25. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1. Nechť L je totální diferenciál funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě a. Pak existují parciální derivace

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_n}$$

a pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ platí

$$L(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} h_i.$$

Věta 2. Nechť funkce $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mají v bodě a totální diferenciál a funkce $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ má v bodě $b = (f_1(a), \dots, f_k(a))$ totální diferenciál. Definujme funkci $h(x) = g(f_1(x), \dots, f_k(x))$. Pak h má v a totální diferenciál a pro $i = 1, \dots, n$ platí

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial y_j}(b) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a).$$

Příklady

Předpokládejme, že jsou splněny všechny nutné předpoklady (speciálně funkce jsou diferencovatelné a mají záměnné smíšené derivace).

1. Vypočtěte derivace složených funkcí
   (a) $z = u\sqrt{1+v^3}$, kde $u = e^{2x}$ a $v = e^{-x}$
   (b) $z = uv^2w^3$, kde $u = \sin x$, $v = -\cos x$ a $w = e^x$
   (c) $z = \sin u \cos v$, kde $u = (x-y)^2$ a $v = x^2 - y^2$
   (d) $w = yz^2 - x^3$, kde $x = e^{r-t}$, $y = \ln(r + 2s + 3t)$ a $z = \sqrt{rs+t}$
2. Spočtěte parciální derivace $g(x,y) = f(x^2 + y^2)$.
3. $g(x,y) = f(x+y, x-y)$, spočtěte $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ v bodě (a,b).
4. Nechť $f(x,y) = x^2 + 3y^2$. Určete derivace f vzhledem k polárním souřadnicím.
5. Nechť $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Určete derivace f vzhledem k polárním souřadnicím.
6. Ukažte, že funkce $F(x,y,z) = \frac{xy}{z} \ln x + x f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ vyhovuje vztahu $x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = F + \frac{xy}{z}$.

7. Ukažte, že funkce $F(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ vyhovuje rovnici $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$.

8. Výraz $x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ přetransformujte pro funkci $F(u,v) = f(x,y)$, kde $u = y$ a $v = y/x$.

9. Nechť $u(x,y)$ je funkce splňující $u(x,x^2) = 1$ a $\frac{\partial u}{\partial x}(x,x^2) = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Spočtěte $\partial u/\partial y(x,x^2)$.