13. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Buď $R(\cdot,\cdot)$ racionální funkce dvou proměnných.

1. Jestliže $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, potom lze užít substituci $t = \sin x$.
2. Jestliže $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, potom lze užít substituci $t = \cos x$.
3. Jestliže $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, potom lze užít substituci $t = \operatorname{tg} x$, je-li $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, kde k je celé číslo. Transformační vztahy jsou

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}, \qquad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2} \tag{1}$$

4. Vždy lze užít substituci $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, , je-li $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, kde k je celé číslo. Pokud ale lze užít některou z výše uvedených substitucí, dáváme jí přednost. Transformační vztahy mají podobu

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{2}$$

Příklady

1. (a) $f(x) = \dfrac{3\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$

Řešení:

Použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$. Pak platí, že

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = (\operatorname{tg}^2 x + 1)\,dx = (t^2+1)\,dx \implies dx = \frac{dt}{t^2+1}$$

Dostáváme tak, že

$$\int \frac{3\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}\,dx = \int \frac{3t^2+1}{t^2+3}\frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

který dále řešíme rozkladem na parciální zlomky. Ve zlomku

$$\frac{3t^2+1}{(t^2+3)(t^2+1)}$$

formálně pišme y místo t^2. Pak podle věty o rozkladu na parciální zlomky máme, že

$$\frac{3y+1}{(y+3)(y+1)} = \frac{A}{y+3} + \frac{B}{y+1}$$

$$3y + 1 = A(y + 1) + B(y + 3)$$

a dosazením $y = -1$ dostaneme, že $B = -1$, dosazením $y = -3$ dostaneme, že $A = 4$. Platí tedy, že

$$\frac{3t^2 + 1}{(t^2 + 3)(t^2 + 1)} = \frac{4}{t^2 + 3} - \frac{1}{t^2 + 1}$$

Nyní dokončíme integraci

$$= \int \frac{3t^2 + 1}{t^2 + 3} \frac{1}{t^2 + 1} \, dt = \int \left(\frac{4}{t^2 + 3} - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt \overset{C}{=} \frac{4}{\sqrt{3}} \text{arctan} \, \frac{t}{\sqrt{3}} - \text{arctan} \, t$$
$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \text{arctan} \, \frac{\text{tg} \, x}{\sqrt{3}} - x$$

(b) $f(x) = \text{tg}^{\,5} x$

Řešení: Použijeme substituci $t = \text{tg}\, x$. Pak platí, že

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = (\text{tg}^{\,2} x + 1) \, dx = (t^2 + 1) \, dx \implies dx = \frac{dt}{t^2 + 1}$$

Dostáváme tak

$$\int \text{tg}^{\,5} x \, dx = \int \frac{t^5}{t^2 + 1} \, dt = \int \left(t^3 - t + \frac{t}{t^2 + 1} \right) dt \overset{C}{=} \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(1 + t^2)$$
$$= \frac{1}{4} \text{tg}^{\,4} x - \frac{1}{2} \text{tg}^{\,2} x + \frac{1}{2} \ln(1 + \text{tg}^{\,2} x)$$

(c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \sin x}$

Řešení: Použijeme substituci $t = \text{tg}\, \frac{x}{2}$. Pak platí, že

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\text{tg}^{\,2} \frac{x}{2} + 1}{2} = \frac{t^2 + 1}{2} \implies dx = \frac{2 \, dt}{t^2 + 1}$$

a dále platí

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \text{tg} \, \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2 \text{tg} \, \frac{x}{2}}{1 + \text{tg}^{\,2} \frac{x}{2}} = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

Dostáváme tak, že

$$\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} \, dx = \int \frac{2t}{t^2 + 1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2t}{t^2 + 1}} \cdot \frac{2}{t^2 + 1} \, dt = \int \frac{4t}{(t^2 + 1)(t^2 + 2t + 1)} \, dt$$
$$= \int \frac{4t}{(t^2 + 1(t + 1)^2} \, dt =$$

a nyní postupujeme rozkladem na parciální zlomky, který hledáme ve tvaru

$$\frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{Ct+D}{t^2+1}$$

Odkud přenásobením vyplývá

$$4t = A(t+1)(t^2+1) + B(t^2+1) + (Ct+D)(t+1)^2$$

Dosazením $t = -1$ dostaneme, že $B = -2$. Dosazením $t = i$ dostaneme

$$4i = (Ci+D)(1+i)^2 = (Ci+D) \cdot 2i$$

$$2 = Ci + D$$

odkud plyne, že $C = 0$ a $D = 2$. Zpětným dosazením dostaneme

$$4t = A(t+1)(t^2+1) - 2(t^2+1) + 2(t+1)^2$$

a porovnáním absolutním členů vidíme, že $0 = A - 2 + 2$, tedy, že $A = 0$. Hledaný rozklad má tedy tvar

$$\frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2} = -\frac{2}{(t+1)^2} + \frac{2}{t^2+1}$$

Dokončeme integraci.

$$= \int \frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2} = -\int \frac{2}{(t+1)^2}\,dt + \int \frac{2}{t^2+1}\,dt \overset{C}{=} \frac{2}{t+1} + 2\arctan t = \frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + x$$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x \sin^3 x}$

Řešení: Protože $f(\sin x, \cos x) = f(-\sin x, -\cos x)$, použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$. Protože

$$\frac{dx}{\cos x \sin^3 x} = \frac{dx}{\cos^2 x}\frac{1}{\operatorname{tg} x}\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{dt}{t}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = \frac{t^2+1}{t^3}\,dt$$

dostáváme

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x} = \int \frac{t^2+1}{t^3}\,dt \overset{C}{=} \ln|t| - \frac{1}{2}t^2 = \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}$$

