16. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta. *Mějme mocninnou řadu* $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *s poloměrem konvergence* $R > 0$. *Potom pro každé* x *takové, že* $|x - x_0| < R$ *platí, že*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k(x-x_0)^{k-1}.$$

Věta říká, že uvnitř konvergenčního kruhu lze derivovat řadu člen po členu. Věta platí v reálném i komplexním oboru.

Navíc platí, že derivovaná řada má stejný poloměr konvergence, jako původní řada.

Analogicky platí věta o integraci člen po členu.

Věta. *Mějme mocninnou řadu* $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *s poloměrem konvergence* $R > 0$. *Potom pro každé* x *takové, že* $|x - x_0| < R$ *platí, že funkce* F *definovaná předpisem*

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1}$$

má v bodě x *derivaci rovnou* $F'(x) = f(x)$.

Věta (Abelova sumační metoda). *Nechť řada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje. Nechť* R *je poloměr konvergence mocninné řady* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$. *Potom platí*

$$\lim_{x\to R-} \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Abelovou sumační metodou nazýváme metodu, kdy z *libovolné* řady $\sum a_k$ uděláme mocninnou přidáním x^k o poloměru konvergence R a spočítáme limitu

$$\lim_{x\to R-} \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k.$$

Tím lze přiřadit součet i některým divergentním řadám! Máme ale zaručeno, že pokud řada $\sum_k a_k$ konverguje, pak jsme ji touto metodou sečetli správně.

Příklady

1. Derivováním člen po členu sečtěte následující řady (uvnitř kruhu konvergence).

   (a) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

Řešení: Označme

$$f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

Formálním derivováním člen po členu dostaneme řadu

$$1 + x^2 + x^4 + \dots$$

což je geometrická řada s prvním členem 1 a kvocientem x^2. Zároveň je to mocninná řada s koeficienty střídavě 0 a 1, má tedy poloměr konvergence roven jedné. Původní řada má tedy poloměr konvergence také roven jedné a uvnitř kruhu konvergence platí

$$f'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Lze ověřit přímým výpočtem, že

$$\left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1-x^2},$$

tudíž

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \qquad |x| < 1.$$

(b) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

Řešení: Označme

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

Formálním derivováním člen po členu dostaneme řadu

$$1 - x^2 + x^4 + \dots$$

což je geometrická řada s prvním členem 1 a kvocientem $-x^2$. Zároveň je to mocninná řada s koeficienty střídavě 0 a ± 1, má tedy poloměr konvergence roven jedné. Původní řada má tedy poloměr konvergence také roven jedné a uvnitř kruhu konvergence platí

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Platí, že

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

tudíž

$$f(x) = \arctan x, \qquad |x| < 1.$$

Poznámka: Vztah platí pro $|x| \le 1$, k tomu je ale zapotřebí lepší teorie, než máme k dispozici.

(1) (1c) $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

POLOMĚR KONVERGENCE:

$$R=\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$$

KONVERGENCE V KRAJ. BODECH:

$x=1$: $\sum\frac{1}{n}$ DIV.

$x=-1$: $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ KONV. dle LEIBNIZE $\left(\frac{1}{n}\searrow 0\right)$

- Označme
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$
- Pak na $\underline{(-1,1)}$! platí

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{POSUN INDEXU}}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

Je tedy (viz vlnovky)

$$f'(x)=\frac{1}{1-x}\quad\text{pro } \underline{x\in(-1,1)}!\ \text{a}\ \int\frac{1}{1-x}\,dx\overset{C}{=}-\ln|1-x|$$

pro $x\in(-\infty,1)$ a $x\in(1,+\infty)$

$\Rightarrow$ pro $\underline{x\in(-1,1)}$!

$$f(x)=-\ln|1-x|\,(+C)\qquad \boxed{x=0\Rightarrow\sum\frac{x^n}{n}=0 \text{ a } \ln|1-x|=0\Rightarrow C=0}$$

- Podle ABELOVY VĚTY navíc platí, že ~~pro~~ $f(x)=-\ln|1-x|$

i pro $x=-1$, tj. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ABEL}}}{=}\lim_{x\to-1+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\lim_{x\to-1+}-\ln|1-x|$

$=\underline{\underline{-\ln 2}}.$

neboť řada

$\sum\frac{x^n}{n}$ $\underline{\text{KONVERGUJE}}$! pro $x=-1$.

$\to$ 1(a), 1(b) u tabule; PAK $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$

$\to$ pak ukázat 2(a)' $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$

$\to$

1d 2 $1+2x+3x^2+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$

POL. KONV: $\lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{n+1}{n+2} = \underline{1}$

$\Rightarrow$ řada konv. na $\underline{(-1,1)}$!

KONV. V KRAJNÍCH BODECH:

$x=1$: $\sum (n+1)$ DIV. dle nutné podmínky: $\lim (n+1) \neq 0$

$x=-1$: $\sum (n+1)(-1)^n$ — " ——— : $\lim (-1)^n(n+1) \neq 0$

Označme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$

INTEGROVÁNÍM ČLEN PO ČLENU DOSTANEME, ŽE

$f(x) = F'(x)$, kde $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} =$

$= \frac{x}{1-x}$ (pozor na první člen!)

