obdržíme

$$
\begin{aligned}
df(1;0,5) &= (3x^2)\Big|_{[1;0,5]} \cdot 0,11 + (12y^2)\Big|_{[1;0,5]} \cdot 0,08 \\
&= 3 \cdot 0,11 + 12 \cdot 0,5^2 \cdot 0,08 = 0,57.
\end{aligned}
$$

Využijeme vztah $f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)$, tedy

$$f(1,11;0,58) \approx f(1;0,5) + df(1;0,5) = 1,5 + 0,57 = 2,07.$$

Přesně je $f(1,11;0,58) = 2,148\,079$. Rozdíl mezi oběma výsledky je dán tím, že jsme v prvním případě uvažovali přírůstek funkce na tečné rovině.

Ještě poznamenejme, že pokud používáme desetinná čísla, pak je vhodné jednotlivé komponenty bodů od sebe oddělit středníkem.

**Příklad 5.2.3.** Nalezněte totální diferenciál funkce

$$f(x,y) = \operatorname{arctan} \frac{x-y}{x+y}.$$

**Řešení:** Vypočítáme parciální derivace funkce $f$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2} \frac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2} \\
&= \frac{(x+y)^2}{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2} \frac{2y}{(x+y)^2} = \frac{y}{x^2+y^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2} \frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} \\
&= \frac{(x+y)^2}{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2} \frac{-2x}{(x+y)^2} = \frac{-x}{x^2+y^2}.
\end{aligned}
$$

Dosadíme do formule pro totální diferenciál, definice 5.2.2., a dostáváme

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{-x}{x^2+y^2}dy = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}.$$

**Příklad 5.2.4.** Nalezněte rovnici tečné roviny a normály ke funkce

$$z = 2x^2 + y^2$$

v bodě $A = [1, 1, ?]$.

Následující **Schwarzova věta** charakterizuje tzv. „záměnnost" smíšených parciálních derivací.

**Věta 5.1.2.**
Jsou-li smíšené parciální derivace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ spojité v bodě $A = [x_0, y_0]$, pak jsou si v tomto bodě rovny, tj.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A).$$

***Poznámka***
*Za obdobných předpokladů věta platí i pro parciální derivace vyšších řádů, také pro funkce více proměnných. Např. nechť* $u = f(x, y, z)$. *Jsou-li* $\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z \partial x}$ *a* $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^2 \partial z}$ *v bodě* $[x_0, y_0, z_0]$ *spojité, pak jsou si v tomto bodě rovny.*

## Řešené úlohy

**Příklad 5.1.1.** Určete všechny parciální derivace funkce

$$f(x, y) = 3x^4y^2 - 5 \arctan x^2.$$

**Řešení:** Jedná se o funkci dvou proměnných $x$, $y$. Hledáme tedy parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

1. Nejdříve budeme derivovat zadanou funkci podle $x$, proměnnou $y$ budeme považovat za konstantu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^3y^2 - \frac{5}{1+x^4}2x = 12x^3y^2 - \frac{10x}{1+x^4}.$$

2. Derivujeme podle $y$, nyní $x$ budeme považovat za konstantu:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^4y.$$

**Příklad 5.1.2.** Určete všechny parciální derivace funkce

$$g(x, y, z) = 3x^2 + \frac{x-y}{x+y} - e^{x-2y+3z}.$$

**Řešení:** Postupně zadanou funkci derivujeme podle jednotlivých proměnných.

1. Derivujeme podle $x$, proměnné $y$, $z$ považujeme za konstanty:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 6x + \frac{1 \cdot (x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2} - e^{x-2y+3z} \cdot 1$$
$$= 6x + \frac{2y}{(x+y)^2} - e^{x-2y+3z}.$$

2. Derivujeme podle $y$, proměnné $x$, $z$ považujeme za konstanty:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-1 \cdot (x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2} - e^{x-2y+3z} \cdot (-2) = \frac{-2x}{(x+y)^2} + 2e^{x-2y+3z}.$$

3. Derivujeme podle $z$, proměnné $x$, $y$ považujeme za konstanty:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -e^{x-2y+3z} \cdot 3 = -3e^{x-2y+3z}.$$

**Příklad 5.1.3.** Určete hodnoty všech parciálních derivací funkce

$$f = xe^{-x^2 y}$$

v bodě $A = [1, -1]$.

