15. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

1. typ $R\left(x, \sqrt[m]{x+a}\right)$

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

   Řešení:

   Použijeme substituci $t = \sqrt[6]{x}$. Potom

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \left(x^{1/6}\right)' = \frac{1}{6}x^{-5/6} = \frac{1}{6t^5},$$

   a tedy $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$. Odtud vyplývá, že

$$\int \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^6(1+2t^3+t^2)}\,6t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{1}{t(1+t^2+2t^3)}\,\mathrm{d}t.$$

   Trojčlen ve jmenovateli má zřejmě kořen -1 a lze jej tedy rozložit na tvar $(t+1)(2t^2-t+1)$. Dále postupujeme rozkladem na parciální zlomky.

$$\frac{1}{t(t+1)(2t^2-t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{2t^2-t+1}$$

   Přenásobením jmenovateli dostaneme

$$1 = A(t+1)(2t^2-t+1) + Bt(2t^2-t+1) + (Ct+D)t(t+1).$$

   Dosazením $t=0$ a $t=-1$ dostaneme, že $A=1$ a $B=-\frac{1}{4}$. Porovnáním koeficientu u t^3 máme, že $2A+2B+C=0$, tedy $C=-2A-2B=-\frac{3}{2}$, a porovnáním koeficientů u lineárního členu máme, že $B+D=0$, tedy že $D=-B=\frac{1}{4}$. Odtud vyplývá, že

$$\frac{1}{t(t+1)(2t^2-t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{4}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{8}\frac{6t-1}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}.$$

   Integrály prvních dvou členů jsou zřejmé, poslední člen integrujeme dalším rozkladem na

$$\frac{1}{8}\frac{6t-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}\frac{2t-\frac{1}{2}}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}} + \frac{1}{16}\frac{1}{t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}}.$$

   První ze sčítanců pak lze integrovat substitucí jmenovatele, druhý podle vzorce (viz poznámku v příkladu ??)

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+py+q} \stackrel{C}{=} \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2y+p}{\sqrt{4q-p^2}}, \qquad \text{je-li } 4q > p^2.$$

Kombinací všech výsledků dostaneme, že

$$\int \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x = 6\int \frac{1}{t(1+t^2+2t^3)}\,\mathrm{d}t \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} 6\ln t - \frac{6}{4}\ln(1+t) - \frac{18}{8}\ln\left(t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right) - \frac{6}{16}\frac{2}{\sqrt{2-\frac{1}{4}}}\arctan\frac{2t-\frac{1}{2}}{\sqrt{2-\frac{1}{4}}} \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} 6\ln t - \frac{3}{2}\ln(1+t) - \frac{9}{4}\ln\left(2t^2-t+1\right) - \frac{3}{2\sqrt{7}}\arctan\frac{4t-1}{\sqrt{7}} =$$

$$= \ln x - \frac{3}{2}\ln(1+\sqrt[6]{x}) - \frac{9}{4}\ln\left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1\right) - \frac{3}{2\sqrt{7}}\arctan\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}.$$

Ve druhém řádku jsme použili fakt, že $\ln(g(t)) \overset{C}{=} \ln(ag(t))$ pro každé $a>0$, tedy že rozšířením výrazu uvnitř logaritmu kladným číslem získáme až na konstantu stejný výraz (se stejným definičním oborem). Logaritmy ve výrazu můžeme ještě sjednotit do jednoho, například takto:

$$\frac{3}{4}\ln\frac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2\left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1\right)^3} - \frac{3}{2\sqrt{7}}\arctan\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}$$

(b) $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

Řešení:

Použijeme substitutci $t=\sqrt[6]{x+1}$. Potom $\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$ a

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-t^3}{1+t^2}\,6t^5\,\mathrm{d}t.$$

Protože

$$(-t^8+t^5):(t^2+1) = -t^6+t^4+t^3-t^2-t+1+\frac{t-1}{1+t^2}$$

je

$$\int \frac{1-t^3}{1+t^2}\,6t^5\,\mathrm{d}t = 6\int\left(-t^6+t^4+t^3-t^2-t+1+\frac{1}{2}\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} -\frac{6}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4-2t^3-3t^2+6t+3\ln(1+t^2)-6\arctan t,\qquad t=\sqrt[6]{x+1}.$$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}$.

