23. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. *Metrickým prostorem* budeme rozumět dvojici (X, ρ), kde X je množina, $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ je funkce splňující

(1) $\forall x, y \in X : \ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(2) $\forall x, y \in X : \ \rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(3) $\forall x, y, z \in X : \ \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Funkci ρ nazýváme *metrika na* X.

Definice 2. Nechť $x \in X$, $r > 0$. *Otevřenou koulí* rozumíme množinu

$$B(x, r) = \{y \in X; \rho(x, y) < r\}$$

Uzavřenou koulí rozumíme množinu

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in X; \rho(x, y) \leq r\}$$

Definice 3. Nechť $x_0 \in X$ a $\varepsilon > 0$. Pak *ε-okolím bodu x* nazveme množinu

$$U(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n; \rho(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

Pak *prstencovým ε-okolím bodu x* nazveme množinu $P(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n; 0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$.

Definice 4. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že bod $x_0 \in X$ je *hromadný bod množiny M*, jestliže $\forall X(x_0) : \ X(x_0) \cap M \neq \emptyset$.

Řekneme, že množina M je *uzavřená*, jestliže všechny hromadné body patří do M.

Definice 5. Nechť $M \subset X$, $x \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je *vnitřním bodem množiny M*, jestliže existuje $r > 0$ splňující $U(x, r) \subset M$.

Množina $M \subset X$ se nazývá *otevřená v* (X, ρ), jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

Definice 6. Nechť $M \subset X$. Řekneme, že bod $x_0 \in X$ je *hraniční bod množiny M*, jestliže $\forall U(x_0) : U(x_0) \cap M \neq \emptyset$ a $U(x_0) \cap X \setminus M \neq \emptyset$. Množinu všech hraničních bodů nazýváme *hranice* a značíme ji ∂M.

Uzávěrem množiny M rozumíme množinu $\bar{M} = \{x \in X; \forall \varepsilon > 0 : U(x, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset\}$.

Definice 7. Množina $M \subset X$ se nazývá *omezená*, jestliže $\exists K \operatorname{diam}(M) < K$.

Definice 8. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků X. Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje* k $y \in X$ v (X, ρ), jestliže platí $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y) = 0$. Prvek y nazýváme *limitou posloupnosti* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v (X, ρ). *Konvergentní posloupností v* (X, ρ) rozumíme každou posloupnost prvků X, která má limitu v (X, ρ).

Věta 9. Nechť $A \subset X$. Množina A je uzavřená, právě když limita každé konvergentní posloupnosti prvků z A leží v A.

Definice 10. Řekneme, že množina M je *hustá v* X, jestliže $\bar{M} = X$.

Příklady

1. Nakreslete otevřenou a uzavřenou kouli $B(0, 1)$ v prostoru $\mathbb{R}^2$ s metrikou

   (a) eukleidovskou (c) supremovou
   (b) New Yorskou (d) diskrétní

2. Určete, zda množina M je uzavřená, otevřená, co je její vnitřek, uzávěr, hranice (v $\mathbb{R}$ s eukleidovskou metrikou):

   (a) $M = (0, 1)$ (c) $M = (0, 1]$ (e) $M = [0, \infty)$
   (b) $M = [0, 1]$ (d) $M = (0, \infty)$ (f) $M = (-\infty, \infty)$

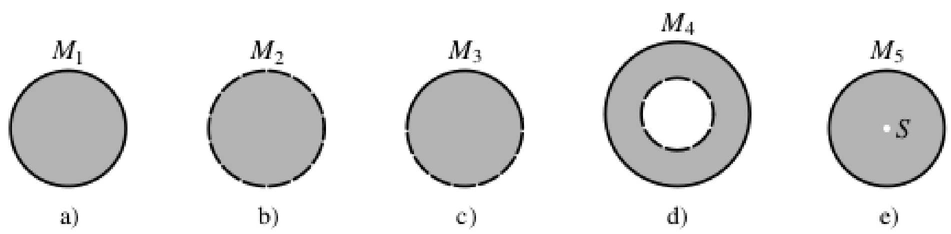
   (g) $\mathbb{N}$ (h) $\mathbb{Q}$ (i) $\mathbb{R}$

   (j) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 1 < x^3 + y^2 + z^3 \leq 2;\ x, y, z \geq 0\}$
   (k) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 1 \leq x^3 + y^2 + z^3 \leq 2;\ x, y, z \geq 0\}$
   (l) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 1 < x^3 + y^2 + z^3 < 2;\ x, y, z > 0\}$

3. Určete, zda je daná množina uzavřená, uzavřená, ani jedno v $\mathbb{R}^2$.

   (a) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ (d) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| > 1\}$
   (b) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x < y < x + 3\}$
   (c) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 \leq y \leq x^2 + 1\}$ (e) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x + y| < 1\}$

4. Určete, zda je daná množina uzavřená, uzavřená, najděte hranici (v $\mathbb{R}^2$).



5. Určete, zda množina M je omezená

(a) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 2\}$

(b) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| \leq |y|\}$

(c) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geq 4\}$

(d) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x - y| < 2\}$

(e) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2 < xyz < 4\}$

6. Rozhodněte, zda platí (v obecném metrickém prostoru):

(a) $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$

(b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

7. Najděte uzávěry grafů funkcí

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(b) Dirichletova funkce

(c) Riemannova funkce

8. Nechť ρ_1, ρ_2 jsou metriky na prostoru X. Určete, zda následující funkce definují metriku na X:

(a) $\rho_1 + \rho_2$

(b) $\max\{\rho_1, \rho_2\}$

(c) $\min\{\rho_1, \rho_2\}$

(d) $\max\{\rho_1, 1\}$

(e) $\min\{\rho_1, 2\}$

9. Nechť $0 < p \leq q < \infty$. Sestrojte množinu A tak, aby $\operatorname{diam} A = q$, a $\operatorname{diam} A^\circ = p$.

10. Nechť (X_i, ρ_i) jsou metrické prostory. Dokažte, že následující předpis definuje metriku na $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$:

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \min\{\rho_i(x_i, y_i), 1\}$$

11. Najděte netriviální $A \subset \mathbb{R}$, aby splňovala následující

(a) $\overline{A} = \partial A$

(b) $\operatorname{Int} \overline{A} \supsetneq A$

(c) $\operatorname{Int} \overline{A} \subsetneq A$

(d) $\overline{\operatorname{Int} A} \subsetneq A$

(e) $\overline{\operatorname{Int} A} \supsetneq A$

(f) $\overline{\operatorname{Int} A} = A$

12. Je každá konečná podmnožina metrického prostoru nutně uzavřená?

13. Co lze říci o otevřených množinách, jejichž každý bod je izolovaný?