**Řešení:** Vypočítáme jednotlivé parciální derivace zadané funkce a určíme jejich funkční hodnotu v bodě $A$ přímým dosazením:

1. Derivujeme podle $x$, proměnnou $y$ považujeme za konstantu, a poté do derivace funkce $f$ podle $x$, což je opět funkce proměnných $x$, $y$, dosadíme bod $A$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = e^{-x^2 y} + xe^{-x^2 y}(-2xy)\Big|_{A=[1,-1]} = e^{-x^2 y}(1 - 2x^2 y)\Big|_{A=[1,-1]} = 3e.$$

2. Derivujeme podle $y$, proměnnou $x$ považujeme za konstantu, a poté do derivace funkce $f$ podle $y$ dosadíme bod $A$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(A) = xe^{-x^2 y}(-x^2)\Big|_{A=[1,-1]} = -x^3 e^{-x^2 y}\Big|_{A=[1,-1]} = -e.$$

**Příklad 5.1.4.** Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce

$$z = x^2 y + \frac{y^3}{x^4}.$$

**Řešení:** Nejdříve vypočítáme parciální derivace prvého řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - \frac{4y^3}{x^5}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{3y^2}{x^4}.$$

Derivujeme ještě jednou podle $x$ i podle $y$ funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2y + \frac{20y^3}{x^6}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{6y}{x^4}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2x - \frac{12y^2}{x^5}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2x - \frac{12y^2}{x^5}.
\end{aligned}$$

**Příklad 5.1.5.** Vypočítejte $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, je-li

$z = y^2 \sin x$.

**Řešení:** Zadanou funkci $z$ budeme postupně derivovat dvakrát podle $x$ a poté podle $y$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \cos x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2 \sin x, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -2y \sin x.$$

## Úlohy k samostatnému řešení

**1.** Určete všechny parciální derivace funkce $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$.

**2.** Určete všechny parciální derivace funkce $f(x,y) = \tan(x^3 y)$ v bodě $A = [0, \pi]$.

**3.** Určete všechny parciální derivace funkce $f(x, y, z) = \mathrm{e}^{xyz} + \mathrm{e}^{x+2y+3z} + x^y + y^z$.

**4.** Určete všechny parciální derivace funkce

$f(x, y, z) = \sin x \cos y + \sin(x + y) \cos(y + z) + \sin z$ v bodě $A = [0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$.

**5.** Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce

$f(x, y) = y \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{(2x + 3y)^3}$.

**6.** Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ v bodě $A = [1, -1]$.

Diferenciál funkce obvykle zapisujeme v obecném tvaru

$$\mathrm{d}f(\underline{a}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{a})\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{a})\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}(\underline{a})\mathrm{d}z,$$

kde

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}x(\underline{h}) = h_1, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}y(\underline{h}) = h_2, \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}z(\underline{h}) = h_3$$

jsou lineární funkce, které nabývají uvedených hodnot.

Gradientem funkce $f = f(x, y, z)$ v bodě $\underline{a}$ nazýváme vektor

$$\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\underline{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{a}), \frac{\partial f}{\partial z}(\underline{a})\right).$$

Obdobně pro funkce $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definujeme diferenciál funkce v bodě $\underline{a}$, ve kterém má funkce spojité parciální derivace, jako lineární funkci (formu)

$$\mathrm{d}f(\underline{a}) = \mathrm{d}f(\underline{a}, \underline{h}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{a})h_k, \ \underline{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n).$$

Používáme rovněž obecného zápisu ve tvaru

$$\mathrm{d}f(\underline{a}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{a})\mathrm{d}x_k,$$

kde

$$\mathrm{d}x_k(\underline{h}) = h_k, \ 1 \leq k \leq n.$$

Gradientem funkce $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ v bodě $\underline{a}$ nazýváme vektor

$$\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{a})\right).$$

### Řešené úlohy na diferenciál a gradient funkce tří a více proměnných

**Úloha:** Určete diferenciál funkce $f = f(x, y, z)$ v obecném bodě a v daném bodě.

1. $f = f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\underline{a} = (1, -1, 2)$.

   Definičním oborem funkce je množina $D_f = \mathrm{R}^3$ a funkce má spojité parciální derivace v bodech množiny $\mathrm{R}^3 - \{\underline{0}\}$ a je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

   tudíž je

$$\mathrm{d}f = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z).$$

   Po dosazení souřadnic bodu $\underline{a}$ dostaneme

$$\mathrm{d}f(\underline{a}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{d}x - \mathrm{d}y + 2\mathrm{d}z).$$

# TEČNÁ ROVINA A NORMÁLA GRAFU FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

**Příklad 1.** Napište rovnici tečné roviny a normály k ploše o rovnici $z = \ln \frac{2x+3y}{2x-3y}$ v dotykovém bodě $T = [-1, 0, ?]$.

