

16. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta. Mějme mocninnou řadu $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ s poloměrem konvergence $R > 0$. Potom pro každé x takové, že $|x - x_0| < R$ platí, že

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k(x - x_0)^{k-1}.$$

Věta říká, že uvnitř konvergenčního kruhu lze derivovat řadu člen po členu. Věta platí v reálném i komplexním oboru.

Navíc platí, že derivovaná řada má stejný poloměr konvergence, jako původní řada.

Analogicky platí věta o integraci člen po členu.

Věta. Mějme mocninnou řadu $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ s poloměrem konvergence $R > 0$. Potom pro každé x takové, že $|x - x_0| < R$ platí, že funkce F definovaná předpisem

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k + 1}$$

má v bodě x derivaci rovnou $F'(x) = f(x)$.

Příklady

1. Derivováním člen po členu sečtete následující řady (uvnitř kruhu konvergence).

(a) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

(c) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$

(b) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} (k + 1)x^k$

2. Integrovaním člen po členu sečtete následující řady (uvnitř kruhu konvergence).

(a) $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$

(c) $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$

(b) $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$

3. Najděte součet následujících řad.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{3^k}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$