22. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konveregnce Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$ a nechť $a < b$. Nechť $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k funkci f na (a, b). Dále nechť $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ je na $[a, b)$ monotónní a spojitá. Pak platí:

(A) Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a g je omezená, pak $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.

(D) Je-li F omezená na (a, b) a $\lim_{x\to b_-} g(x) = 0$, je $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.

Příklady

Určete (v závislosti na parametru), zda daný integrál konverguje, respektive zda konverguje absolutně. Přitom uvažte $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x^\alpha \, dx$

   Řešení:

   Proveďme substituci $t = x^\alpha$, přičemž nezapomeňme, že uvažujeme pouze

   $$x = t^{1/\alpha}, \qquad dx = t^{1/\alpha-1}\, dt$$

   a platí, že

   $$\int_0^{+\infty} \sin x^\alpha \, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1-1/\alpha}} \, dt$$

   Na pravém okolí nuly $t \in (0, \pi/2)$ je integrand kladný a můžeme zde použít srovnání s funkcí

   $$\frac{\sin t}{t^{1-1/\alpha}} \approx \frac{t}{t^{1-1/\alpha}} = \frac{1}{t^{-1/\alpha}},$$

   tudíž integrál $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t^{1/\alpha-1}} \, dt$ konverguje, a to navíc absolutně, právě když $-1/\alpha < 1$, tedy pokud $\alpha > -1$. Jinak diverguje. Obojí plyne z limitního srovnávacího kritéria. Pro kladné α tedy v okolí nuly není s konvergencí problém.

   Zbývá tak vyšetřit integrál

   $$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1-1/\alpha}} \, dt$$

   O tomto integrálu víme, že konverguje absolutně, právě když $2 > 1-1/\alpha > 1$, tedy pokud $-1 < \alpha < 0$. Víme také, že konverguje neabsolutně, pokud $2 > 1-1/\alpha > 0$, tedy pokud $\alpha > 1$.

   Odtud máme, že absolutní konvergence integrálu v zadání příkladu nenastává pro žádné $\alpha > 0$ a že integrál konverguje neabsolutně pro $\alpha > 1$.

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arcsin \frac{x}{x^2+1} \ln x \cos x \, dx$

Řešení:

Funkce má spojité rozšíření do nuly, neboť

$$\arcsin x \approx x \implies \arcsin \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{x}{x^2+1} \approx x$$

a

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$$

Problematický bod je tedy pouze nekonečno. Protože $\frac{x}{x^2+1} \to 0$ pro $x \to \infty$, platí také na okolí nekonečna, že

$$\arcsin \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{1}{x}$$

Z odhadu platného pro $x > e$

$$\frac{|\cos x|}{x} \ln x \geq \frac{|\cos x|}{x}$$

vyplývá, že integrál nemůže konvergovat absolutně. Naopak, protože $\frac{\ln x}{x} \to 0$ pro $x \to +\infty$ a tato funkce je na nějakém okolí nekonečna monotónní, je integrál neabsolutně konvergentní podle Dirichletova kritéria, neboť funkce $\cos x$ má omezenou primitivní funkci.

Ještě snad k monotonii $\frac{\ln x}{x}$. Na intervalu $(0, +\infty)$ je tato funkce spojitá a má spojitou derivaci, která je pro $x > e$ záporná, jak dostáváme přímým výpočtem:

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin 2x}{x^\alpha} \, dx$

Řešení:

Na (dostatečně malém pravém prstencovém) okolí nuly integrand nemění znaménko a chová se přibližně jako

$$f(x) \approx \frac{2}{x^{\alpha-2}}$$

odkud dostáváme podmínku na konvergenci $\alpha - 2 < 1$, tedy $\alpha < 3$.