**Řešení.** Nejprve vypočteme třetí souřadnici bodu $T$, tj. $z_T = \ln \frac{-2}{-2} = \ln 1 = 0$. Pro sestavení normálového vektoru tečné roviny potřebujeme určit parciální derivace funkce. Nejprve podle $x$: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\frac{2x+3y}{2x-3y}} \cdot \frac{2(2x-3y)-2(2x+3y)}{(2x-3y)^2} = \frac{2x-3y}{2x+3y} \cdot \frac{4x-6y-4x-6y}{(2x-3y)^2} = \frac{-12y}{(2x+3y)(2x-3y)} = \frac{-12y}{4x^2-9y^2}$; parciální derivace podle $y$: $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\frac{2x+3y}{2x-3y}} \cdot \frac{3(2x-3y)+3(2x+3y)}{(2x-3y)^2} = \frac{2x-3y}{2x+3y} \cdot \frac{6x-9y+6x+9y}{(2x-3y)^2} = \frac{12x}{(2x+3y)(2x-3y)} = \frac{12x}{4x^2-9y^2}$. Hodnoty parciálních derivací v bodě $T$ jsou $\frac{\partial z}{\partial x}(-1,0) = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y}(-1,0) = -3$. Normálový vektor hledané tečné roviny je $\vec{n} = (0, -3, -1)$ nebo $(0, 3, 1)$. Rovnice tečné roviny je $z - 0 = 0(x+1) - 3(y-0)$, tj. $3y + z = 0$. Normála je přímka kolmá na tečnou rovinu v bodě $T$. Směrovým vektorem normály je normálový vektor tečné roviny nebo jeho libovolný násobek. Můžeme tedy použít $\vec{s} = (0, 3, 1)$. Potom parametrické vyjádření rovnice normály je $x = -1$, $y = 3t$, $z = t$, $t \in \mathbf{R}$ .

**Příklad 2.** Napište rovnici tečné roviny k ploše o rovnici $z = \ln \sqrt{9x^2 - 2y^3}$ v bodě $T = [1, -2, ?]$. Určete též parametrické vyjádření rovnice normály.

**Řešení.** Vypočteme $z(1, -2) = \ln \sqrt{9+16} = \ln 5$. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{9x^2-2y^3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{9x^2-2y^3}} \cdot 18x = \frac{9x}{9x^2-2y^3}$; $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-2) = \frac{9}{25}$. Podobně vypočteme $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{9x^2-2y^3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{9x^2-2y^3}} \cdot (-6y^2) = \frac{-3y^2}{9x^2-2y^3}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}(1,-2) = -\frac{12}{25}$. Pak $\vec{n} = (\frac{9}{25}, \frac{-12}{25}, -1)$ nebo libovolný násobek tohoto vektoru, např. $(9, -12, -25)$. Tečná rovina je určena rovnicí $25(z - \ln 5) = 9(x-1) - 12(y+2)$ nebo po úpravě obecnou rovnicí $9x - 12y - 25z + 25\ln 5 - 33 = 0$. Parametrické rovnice normály jsou: $x = 1 + 9t$, $y = -2 - 12t$, $z = \ln 5 - 25t$, $t \in \mathbf{R}$ .

**Příklad 3.** Určete rovnici tečné roviny k ploše, která je zadaná rovnicí $z = x^2 + 3y^3 \operatorname{arctg} x + x^2 \ln \frac{x}{y} - 1$ v bodě $M = [1, 1, ?]$.

**Řešení.** Nejprve vypočteme $z(1,1) = 1 + \frac{3\pi}{4} - 1 = \frac{3}{4}\pi$. Dále určíme parciální derivaci podle proměnné $x$: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \frac{3y^3}{1+x^2} + 2x \ln \frac{x}{y} + x^2 \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{y} = 3x + \frac{3y^3}{1+x^2} + 2x \ln \frac{x}{y}$ a podle $y$: $\frac{\partial z}{\partial y} = 9y^2 \operatorname{arctg} x + x^2 \cdot \frac{y}{x} \cdot (-\frac{x}{y^2}) = 9y^2 \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{y}$. Dosadíme souřadnice dotykového bodu a dostaneme $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = \frac{9\pi}{4} - 1$. Potom normálový vektor tečné roviny je $\vec{n} = (\frac{9}{2}, \frac{9\pi}{4} - 1, -1)$ nebo jeho násobek $(18, 9\pi - 4, -4)$. Z analytické geometrie v prostoru víme, že rovnice tečné roviny je $ax + by + cz + d = 0$, kde $(a, b, c)$ je normálový vektor roviny, tedy $18x + (9\pi - 4)y - 4z + d = 0$. Po dosazení bodu $M$ je $18 + 9\pi - 4 - 3\pi = -d$, to znamená, že tečná rovina má rovnici $18x + (9\pi - 4)y - 4z - 14 - 6\pi = 0$.

**Příklad 4.** Napište rovnici té tečné roviny k ploše o rovnici $z = x^2 - 4xy + y^2$, která je rovnoběžná s rovinou $\varrho$, jejíž rovnice je $x + y + z - 4 = 0$.

