2) = 1$ a $\frac{\partial u}{\partial x}(x,x^2) = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Spočtěte $\frac{\partial u}{\partial y}(x,x^2)$.

Řešení. Opět si uvědomme, že $\frac{\partial u}{\partial x}(x,x^2)$ znamená parciální derivaci funkce u podle první proměnné v bodě (x,x^2), tudíž uvedená rovnost znamená totéž, jako $\frac{\partial u}{\partial x}(a,a^2) = a$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Protože funkce $(x,y) \mapsto x$ i $(x,y) \mapsto x^2$ mají všude totální diferenciál, lze derivaci funkce $\varphi(x) = u(x,x^2)$ počítat podle výše uvedené věty, tedy $\varphi'(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,x^2) \cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial y}(x,x^2) \cdot 2x$. Zároveň však víme, že funkce φ je konstantně rovna jedné, a tedy $\varphi'(x) = 0$. Platí tedy $\frac{\partial u}{\partial x}(x,x^2) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,x^2) \cdot 2x = 0$. Po dosazení za $\frac{\partial u}{\partial x}(x,x^2)$ dostáváme $\frac{\partial u}{\partial y}(x,x^2) = -1/2$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Protože však u je třídy C^1, je $\frac{\partial u}{\partial y}$ spojitá, a tedy i $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = -1/2$. ■

Příklad Nechť funkce f má totální diferenciál v bodě $(1,0)$, funkce g je definována předpisem $g(u,v) = f(e^u \cos v, e^u \sin v)$ a $\frac{\partial g}{\partial u}(0,0) = 7$, $\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = -1$. Spočtěte parciální derivace funkce f v bodě $(1,0)$.

Řešení. Podle věty z počátku oddílu (aplikované pro bod $a = (0,0)$ a zobrazení $\varphi(u,v) = (e^u \cos v, e^u \sin v)$) platí
$\frac{\partial g}{\partial u}(0,0) = (\partial_1 f(e^u \cos v, e^u \sin v) \cdot e^u \cos v + \partial_2 f(e^u \cos v, e^u \sin v) \cdot e^u \sin v)_{u=v=0}$ a
$\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = (\partial_1 f(e^u \cos v, e^u \sin v) \cdot (-e^u \sin v) + \partial_2 f(e^u \cos v, e^u \sin v) \cdot e^u \cos v)_{u=v=0}$.