Řešení:

Použijeme substituci $t = \sqrt[4]{x}$. Potom

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{4}x^{-3/4} = \frac{1}{4}t^{-3},$$

a tedy $\mathrm{d}x = 4t^3\,\mathrm{d}t$. Odtud

$$\int \frac{1}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4t^3}{(1+t)^3t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{4t}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t.$$

Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{4t}{(1+t)^3} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{C}{(1+t)^3}.$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme

$$4t = A(1+t)^2 + B(1+t) + C,$$

odkud dosazením $t=-1$ dostáváme, že $C=-4$. Dále máme, že

$$4t = (A+B+C) + (2A+B)t + At^2,$$

odkud ihned máme, že $A=0$ a $B=4$. Tudíž

$$\int \frac{4t}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{4}{(1+t)^2} - \frac{4}{(1+t)^3}\right)\mathrm{d}t \overset{C}{=} -\frac{4}{1+t} + \frac{2}{(1+t)^2}$$
$$= -\frac{2+4t}{(1+t)^2} = -\frac{2+4\sqrt[4]{x}}{(1+\sqrt[4]{x})^2}.$$

2. typ $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

Řešení: Definičním oborem funkce f je interval $[1,+\infty)$, maximální otevřenou podmnožinou je interval $(1,+\infty)$. Primitivní funkci stačí určit na tomto intervalu.

Výraz nejprve upravíme vytknutím

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1} = \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}$$

a poté použijeme substituci

$$t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

odkud máme

$$x = -\frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2t(1-t^2)+2t(1+t^2)}{(1-t^2)^2} = \frac{4t}{(1+t^2)^2}.$$

Odtud vyplývá, že

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t-1}{t+1}\cdot\frac{4t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t =$$

standardním rozkladem na parciální zlomky dostaneme

$$= \int \left(\frac{2}{1+t} - \frac{2t-2)}{1+t^2} - \frac{4}{(1+t^2)^2}\right)\mathrm{d}t = \int \left(\frac{2}{1+t} - \frac{2t}{1+t^2} + \frac{2}{1+t^2} - \frac{4}{(1+t^2)^2}\right)\mathrm{d}t$$

druhý sčítanec integrujeme substitucí jmenovatele, čtvrtý například substitucí $t = \operatorname{tg} y$

$$\stackrel{C}{=} 2\ln|1+t| - \ln(1+t^2) + 2\operatorname{arctan} t - 2\operatorname{arctan} t - \frac{2t}{1+t^2} = \ln\frac{(1+t)^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2},$$

zbývá dosadit za t.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

Řešení:

Upravme

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2/3}$$

a použijeme substituci

$$t = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/3}, \qquad x = \frac{t^3+1}{1-t^3}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{3t^2(1-t^3)+3t^2(1+t^3)}{(1-t^3)^2} = \frac{6t^2}{(1-t^3)^2}.$$

Odtud také vyplývá, že

$$x-1 = \frac{t^3+1}{1-t^3} - 1 = \frac{2t^3}{1-t^3}.$$

Dostáváme tak, že

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int \frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2/3}\mathrm{d}x = \int \frac{(1-t^3)^2}{4t^6}\cdot t^2\cdot\frac{6t^2}{(1-t^3)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{3}{2t^2}\,\mathrm{d}t \stackrel{C}{=} -\frac{3}{2t} = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

(c)

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Řešení:

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$$

tedy

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int t\frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{-4t\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \int \frac{-4t^2\mathrm{d}t}{(1-t^2)(1+t^2)} = \int \frac{-2}{1-t^2} + \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t =$$
$$2\mathrm{arctan}\, t - \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|$$

Dosazení a podmínky nechány na čtenáři.

3. typ $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

(a)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}}\,\mathrm{d}x$$

Řešení: Substituce $\sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{1}x = t$

$$x = \frac{(t-2)(t+2)}{2(1-t)}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-t^2+2t-4}{2(1-t)^2}$$

čili

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(t-2)(t+2)}{2(1-t)}\frac{1}{t+\frac{(t-2)(t+2)}{2(1-t)}}\frac{-t^2+2t-4}{2(1-t)^2}\mathrm{d}t =$$
$$\int \frac{1}{2}\frac{(t+2)(t-2)}{(1-t)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int 1 + 2\frac{t-1}{(t-1)^2} - \frac{3}{(t-1)^2}\mathrm{d}t =$$
$$\frac{1}{2}\left(t + 2\ln|t-1| + \frac{3}{t-1}\right)$$

Zbytek práce na čtenáři.