**Řešení.** Vypočteme $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -4x + 2y$. Hledaná tečná rovina má normálový vektor $(2x_T - 4y_T, 2y_T - 4x_T, -1)$. Souřadnice bodu T sice neznáme, ale víme, že má-li být tečná rovina rovnoběžná s rovinou $\varrho$, musí platit $(2x_T - 4y_T, 2y_T - 4x_T, -1) =$

$= k\cdot(1,1,1)$, kde $(1,1,1)$ je normálový vektor roviny $\varrho$. Tedy $2x_T - 4y_T = k$, $2y_T - 4x_T = k$ a $-1 = k$. Řešíme soustavu rovnic $2x_T - 4y_T = -1$ a $2y_T - 4x_T = -1$. Z toho $x_T = \frac{1}{2}$, $y_T = \frac{1}{2}$ a dosazením do rovnice dané plochy $z_T = -\frac{1}{2}$. Rovnice tečné roviny je $(x - \frac{1}{2}) + (y - \frac{1}{2}) + (z + \frac{1}{2}) = 0$, po úpravě $2x + 2y + 2z - 1 = 0$.

**Příklad 5.** Napište rovnici tečné roviny k ploše, která je zadaná implicitně rovnicí $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 39 = 0$, v bodě $T = [1,2,2]$.

**Řešení.** Vypočteme parciální derivace funkce $F(x,y,z) = 3x^2+4y^2+5z^2-39$: $\frac{\partial F}{\partial x} = 6x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 8y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 10z$. Do derivací dosadíme souřadnice bodu $T$ a dostaneme normálový vektor tečné roviny $(6,16,20)$ nebo $(3,8,10)$. Rovnice tečné roviny je $3x+8y+10z+d = 0$, po dosazení souřadnic bodu $T$ dostaneme $3x + 8y + 10z - 39 = 0$.

**Příklad 6.** K ploše zadané implicitně rovnicí $\operatorname{arctg} x + x^2y^3 - 3y\ln z = 0$ napište rovnici tečné roviny v bodě $T = [0,1,1]$.

**Řešení.** $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2} + 2xy^3$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2y^2 - 3\ln z$ a $\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{3y}{z}$. Po dosazení souřadnic bodu $T$ do parciálních derivací dostáváme normálový vektor $\vec{n} = (1,0,-3)$. Rovnice tečné roviny po úpravě je $x - 3z + 3 = 0$.

**Příklad 7.** K ploše implicitně dané rovnicí $x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 6 = 0$ najděte ty tečné roviny, které jsou rovnoběžné s rovinou $\varrho$ o rovnici $x + 2y + 4z - 2 = 0$.

**Řešení.** Nejprve vypočteme $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 8y$ a $\frac{\partial F}{\partial z} = 8z$. Normálový vektor roviny $\varrho$ je $(1,2,4)$ a pro normálový vektor tečné roviny s rovinou $\varrho$ rovnoběžné musí platit $(2x_T, 8y_T, 8z_T) = k(1,2,4)$. Porovnáním odpovídajících souřadnic dostaneme $2x_T = k$, $8y_T = 2k$, $8z_T = 4k$, z toho $x_T = \frac{k}{2}$, $y_T = \frac{k}{4}$ a $z_T = \frac{k}{2}$. Bod $T$ leží na dané ploše, takže jeho souřadnice musí rovnici plochy vyhovovat. Pak $\frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{4} + k^2 = 6$, řešením je $k_{1,2} = \pm 2$. Úloze vyhovují dva dotykové body $T_1 = [1, \frac{1}{2}, 1]$ a $T_2 = [-1, -\frac{1}{2}, -1]$, a pak jsou řešením i dvě tečné roviny, a to $\tau_1 : x + 2y + 4z = 6$ a $\tau_2 : x + 2y + 4z + 6 = 0$.

**Příklad 8.** Napište parametrické vyjádření rovnice normály k ploše zadané rovnicí $z = \operatorname{arctg} \frac{1-3x}{5-5y}$ v jejím bodě $T = [2,0,?]$.

**Řešení.** K určení směrového vektoru normály potřebujeme znát obě parciální derivace:
$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(\frac{1-3x}{5-5y})^2} \cdot \frac{-3}{5-5y} = \frac{-3(5-5y)}{25-50y+25y^2+1-6x+9x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial x}(2,0) = -\frac{3}{10}$.
$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(\frac{1-3x}{5-5y})^2} \cdot \frac{5(1-3x)}{(5-5y)^2} = \frac{5(1-3x)}{25-50y+25y^2+1-6x+9x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}(2,0) = -\frac{1}{2}$.
Směrový vektor normály má souřadnice $(-\frac{3}{10}, -\frac{1}{2}, -1)$ nebo $(3,5,10)$. Dosazením $x_T$, $y_T$ do rovnice plochy vypočteme $z_T = -\frac{\pi}{4}$ a pak parametrické vyjádření rovnice hledané normály je $x = 2 + 3t$, $y = 5t$, $z = -\frac{\pi}{4} + 10t$, $t \in \mathbf{R}$.