Tedy $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ na $\underline{(-1,1)}$!

2. (a) $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$

Řešení: Máme sečíst řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k.$$

Podle „podílového kritéria" má poloměr konvergence jedna. Platí, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}.$$

Označme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$$

Potom na kruhu konvergence platí integrováním člen po členu, že

$$f(x) = F'(x), \qquad \text{kde} \qquad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} = \frac{x}{1-x}.$$

Odtud vyplývá, že

$$f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1$$

a odtud

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = xf(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1.$$

(b) $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$

Řešení: Řada má poloměr konvergence jedna, jak plyne z „podílového kritéria". Máme sečíst řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^2 x^k = x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^2 x^{k-1} =$$

což, podle věty o integrování člen po členu, je rovno

$$= x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} kx^k\right)' = x \cdot \left(x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} kx^{k-1}\right)' =$$

a znovu podle věty o integrování člen po členu a vztahu pro součet geometrické řady platí

$$= x \cdot \left(x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k\right)'\right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)'\right)' =$$

a nyní zbývá jen spočítat příslušné derivace

$$= x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} \right) \right)' = x \cdot \left(\frac{x}{(1+x)^2} \right)' =$$

$$= x \cdot \left(\frac{(1+x)^2 - 2x(1+x)}{(1+x)^4} \right) = x \cdot \frac{1-x^2}{(1+x)^4} = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}, \qquad |x| < 1.$$

(c) $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$

Řešení: Máme sečíst řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k.$$

Poloměr konvergence je jedna, jak plyne z „podílového kritéria". Podle věty o integraci člen po členu platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k+1} \right)' = \left(x^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \right)' =$$

$$= \left(x^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k \right)' \right)' = \left(x^2 \cdot \left(\frac{x}{1-x} \right)' \right)' = \left(x^2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \right)' =$$

$$= \frac{2x(1-x)^2 + 2x^2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2x - 4x^2 + 2x^3 + 2x^2 - 2x^3}{(1-x)^4} = \frac{2x}{(1-x)^3}, \qquad |x| < 1.$$

3. (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k}$

Řešení:

Již výše jsme spočetli, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k = \frac{2x}{(1-x)^3}, \qquad |x| < 1.$$

Dosazením $x = \frac{1}{2}$ dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^3} = 8.$$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{3^k}$

Řešení: Namísto $(-1)^k/3^k$ budeme psát x^k a potom dosadíme $x = -\frac{1}{3}$. Sečtěme tedy řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k.$$

Poloměr konvergence je roven jedné. Je

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k = x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k\right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} k x^k\right)'\right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)'\right)'\right)' =$$

$$= x \cdot \left(x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)'\right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)\right)'\right)' =$$

$$= x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'\right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{1+x}{(1-x)^3}\right)\right)' =$$

$$= x \cdot \left(\frac{x+x^2}{(1-x)^3}\right)' = \frac{x(1+4x+x^2}{(1-x)^4}.$$

Odvodili jsme, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k = \frac{x(1+4x+x^2}{(1-x)^4}, \qquad |x| < 1.$$

Nyní dosazením $x = -\frac{1}{3}$ do levé a pravé strany dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} k^3 = \frac{3}{128}.$$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

Řešení:

Řada konvegruje podle Leibnizova kritéria. Podle Abelovy věty je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{x \to 1-} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k.$$

Označme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k.$$

Potom na kruhu konvergence platí

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x}^{k-1} = -\frac{1}{1+x},$$

a tedy

$$f(x) = \int \frac{dx}{1+x} = -\ln(1+x) + C,$$

přičemž, protože $f(0) = 0$, je $C = 0$. Odtud vyplývá, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{x \to 1-} f(x) = -\ln 2.$$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

Řešení:

Řada je evidentně konvergentní. Lze ji samozřejmě sečíst elementárně pomocí vztahu

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Snadno tak dostaneme, že

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \to \infty} = 1.$$

Nicméně to zkusme Abelovou metodou. Za tím účelem sečteme řadu

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}.$$

Na kruhu konvergence je

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k},$$

$$f''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x},$$

a proto

$$f'(x) = \int \frac{1}{1-x}\, dx = -\ln(1-x) + C_1,$$

přičemž $f'(0) = 0$, a tedy $C_1 = 0$. Nyni integrací per partes (s funkcemi $u' = 1$ a $v = \ln(1-x)$) dostaneme

$$f(x) = x - x\ln(1-x) + \ln(1-x) + C_2,$$

opět je zřejmě $f(0) = 0$, a proto $C_2 = 0$. Nakonec, podle Abelovy věty, platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{x \to 1-} f(x) = 1 - 1 \cdot \ln(1) + \ln(1) = 1.$$