22. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/ kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1. Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$, pak $\int_a^b f$ konverguje.

Věta 2. Nechť f a g jsou spojité na (a,b) a $\int_a^b g$ konverguje. Pak $\int_a^b f$ konverguje, právě tehdy, když konverguje $\int_a^b (f+g)$.

Věta 3. Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b)$. Pak integrál $\int_a^b f$ konverguje, právě tehdy když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $b' \in (a,b)$ takové, že pro každé dva body x_1, x_2 splňující $b' < x_1 < x_2 < b$ platí $\left|\int_{x_1}^{x_2} f\right| < \varepsilon$. Analogicky pro intervaly $(a,b]$.

Věta 4 (Ábel 2)**.** Nechť f a g jsou funkce spojité na intervalu $[a,b)$, funkce g nechť je na tomto intervalu monotónní a omezená.

1. Jestliže konverguje $\int_a^b f$, konverguje i integrál $\int_a^b fg$.
2. Pokud navíc $\lim_{x\to b-} g(x) \neq 0$, pak $\int_a^b f$ konveregnce, právě když konverguje integrál $\int_a^b fg$.

Věta 5 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konveregnce Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$ a nechť $a < b$. Nechť $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k funkci f na (a,b). Dále nechť $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ je na $[a,b)$ <u>monotónní</u> a spojitá. Pak platí:

(A) Jestliže $f \in \mathcal{N}(a,b)$ a g je omezená, pak $fg \in \mathcal{N}(a,b)$.

(D) Je-li F omezená na (a,b) a $\lim_{x\to b_-} g(x) = 0$, je $fg \in \mathcal{N}(a,b)$.

Příklady

Určete (v závislosti na parametru), zda daný integrál konverguje, respektive zda konverguje absolutně. Přitom uvažte $a,b,c \in \mathbb{R}$ a $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}^+$.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x^\alpha \, dx$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arcsin \frac{x}{x^2+1} \ln x \cos x \, dx$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin 2x}{x^\alpha} \, dx$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{e^{x^2}-1} \sin \frac{1}{x^2} \, dx$
5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin e^x \, dx$
6. $\displaystyle\int_0^{1} \arcsin^{a}(x(1-x)) \sin \frac{1}{x^\alpha} \, dx$
7. $\displaystyle\int_{1/2}^{+\infty} \frac{\cos \pi x}{\ln^\alpha 2x} \, dx$
8. $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} \frac{\ln x}{\ln(1+x)} x^\alpha \, dx$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^\alpha}{\arctan^{\beta} x} \sin \frac{1}{x} \, dx$