**Příklad 9.** Napište rovnici tečné roviny a normály k ploše zadané implicitně rovnicí $x^2 - 3xy + z^3 - 6 = 0$ s daným dotykovým bodem $M = [2,1,2]$.

**Řešení.** Normálový vektor tečné roviny (a směrový vektor příslušné normály) k ploše zadané rovnicí $x^2 - 3xy + z^3 - 6 = 0$ a dotykovým bodem $M = [2,1,2]$ je roven $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(2,1,2), \frac{\partial F}{\partial y}(2,1,2), \frac{\partial F}{\partial z}(2,1,2)\right)$. V našem případě je $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 3y$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -3x$ a $\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2$. Normálový vektor je tedy $(1,-6,12)$. Rovnice hledané tečné roviny je

2. $f = f(x,y,z) = 5x^2y + 6xy - 7xz + 8z^2 - 10y^2$, $\quad \underline{a} = (0,-1,2)$.

Definičním oborem funkce je množina $D_f = \mathrm{R}^3$ a funkce má ve všech bodech této množiny spojité parciální derivace a je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10xy + 6y - 7z, \; \frac{\partial f}{\partial y} = 5x^2 + 6x - 20y, \; \frac{\partial f}{\partial z} = -7x + 16z,$$

tudíž je

$$\mathrm{d}f = (10xy + 6y - 7z)\mathrm{d}x + (5x^2 + 6x - 20y)\mathrm{d}y + (-7x + 16z)\mathrm{d}z.$$

Po dosazení souřadnic bodu $\underline{a}$ dostaneme

$$\mathrm{d}f(\underline{a}) = -20\mathrm{d}x + 20\mathrm{d}y + 32\mathrm{d}z.$$

3. $f = f(x,y,z) = \ln(2x - 3y + 5z - 7)$, $\quad \underline{a} = (4,0,1)$, $\underline{b} = (1,1,1)$.

Definičním oborem funkce je množina $D_f = \{(x,y,z);\ 2x - 3y + 5z > 7\}$ a funkce má spojité parciální derivace ve všech bodech této množiny a je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{2x - 3y + 5z - 7}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-3}{2x - 3y + 5z - 7}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{5}{2x - 3y + 5z - 7},$$

tudíž je

$$\mathrm{d}f = \frac{1}{2x - 3y + 5z - 7}(2\mathrm{d}x - 3\mathrm{d}y + 5\mathrm{d}z).$$

Po dosazení souřadnic bodu $\underline{a}$ dostaneme

$$\mathrm{d}f(\underline{a}) = \frac{1}{6}(2\mathrm{d}x - 3\mathrm{d}y + 5\mathrm{d}z).$$

Bod $\underline{b} = (1,1,1)$ není v definičním oboru funkce, diferenciál funkce nelze v tomto bodě počítat, i když se do jeho obecného vyjádření dají souřadnice bodu $\underline{b}$ dosadit!

4. $f = f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\quad \underline{a} = (2,-1,3)$.

Definičním oborem funkce je množina $D_f = \mathrm{R}^3 - \{\underline{0}\}$ a funkce má spojité parciální derivace ve všech bodech této množiny a je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-z}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}},$$

tudíž je

$$\mathrm{d}f = \frac{-1}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}}(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z).$$

Po dosazení souřadnic bodu $\underline{a}$ dostaneme

$$\mathrm{d}f(\underline{a}) = \frac{-1}{\sqrt[3]{14}}(2\mathrm{d}x - \mathrm{d}y + 3\mathrm{d}z).$$

1. $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2 - 4x + 2y - 5$, $\underline{a} = (1,-2)$.

   Funkce je definována v množině $D_f = \mathrm{R}^2$ a má spojité parciální derivace v celém definičním oboru. Výpočtem dostaneme pro parciální derivace vyjádření

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 3y - 4,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 10y - 3x + 2$$

   a tudíž je

$$\mathrm{d}f = (4x - 3y - 4)\mathrm{d}x + (10y - 3x + 2)\mathrm{d}y.$$

   Po dosazení souřadnic daných bodů do obecného vyjádření dostaneme, že

$$\mathrm{d}f(\underline{a}) = 6\mathrm{d}x - 21\mathrm{d}y.$$

2. $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x+y)$, $\underline{a} = (1,-1)$.