Na okolí nekonečna nejprve integrand přepíšeme do jiného tvaru pomocí identity

$$\sin x \sin 2x = \frac{\cos x - \cos 3x}{2}$$

Nyní dostaneme pomocí limitního srovnávacího kritéria aplikovaného na funkci $|\cos x|/x^\alpha$, popřípadě na $|\cos 3x|/x^\alpha$ podmínku na absolutní konvergenci $\alpha > 1$.

Protože funkce $\cos x$ i $\cos 3x$ mají omezené primitivní funkce a $\alpha > 0$, dostaneme pomocí Dirichletova kritéria neabsolutní konvergenci.

Závěr: Integrál konverguje pro $0 < \alpha < 3$, pro $1 < \alpha < 3$ navíc absolutně.

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{e^{x^2}-1} \sin\frac{1}{x^2}\,dx$

Řešení:

Na $[1, +\infty)$ integrál konverguje absolutně srovnáním s $\frac{1}{e^x}$, neboť platí, že

$$\frac{f(x)}{1/e^x} = \frac{x^a}{e^x} \cdot \frac{1}{e^{x^2-2x}-1} \cdot \sin\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$$

neboť všechny členy konvergují k nule pro libovolné $a \in \mathbb{R}$.

Na pravém δ-okolí nuly je (pro dost malé δ)

$$\frac{1}{e^{x^2}-1} \approx \frac{1}{x^2}.$$

Díky monotonii funkce $\frac{x^2}{e^{x^2}-1}$ na nějakém pravém okolí nuly můžeme (díky Abelovu kritériu) vyšetřovat konvergenci (resp. absolutní konvergenci) jednoduššího integrálu

$$\int_0^{\delta} x^{a-2} \sin\frac{1}{x^2}\,dx$$

Substitucí $t = \frac{1}{x^2}$ dostaneme ekvivalentní integrál

$$\int_{1/\delta^2}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{a+1}{2}}}\,dt$$

o kterém víme, že:

– konverguje podle Dirichletova kritéria, pokud $(a+1)/2 > 0$, tedy $a > -1$

– konverguje absolutně, pokud $(a+1)/2 > 1$, tedy pokud $a > 1$.

Závěr: Integrál konverguje, pokud $a > -1$, pro $a > 1$ navíc absolutně. Jinak diverguje.

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin e^x\,dx$

Řešení:

Provedeme substituci $t = e^x$. Potom $x = \ln t$ a $dx = 1/t\,dt$, integrál tak přejde na tvar

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

o němž je známo, že konverguje neabsolutně.

6. $\displaystyle\int_0^1 \arcsin^a(x(1-x))\sin\frac{1}{x^\alpha}\,dx$

Řešení:

U jedničky platí, že

$$\arcsin x(1-x) \approx x(1-x) \approx (1-x), \qquad \sin\frac{1}{x^\alpha} \approx \sin 1$$

(Ověřte! Jde vlastně o rozvíjení arcsin na okolí nuly.) Protože integrand na vhodném levém okolí jedničky nemění znaménko, stačí podle limitního srovnávacího kritéria vyšetřovat (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_{1-\delta}^1 (1-x)^a\,dx$$

pro vhodné malé kladné δ, což je ekvivalentní vyšetřování konvergence integrálu

$$\int_0^\delta y^a\,dy$$

který dostaneme substitucí $y = 1-x$. O něm víme, že konverguje pro $a > -1$.

U nuly platí, že

$$\arcsin x(1-x) \approx x(1-x) \approx x,$$

a protože $\frac{1}{y}\arcsin y$ je monotónní funkce na nějakém pravém okolí nuly, totéž platí o funkci $x(1-x)$ a také o funkci $(1-x)$, a totéž o a-tých mocninách těchto funkcí, stačí podle limitního srovnávacího kritéria a podle Abelova kritéria vyšetřovat absolutní i neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^\varepsilon x^a \sin\frac{1}{x^\alpha}$$

pro vhodné $\varepsilon > 0$. To jsme učinili již v příkladu **??**, odkud víme, že pro $a > -1$ tento integrál konverguje absolutně. Vzhledem k podmínce z předchozí části jiné hodnoty a nemusíme vyšetřovat.