(374) Pomocí vhodné substituce vypočtěte
$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{-x^2+x+2}}.$$

<u>Řešení:</u>

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{-x^2+x+2}} \quad \left| \text{ polynom } -x^2+x+2 \text{ má reálné kořeny } 2,-1 \right| =$$

$$= \int \frac{dx}{1+(x+1)\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}} \quad \left| \begin{array}{c} t^2 = \frac{2-x}{x+1} \\ x = \frac{2-t^2}{t^2+1} \\ x+1 = \frac{3}{t^2+1} \\ dx = \frac{-6t}{(t^2+1)^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{-6t}{(t^2+1)^2}}{1+\frac{3}{t^2+1}t} \, dt =$$

$$= \int \frac{-6t}{(t^2+1)^2} \frac{t^2+1}{t^2+3t+1} \, dt = -6 \int \frac{t}{(t^2+1)(t^2+3t+1)} \, dt =$$

$$= \int \left(-\frac{4}{5} \frac{\sqrt{5}}{2t+3+\sqrt{5}} - \frac{2}{t^2+1} - \frac{4}{5} \frac{\sqrt{5}}{-2t-3+\sqrt{5}} \right) dt =$$

$$= -\frac{4\sqrt{5}}{5} \frac{1}{2} \ln \left| 2t+3+\sqrt{5} \right| - 2 \operatorname{arctg} t - \frac{4\sqrt{5}}{5} \left(-\frac{1}{2} \right) \ln \left| -2t-3+\sqrt{5} \right| + C =$$

$$= -\frac{2\sqrt{5}}{5} \ln \left| 2\sqrt{\frac{2-x}{x+1}} + 3 + \sqrt{5} \right| + \frac{2\sqrt{5}}{5} \ln \left| -2\sqrt{\frac{2-x}{x+1}} - 3 + \sqrt{5} \right| - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2-x}{x+1}} + C.$$

(375) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}} \left| \begin{array}{c} \text{polynom } x^2+x+1 \text{ nemá reálné kořeny} \\ \sqrt{x^2+x+1} = x+t \\ x = \frac{1-t^2}{2t-1} \\ x-1 = -\frac{t^2+2t-2}{2t-1} \\ x+t = \frac{t^2-t+1}{2t-1} \\ dx = \frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}}{-\frac{t^2+2t-2}{2t-1}\,\frac{t^2-t+1}{2t-1}}\,dt = \int \frac{2}{t^2+2t-2}\,dt = \int \left(-\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{t+1+\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{-t-1+\sqrt{3}}\right) dt =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|t+1+\sqrt{3}\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|-t-1+\sqrt{3}\right| =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x+1+\sqrt{3}}{x-\sqrt{x^2+x+1}-1+\sqrt{3}}\right| + C.$$

(376) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}.$$

<u>Řešení:</u>

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} \left| \begin{array}{c} \text{polynom } x^2-x+1 \text{ nemá reálné kořeny} \\ \sqrt{x^2-x+1}=t-x \\ x=\frac{t^2-1}{2t-1} \\ dx=\frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}}{\frac{t^2-1}{2t-1}+t-\frac{t^2-1}{2t-1}}\,dt = 2\int \frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}\,dt =$$

$$= \int \left(\frac{2}{t}-\frac{3}{2t-1}+\frac{3}{(2t-1)^2}\right) dt \left| \begin{array}{c} u=2t-1 \\ du=2dt \end{array} \right| = 2\ln|t| + \int \left(-\frac{3}{2u}+\frac{3}{2u^2}\right) du =$$

$$= 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|u| - \frac{3}{2u} = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t-1| - \frac{3}{2(2t-1)} + C =$$

$$= 2\ln\left|x+\sqrt{x^2-x+1}\right| - \frac{3}{2}\ln\left|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1\right| - \frac{1}{4x+2\sqrt{x^2-x+1}-2} + C.$$

(b)

$$f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{-x^2+x+2}}$$

Řešení: viz http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/specialni-integracni-metody.html

374

(c)

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

Řešení: viz http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/specialni-integracni-metody.html

375

(d)

$$f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x-1}}$$

Řešení: viz http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/specialni-integracni-metody.html