   Funkce je definována v množině $D_f = \mathrm{R}^2$ a má spojité parciální derivace v celém definičním oboru. Výpočtem dostaneme pro parciální derivace vyjádření

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+(x+y)^2}$$

   a tudíž je

$$\mathrm{d}f = \frac{1}{1+(x+y)^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{1+(x+y)^2}\mathrm{d}y.$$

   Po dosazení souřadnic daných bodů do obecného vyjádření dostaneme, že

$$\mathrm{d}f(\underline{a}) = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y.$$

3. $f(x,y) = \sqrt{2x-3y+5}$, $\underline{a} = (5,2)$, $\underline{b} = (-4,2)$.

   Funkce je definována v množině $D_f = \{(x,y);\, 2x - 3y + 5 \geq 0\}$ a má spojité parciální derivace v množině $\{(x,y);\, 2x - 3y + 5 > 0\}$. Výpočtem dostaneme pro parciální derivace vyjádření

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{2x-3y+5}},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-3}{2\sqrt{2x-3y+5}}$$

   a tudíž je

$$\mathrm{d}f = \frac{1}{2\sqrt{2x-3y+5}}(2x\mathrm{d}x - 3\mathrm{d}y).$$

   Po dosazení souřadnic daných bodů do obecného vyjádření dostaneme, že

$$\mathrm{d}f(\underline{a}) = \frac{5}{3}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\mathrm{d}y.$$

   Bod $\underline{b} = (-4,2)$ není bodem definičního oboru, diferenciál funkce nelze v tomto bodě počítat.

4. $f(x,y) = \frac{x^2}{y} + \frac{y}{x}$, $\underline{a} = (1,-1)$.

   Funkce je definována v množině $D_f = \{(x,y);\, x \neq 0,\ y \neq 0\}$ a má spojité parciální derivace v této množině. Výpočtem dostaneme pro parciální derivace vyjádření

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x^3 - y^2}{x^2 y},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y^2 - x^3}{xy^2}$$

a tudíž je

$$\mathrm{d}f = \frac{2x^3 - y^2}{x^2 y}\mathrm{d}x + \frac{y^2 - x^3}{xy^2}\mathrm{d}y.$$

Po dosazení souřadnic daného bodu do obecného vyjádření dostaneme, že

$$\mathrm{d}f(\underline{a}) = -2\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y.$$

5. $f(x,y) = \sqrt{x^2y+1}$, $\underline{a} = (0,1)$.

   Funkce je definována v množině $D_f = \{(x,y);\, x^2y+1 \geq 0\}$ a má spojité parciální derivace v množině $\{(x,y);\, x^2y+1 > 0\}$. Výpočtem dostaneme pro parciální derivace vyjádření

   $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2y+1}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2y+1}}$$

   a tudíž je

   $$\mathrm{d}f = \frac{1}{2\sqrt{x^2y+1}}(2x\mathrm{d}x + \mathrm{d}y).$$

   Po dosazení souřadnic daného bodu do obecného vyjádření dostaneme, že

   $$\mathrm{d}f(\underline{a}) = \frac{1}{2}\mathrm{d}y.$$

**Úloha:** Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f = f(x,y)$ v bodě $(\underline{a}, f(\underline{a}))$.

1. $f(x,y) = 3x^3 - 2x^2y + 5xy^2 - 6x + 5y + 10$, $\underline{a} = (1,-1)$.

   Definičním oborem funkce $f$ je množina $D_f = \mathrm{R}^2$, funkce má spojité parciální derivace ve všech bodech této množiny a je

   $$\frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2 - 4xy + 5y^2 - 6, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2 + 10xy + 5.$$

   Po dosazení souřadnic bodu $\underline{a}$ dostaneme

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(\underline{a}) = 12, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{a}) = -7.$$

   Protože $f(\underline{a}) = f(1,-1) = 9$ je rovnice tečné roviny

   $$\tau: \quad z - 9 = 12(x-1) - 7(y+1) \Leftrightarrow 12x - 7y - z - 10 = 0.$$

2. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $\underline{a} = (4,-3)$.

   Definičním oborem funkce $f$ je množina $D_f = \mathrm{R}^2$, funkce má spojité parciální derivace v bodech množiny $\mathrm{R}^2 - \{\underline{0}\}$ a je

   $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

   Po dosazení souřadnic bodu $\underline{a}$ dostaneme

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(\underline{a}) = \frac{4}{5}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{a}) = -\frac{3}{5}.$$

   Protože $f(\underline{a}) = f(4,-3) = 5$ je rovnice tečné roviny

   $$\tau: \quad z - 5 = \frac{4}{5}(x-4) - \frac{3}{5}(y+3) \Leftrightarrow 4x - 3y - 5z = 0.$$

pak podle definice musí platit, že $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$. Složíme-li ovšem zkoumanou funkci proměnných $h_1, h_2$ v prstencovém okolí počátku s funkcí $t \mapsto (t,t)$, pak zjistíme, že limita pro $t \to 0_+$ je rovna $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a to je ve sporu s větou o limitě složené funkce.