Závěr: pro $a > -1$ integrál konverguje, a to navíc absolutně. Jinak diverguje.

7. $\displaystyle\int_{1/2}^{+\infty} \frac{\cos\pi x}{\ln^\alpha 2x}\,dx$

Řešení:

Srovnáním s funkcí $|\cos(\pi x)|/x$ na okolí nekonečna dostaneme, že absolutně integrál nekonverguje pro žádné $\alpha > 0$.

Neabsolutně konverguje na $[1,+\infty)$ podle Dirichletova kritéria, neboť $\cos(\pi x)$ má omezenou primitivní funkci $|\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)| \le 1$ a $\ln^\alpha 2x \to 0$ monotónně pro každé $\alpha > 0$.

Na okolí 1/2 použijme odhady

$$\cos(\pi x) = \sin(\pi x - \pi/2) \approx (\pi x - \pi/2) = \pi\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\ln(2x) = \ln(1 + (2x - 1)) \approx (2x - 1) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

a tudíž

$$f(x) \approx \frac{\pi}{2^\alpha}\left(x - \frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}$$

odtud máme na absolutní i neabsolutní konvergenci (neboť integrand na $(1/2, 1]$ nemění znaménko) podmínku podle limitního srovnávacího kritéria, že $1-\alpha > -1$, tudíž $\alpha < 2$.

Závěr: integrál konverguje neabsolutně pro $0 < \alpha < 2$.

8. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}\frac{\ln x}{\ln(1+x)}x^\alpha\,dx$

Řešení:

U nuly použijte odhady

$$\ln(1+x) \approx x, \qquad x - 1 \approx 1$$

a podle limitního srovnávacího kritéria stačí vyšetřovat konvergenci integrálu

$$\int_0^\delta x^{\alpha+1/3-1}\ln x\,dx$$

Tento integrál konverguje pro $\alpha - 2/3 > -1$, tedy pro $\alpha > -1/3$

U jedničky použijeme odhady

$$x \approx 1, \quad \ln(1+x) \approx \ln 2, \quad \ln x \approx x - 1$$

a podle limitního srovnávacího kritéria stačí vyšetřovat integrál

$$\int_{1-\delta}^1 (x-1)^{2/3}$$

Tento integrál samozřejmě konverguje absolutně (pozornější si všimnou, že funkce má do jedničky dokonce spojité rozšíření).

Závěr: Integrál konverguje pro $\alpha > -1/3$, a to dokonce absolutně.

9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^\alpha}{\arctan^\beta x}\sin\frac{1}{x}\,dx$

Řešení:

U nuly použijeme odhady

$$\sin x^\alpha \approx x^\alpha, \qquad \operatorname{arctan}^\beta x \approx x^\beta$$

stačí tedy vyšetřovat integrál

$$\int_0^\delta x^{\alpha-\beta} \sin \frac{1}{x}\, dx$$

který lze použitím substituce $t = 1/x$ převést na integrál

$$\int_{1/\delta}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha-\beta+2}}\, dt$$

Ten konverguje absolutně pro $\alpha > \beta - 1$ a neabsolutně pro $\alpha > \beta - 2$. Absolutní konvergenci původního integrálu vyřešíme limitním srovnávacím kritériem, neabsolutní Abelem.

U nekonečna použijeme odhady

$$\operatorname{arctan} x \approx \pi/2, \qquad \sin(1/x) \approx 1/x$$

a poté substituci $t = x^\alpha$, čímž dostaneme pro konvergenci ekvivalentní integrál

$$\int_M^{+\infty} \frac{\sin t}{t}$$

který konverguje pouze neabsolutně, ale zato pro každé $\alpha > 0$.

Závěr: konverguje neabsolutně pro $\alpha > \beta - 2$.