376

4. Ostatní

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$. **Řešení:**
   Použijeme substituci

$$t = \sqrt{x}+\sqrt{1+x}.$$

Potom

$$x = \left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2\cdot\frac{t^2-1}{2t}\cdot\frac{4t^2-2t^2+2}{4t^2} = \frac{t^2-1}{t}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}$$

a máme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{(t^2-1)(t^2+1)}{2t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\frac{(t-1)(t^2+1)}{t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\frac{t^3-t^2+t-1}{t^3}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{1}{2}\left(t-\ln|t|-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right).$$

Uvažujme funkci F definovanou přepisem $F(x) = F_k(x)$ na každém I_k. Aby funkce F byla spojitá, musí platit

$$\lim_{x\to(\frac{3\pi}{4}+k\pi)-} (-1)^k(-\cos x + \sin x) + c_k = \sqrt{2} + c_k =$$
$$= \lim_{x\to(-\frac{\pi}{4}+(k+1)\pi)+} (-1)^{k+1}(-\cos x + \sin x) + c_{k+1} = -\sqrt{2} + c_{k+1}$$

pro všechna $k \in \mathbb{Z}$.

Zvolíme tedy c_0 libovolné a $c_k = c_0 + 2k\sqrt{2}$ pro všechna $k \in \mathbb{Z}$. Tím je určena spojitá funkce F na $\mathbb{R}$. Protože derivace funkce F konverguje k hodnotě (spojité) funkce $|\sin x + \cos x|$ pro x blížící se hodnotě $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ zleva i zprava pro všechna celá k, jsou podle věty o limitě derivací a jednostranných derivacích limita zleva i zprava funkce F' rovny derivaci F v bodě $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ a ta je rovna hodnotě funkce $|\sin x + \cos x|$ v bodě $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ pro všechna celá k. Proto je F primitivní funkcí k $|\sin x + \cos x|$ na celém $\mathbb{R}$. Přičtením libovolné konstanty můžeme docílit, že hodnota c_0 je libovolné reálné číslo.

Řešením tedy je, že

$$\int |\sin x + \cos x| \,\mathrm{d}x = F_0(x) + \mathbf{C},$$

kde $F_0(x) = (-1)^k(-\cos x + \sin x) + k2\sqrt{2}$ pro $x \in [-\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + (k+1)\pi]$ pro všechna k celá. ■

Všimněte si, že v prvním z předchozích dvou příkladů jsme použili explicitně tvrzení o existenci primitivní funkce ke spojité funkci [I1, Věta 49], kdežto ve druhém jsme se bez toho obešli. Použili jsme ovšem jiné tvrzení (o limitě derivace a jednostranné derivaci [DII, Věta 80]). V obou případech si můžete rozmyslet, jak by vypadalo užití druhého z obou možných postupů.

§3. Derivace součinu a metoda per partes. Není příliš časté, aby funkce byla zapsána ve tvaru derivace součinu dvou funkcí jako v následujícím příkladu.

P ř í k l a d Spočtěte $\int e^x(\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int e^x(\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x = \int \Big((e^x)' \sin x + e^x(\sin x)'\Big)\,\mathrm{d}x = e^x \sin x + \mathbf{C}$ na $\mathbb{R}$. ■

Mnohem častěji je možné vyjádřit si zadanou funkci jako součin derivace jedné funkce s funkcí druhou, tedy jen jako část vzorce pro derivaci součinu. To nám umožní použít *metodu per partes*, která spočívá v následujícím pozorování.

Je-li $G'(x) = g(x)$ a $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a,b)$, pak platí, že

$$\int F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int e^{-|x|}\,dx$$

$x \in (0, \infty)$

$$\int e^{-x}dx = -e^{-x} + c_1$$

$x \in (-\infty, 0)$

$$\int e^{x}\,dx = e^{x} + c_2$$

$$\lim_{x\to 0-} e^{x} + c_2 = 1 + c_2$$

$$\lim_{x\to 0+} -e^{-x} + c_1 = -\frac{1}{e} + c_1$$

chceme $\qquad 1 + c_2 = -\frac{1}{e} + c_1$

$$c_2 = -\frac{1}{e} - 1 + c_1$$

pak

$$F(x) = \begin{cases} e^{x} - \frac{1}{e} - 1 + c_1 & x \in (-\infty, 0) \\ -\frac{1}{e} + c_1 & \\ -e^{-x} + c_1 & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

