24. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. *P*arciální derivací funkce f v bodě $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ podle proměnné x_i definujeme jako limitu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)}{t}.$$

Věta 2. O zaměnitelnosti parciálních derivací I.
Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $1 \leq i, j \leq n$. Nechť platí, že
(i) funkce $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ je spojitá v bodě a,
(ii) funkce $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ je definovaná na nějakém okolí bodu a.
Potom existují a jsou si rovny

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Věta 3. O zaměnitelnosti parciálních derivací II.
Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $1 \leq i, j \leq n$. Nechť platí, že funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ a $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ mají v bodě a totální diferenciál. Potom existují a jsou si rovny

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Definice 4. Derivace (totální diferenciál)
Nechť je dána reálná funkce n-proměnných $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definovaná na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$. Pokud existuje lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0,$$

potom toto lineární zobrazení L značíme $df(a)$ nebo také $f'(a)$ a nazýváme jej **derivací** nebo také **totálním diferenciálem** funkce f v bodě a. Zobrazení, které bodu a přiřazuje $df(a)$, resp. $f'(a)$, značíme df, resp. f' a nazýváme jej diferenciálem funkce f.

Věta 5. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je reálná funkce, jejíž všechny parciální derivace jsou spojité v bodě a. Potom funkce f má v bodě a totální diferenciál určený předpisem

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} \, dx_i.$$

Věta 6. Nechť je funkce $f(x,y)$ diferencovatelná v bodě $A = [x_0; y_0]$. Pak v bodě $[x_0; y_0; f(x_0; y_0)]$ existuje tečná rovina ke grafu funkce $z = f(x,y)$ určená rovnicí

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)(y - y_0).$$

Normála ke grafu funkce je určena rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)t \\ y &= y_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)t \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ z &= z_0 - t \end{aligned}$$

Příklady

1. Najděte parciální derivace a totální diferenciál funkcí (ověřte, že tot. dif. opravdu existuje)

   (a) $f(x,y,z) = 5x^2y + 6xy - 7xz + 8z^2 - 10y^2$

   (b) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

   (c) $f(x,y) = \frac{x^2}{y} + \frac{y}{x}$

   (d) $f(x,y) = \arctan \frac{x-y}{x+y}$

   (e) $f(x,y) = 3x^4y^2 - 5\arctan x^2$

   (f) $f(x,y,z) = 3x^2 + \frac{x-y}{x+y} - e^{x-2y+3z}$

   (g) $f(x,y,z) = \|[x,y,z]\|$

   (h) $f(x,y) = x^y$

2. Určete hodnoty parciálních derivací funkce $f(x,y) = x^2 e^{-x^2 y}$ v bodě $[1; -1]$.

3. Vypočítejte $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ funkce $z = y^2 \sin x$.

4. Určete derivaci funkce $\arctan xy$ v bodě $(1,1)$ ve směru $(-1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2})$.

5. Najděte směrové derivace funkce e^{x-y^2} v bodě $[0;0]$ ve směru $(1;0)$, $(-1;0)$ a $(1;1)$.

6. Napište rovnici tečné roviny a normály k ploše

   (a) $f(x,y) = \ln \frac{2x+3y}{2x-3y}$ v bodě $A = [-1; 0; ?]$

   (b) $f(x,y) = x^2 + 3y^3 \arctan x + x^2 + \ln \frac{x}{y}$ v bodě $A = [1, 1, ?]$

   (c) $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2$, která je rovnoběžná s rovinou $x + y + z = 4$.