(Poznamenejme, že pokud bychom vyšetřovali napřed parciální derivace funkce $f$ v okolí počátku, pak bychom po jistém úsilí s jejich výpočtem a se zkoumáním limity zjistili, že nejsou v počátku spojité. Neexistenci limity bychom mohli dokázat též zkoumáním „po osách“a „po diagonále“, tedy skládáním s $t \mapsto (t,0)$, $t \mapsto (0,t)$ a $t \mapsto (t,t)$. Tím bychom ovšem dospěli k tomu, že tato cesta k cíli nevede a pak bychom jistě přistoupili ke zkoumání diferenciálu podle definice jako výše. Protože funkci $f$ lze spojitě dodefinovat nulou v počátku, nelze nutnou podmínku spojitosti užít k vyvrácení existence diferenciálu v tomto případě. Je proto dobré získat cit pro to, kterému postupu dát přednost, abychom aspoň nad jednoduššími příklady neztráceli příliš mnoho času.) ■

§55. **Derivace ve směru.** K výpočtu derivace ve směru je často výhodné užít totální diferenciál, pokud existuje:

*Existuje-li totální diferenciál $df(a)$ funkce $f$ z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, pak derivace ve směru $h \in \mathbb{R}^n$ ($\partial_h f(a) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$) je rovna hodnotě $d_h f(a)$ tohoto diferenciálu v $h$. Poznamenejme, že geometrické představě směru odpovídají jen nenulová $h$ a že někdy se o derivaci ve směru mluví jen v případě, že $\|h\| = 1$.*

Příklad Spočtěte derivaci funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg} xy$ v bodě $(1,1)$ ve směru $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$.

*Řešení.* Parciální derivace jsou $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{1+x^2y^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{1+x^2y^2}$. To jsou funkce dvou proměnných, které jsou spojité na $\mathbb{R}^2$, speciálně jsou spojité v bodě $(1,1)$. Funkce $f$ má tedy totální diferenciál v bodě $(1,1)$ a derivace $f$ v bodě $(1,1)$ ve směru $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ je rovna hodnotě totálního diferenciálu $df(1,1)$ v bodě $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$, tedy je rovna $\frac{1}{2}\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$. ■

§56. **Tečná nadrovina.** Existuje-li totální diferenciál reálné funkce více proměnných, můžeme mluvit o tečné nadrovině k jejímu grafu:

*Má-li funkce $f$ z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ totální diferenciál v bodě $a$, pak graf zobrazení $x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(a) + d_{x-a}f(a)$, (t.j. množina*

$$(a, f(a)) + L = \{(a, f(a)) + (\xi, \eta) \colon a \in \mathbb{R}^n,\ (\xi,\eta) \in L\},$$

*kde $L$ je graf zobrazení $df(a)$) je tečnou nadrovinou ke grafu $f$ v bodě $(a, f(a))$.*

Příklad Nechť $T$ je tečná rovina ke grafu funkce $p(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$, která je kolmá k přímce $\{(t,t,t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$. Ve kterém bodě protíná $T$ „osu $x$“(t.j. přímku $\{(0,0,t) \in \mathbb{R}^3; t \in \mathbb{R}\}$)?

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{1\cdot(x^2+y^2) - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-1\cdot(x^2+y^2) - (-x)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

c) Podle příkladu 2.3 e) je

$$\frac{\partial h}{\partial x} = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial h}{\partial y} = x^y \ln x.$$

S použitím vzorců pro derivování obecné mocniny, exponenciály a součinu dvou funkcí a funkce a konstanty dostaneme:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(yx^{y-1}) = y(y-1)x^{y-2},$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x^y \ln x) = x^y \ln x \ln x = x^y \ln^2 x,$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1}) = 1\cdot x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x \cdot 1 = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x,$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^y \ln x) = yx^{y-1}\ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1}.$$

Všimněte si, že při výpočtu $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$ je $x^{y-1}$ při derivování podle $y$ složená funkce (v exponentu je $y-1$), přičemž derivace vnitřní složky je 1.

Definiční obory druhých parciálních derivací jsou v předchozích příkladech ve všech případech stejné jako u prvních parciálních derivací. ▲

Parciální derivace druhého řádu a vyšších řádů, při nichž se derivuje aspoň podle dvou různých proměnných, se nazývají *smíšené*. Tedy např. $f_{xy}$, $f_{xyx}$, $f_{xzy}$ apod. Podíváme-li se v předchozím příkladu na smíšené druhé parciální derivace $f_{xy}$ a $f_{yx}$, vidíme, že ve všech třech případech vyšly stejné. Je otázkou, nakolik je to věc náhody. Obecně neplatí, že $f_{xy} = f_{yx}$, ale za dosti rozumných předpokladů, které jsou v běžných případech splněny, rovnost platí. Výsledek je popsán v následujících třech větách.