$\int |\sin x| \, dx$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in (0, \pi) + 2k\pi \\ -\sin x & x \in (\pi, 2\pi) + 2k\pi \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + C_k & x \in (0, \pi) + 2k\pi \\ \cos x + C_k' & x \in (\pi, 2\pi) + 2k\pi \end{cases}$$

- $\lim_{x \to \pi -} -\cos x + C_0 = 1 + C_0$

  $\lim_{x \to \pi +} \cos x + C_0' = -1 + C_0'$

  $\rightarrow \quad C_0' = 2 + C_0$

- $\lim_{x \to 2\pi -} \cos x + 2 + C_0 = 3 + C_0$

  $\lim_{x \to 2\pi +} -\cos x + C_1 = -1 + C_1$

  $\rightarrow \quad C_1 = 4 + C_0$

$\rightarrow \quad C_k = 4k + C_0$

$C_k' = 2 + C_k = 2 + 4k + C_0$

$f(\pi + 2k\pi) = 1 + C_k$

$f(2\pi + 2k\pi) = -1 + C_k$

Řešení. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\, dx = \int \frac{1+\cos x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int 1\, dx + \frac{1}{2}\int \cos x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \mathbf{C}$ na $\mathbb{R}$. ■

§2. **Lepení primitivních funkcí.** Pokud umíme nalézt primitivní funkci k dané funkci na některých intervalech (a, b), ale neumíme to přímo pro maximální intervaly, na kterých existuje, pak užíváme často *„metodu lepení"* primitivních funkcí.

Příklad Spočtěte $\int |x|\, dx$.

Řešení. Snadno nahlédneme, že $\int |x|\, dx = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + \mathbf{C}$ na intervalu $(0, \infty)$ a že $\int |x|\, dx = \int (-x)\, dx = -\frac{x^2}{2} + \mathbf{C}$ na intervalu $(-\infty, 0)$. Tedy pro všechna $c \in \mathbb{R}$ je $\frac{x^2}{2} + c$ primitivní funkcí k $|x|$ na intervalu $(0, \infty)$ a pro všechna $d \in \mathbb{R}$ je $-\frac{x^2}{2} + d$ primitivní funkcí k $|x|$ na intervalu $(-\infty, 0)$.

Protože funkce $|x|$ je spojitá na $\mathbb{R}$, existuje primitivní funkce k $|x|$ na $\mathbb{R}$.

Je-li F nějaká primitivní funkce k funkci $|x|$ na celém $\mathbb{R}$, pak $F(x) = \frac{x^2}{2} + c$ na intervalu $(0, \infty)$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ a $F(x) = -\frac{x^2}{2} + d$ na intervalu $(-\infty, 0)$ pro nějaké $d \in \mathbb{R}$. Navíc, protože F má v každém bodě x intervalu $(-\infty, \infty)$ vlastní derivaci $|x|$, musí být F spojitá na $\mathbb{R}$. K tomu je nutnou a postačující podmínkou to, že platí

$$\lim_{x \to 0_-} F(x) = \lim_{x \to 0_+} F(x),$$

a tedy $c = d$. Funkce F je proto rovna funkci $(\operatorname{sgn} x)\frac{x^2}{2} + c$ na celém $\mathbb{R}$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ a vzhledem k tomu, že všechny primitivní funkce na intervalu jsou určeny jednoznačně až na přičtení konstantní funkce, jsou funkce tvaru $(\operatorname{sgn} x)\frac{x^2}{2} + c$ všemi primitivními funkcemi k $|x|$ na maximálním intervalu $(-\infty, \infty)$, tj.

$$\int |x|\, dx = (\operatorname{sgn} x)\frac{x^2}{2} + \mathbf{C} \text{ na } (-\infty, \infty).$$

■

Příklad Spočtěte $\int |\sin x + \cos x|\, dx$.

Řešení. Protože $\sin x + \cos x = \sin x + \sin(x + \frac{\pi}{2}) = 2\sin(x + \frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{4}$, platí $|\sin x + \cos x| = (-1)^k(\sin x + \cos x)$, pokud $x \in I_k = (-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi)$, kde k je libovolné celé číslo. Snadno nyní zjistíme, že funkce

$$F_k(x) = (-1)^k(-\cos x + \sin x) + c_k$$

je primitivní k funkci $|\sin x + \cos x|$ na intervalu I_k pro každé celé k a libovolné reálné c_k.