**Věta 2.11.** *Nechť v nějakém okolí $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ bodu $(x_0, y_0)$ existují smíšené druhé parciální derivace $f_{xy}$ a $f_{yx}$ a jsou spojité v bodě $(x_0, y_0)$. Pak platí $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$. (Říkáme, že smíšené parciální derivace jsou zaměnitelné.)*

Tedy spojitost smíšených derivací $f_{xy}$ a $f_{yx}$ zaručuje jejich zaměnitelnost.

*Důkaz.* Z předpokladů vyplývá existence čtverce $M = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, na němž existují $f_x$, $f_y$, $f_{xy}$ a $f_{yx}$. Pro $0 < h < \delta$ položme

$$F(h) = \frac{f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+h) + f(x_0, y_0)}{h^2}$$

**Příklad 5.3.** Nalezněme směrové derivace funkce

$$f(x,y) = e^{x-y^2}$$

v bodě $(0,0)$ ve směru vektorů $(1,0), (-1,0)$ a $(1,1)$.

Nejdříve nalezneme „průřezové funkce" $\varphi(t)$. Pro $\boldsymbol{h} = (1,0)$ máme

$$\varphi(t) = f((0,0) + t(1,0)) = f(t,0) = e^t,$$

a proto $\partial_{\boldsymbol{h}} f(0,0) = \varphi'(0) = e^0 = 1$.

Bude-li $\boldsymbol{h} = (-1,0)$ víme již podle Poznámky 5.2 (i), že derivace musí změnit znaménko. Pro ilustraci se však stejně podívejme na průřez funkce

$$\varphi(t) = f((0,0) + t(-1,0)) = f(-t,0) = e^{-t}.$$

Skutečně tedy $\partial_{\boldsymbol{h}} f(0,0) = \varphi'(0) = -e^0 = -1$. Konečně pro $\boldsymbol{h} = (1,1)$ máme

$$\varphi(t) = f((0,0) + t(1,1)) = f(t,t) = e^{t-t^2}.$$

Jelikož $\varphi'(t) = (1-2t)e^{t-t^2}$, je $\partial_{\boldsymbol{h}} f(0,0) = \varphi'(0) = 1$.

(ii) Nalezněme směrovou derivaci funkce

$$f(x,y,z) = \sin(xyz)$$

v bodě $(1,0,0)$ ve směru vektoru $\boldsymbol{h} = (2,1,1)$.

Podobně jako výše označíme

$$\varphi(t) = f\big((1,0,0) + t(2,1,1)\big) = f(1+2t, 1+t, 0+t) = \sin(t + 3t^2 + 2t^3).$$

Snadným výpočtem

$$\partial_{\boldsymbol{h}} f(1,0,0) = \varphi'(0) = 1.$$

Z Poznámky 5.2 i z konkrétních příkladů vidíme, že derivace ve směru se dá mechanicky převést na výpočet derivace průřezové funkce, která závisí pouze na jediném argumentu. Později uvidíme, že tento výpočet se dá mnohdy pohodlněji provést i bez stanovení průřezové funkce. Redukce na derivaci funkce s jedním argumentem však říká, že pro směrové derivace musí platit stejná pravidla jako pro derivaci funkce pouze jedné proměnné. Pro úplnost si je uvedeme v následující větě.

**Věta 5.4.** *Nechť $f$ a $g$ jsou funkce definované na otevřené množině $G$ v euklidovském prostoru $X$. Předpokládejme, že $f$ i $g$ mají derivace v bodě $\boldsymbol{x} \in G$ ve směru vektoru $\boldsymbol{h} \in X$. Pak existují derivace funkcí $f+g$, $fg$, $\dfrac{f}{g}$ ve směru $\boldsymbol{h}$ a platí*

(i) $\partial_{\boldsymbol{h}}(f+g)(\boldsymbol{x}) = \partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) + \partial_{\boldsymbol{h}} g(\boldsymbol{x})$,

(ii) $\partial_{\boldsymbol{h}}(fg)(\boldsymbol{x}) = \partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x})\ g(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x})\,\partial_{\boldsymbol{h}} g(\boldsymbol{x})$,

(iii) $\partial_{\boldsymbol{h}}\Big(\dfrac{f}{g}(\boldsymbol{x})\Big) = \dfrac{\partial_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x})\ g(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})\partial_{\boldsymbol{h}} g(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})^2}$ , *je-li* $g(\boldsymbol{x}) \neq 0$.