Podotkněme, že platí

$$\frac{\cos^2 x}{2\sin^2 x} \overset{C}{=} \frac{\cos^2 x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin^2 x}$$

(392) Pomocí vhodné substituce vypočtěte
$$\int \frac{\sin^3 x}{1+4\cos^2 x+3\sin^2 x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+4\cos^2 x+3\sin^2 x}\,dx \left| \begin{array}{c} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx \end{array} \right| = \int \frac{t^2-1}{1+4t^2+3-3t^2}\,dt =$$
$$= \int \frac{t^2+4-5}{t^2+4}\,dt = \int \left(1-5\frac{1}{t^2+4}\right) dt = t-\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C =$$
$$= \cos x-\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{2}+C.$$

(393) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\, dt = \int \frac{1}{1+2t^2}\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{1}{2}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) + C.$$

(396) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{2-\cos x}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{2-\cos x} \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{2}{3t^2+1}\,dt = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

(399) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}\, dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}\, dx = \int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 1}\, dx \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt \end{array} \right| = \int \frac{t}{t-1} \frac{1}{1+t^2}\, dt =$$
$$= \int \frac{t}{(t-1)(t^2+1)}\, dt = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{1}{2} \frac{1-t}{t^2+1} \right) dt =$$
$$= \frac{1}{2} \ln|t-1| + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+1}\, dt + \int \frac{dt}{t^2+1} \right) =$$
$$= \frac{1}{2} \ln|t-1| - \frac{1}{4} \ln\left|t^2+1\right| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C =$$
$$= \frac{1}{2} \ln|\operatorname{tg} x - 1| - \frac{1}{4} \ln\left|\operatorname{tg}^2 x + 1\right| + \frac{x}{2} + C.$$

(400) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx \left| \begin{array}{c} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{2-\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{2+2t^2-2t}{2+2t^2+1-t^2}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$=4\int \frac{t^2-t+1}{(1+t^2)(t^2+3)}\,dt = 2\int \frac{2+t}{t^2+3}\,dt - 2\int \frac{t}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{2t}{t^2+3}\,dt + 4\int \frac{dt}{t^2+3} - 2\int \frac{t}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{2t}{t^2+3}\,dt + \frac{4}{3}\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1} - 2\int \frac{t}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \ln\left|t^2+3\right| + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} - \ln\left|1+t^2\right| + C =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+3\right| - \ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right| + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.$$

(398) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\cos^3 x}{2-\sin x}\,dx.$$

<u>Řešení:</u>

$$\int \frac{\cos^3 x}{2-\sin x}\,dx \left| \begin{array}{c} t=\sin x \\ dt=\cos x\,dx \end{array} \right| = \int \frac{1-t^2}{2-t}\,dt = \int \left(2+t+\frac{3}{t-2}\right)\,dt =$$

$$= 2t+\frac{t^2}{2}+3\ln|t-2|+C = 2\sin x+\frac{\sin^2 x}{2}+3\ln|\sin x-2|+C.$$

(346) Vypočtěte

$$\int \max\{1, x^2\}\, dx.$$

Řešení:

Pro $|x| \leq 1$ platí

$$\int \max\{1, x^2\}\, dx = \int 1\, dx = x + C.$$

Je-li $|x| > 1$, platí

$$\int \max\{1, x^2\}\, dx = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Protože výsledná funkce musí být spojitá, platí

$$\int \max\{1, x^2\}\, dx = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} + C & \text{pro } x < -1, \\ x + C & \text{pro } |x| \leq 1, \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} + C & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$

(e) $f(x) = \dfrac{\sin^3 x}{1 + 4\cos^2 x + 3\sin^2 x}$

Řešení:

http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/specialni-integracni-metody.html 392

(f) $f(x) = \dfrac{1}{1 + \sin^2 x}$

Řešení:

393

(g) $f(x) = \dfrac{1}{2 - \cos x}$

Řešení: 396

(h) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x - \cos x}$

Řešení: 399

(i) $f(x) = \dfrac{2 - \sin x}{2 + \cos x}$

Řešení: 400

(j) $f(x) = \dfrac{\cos^3 x}{2 - \sin x}$

Řešení: 398

2. (a) $f(x) = \max\{1, x^2\}$

Řešení:

http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/zakladni-integracni-metody.html 346

(b) $f(x) = \sqrt{x^6}$

Řešení:

Platí, že $\sqrt{x^6} = |x^3|$. Na intervalu $x \in (0, +\infty)$ platí, že

$$\int \sqrt{x^6}\, dx = \int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + C_1$$

Na intervalu $x \in (-\infty, 0)$ platí, že

$$\int \sqrt{x^6}\, dx = \int (-x^3)\, dx = -\frac{x^4}{4} + C_2$$

Primitivní funkce ovšem existuje na celém $\mathbb{R}$, pokud se obě funkce shodují v bodě 0, tedy pokud $C_1 = C_2$ (princip lepení). Primitivní funkce jsou tedy určeny vztahy

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^4}{4} + C & x < 0 \\ C & x = 0 \\ \frac{x^4}{4} + C & x > 0 \end{cases}$$

kde C značí všude stejnou konstantu, avšak libovolně volenou.

(c) $f(x) = |\sin x|$

Řešení:

Protože f je spojitá na $\mathbb{R}$, má také na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Tudíž má také primitivní funkci na všech otevřených podmnožinách $\mathbb{R}$ a tato primitivní funkce musí být ve všech bodech spojitá, neboť má ve všech bodech vlastní derivaci $|\sin x|$.

Nejprve určíme neurčitý integrál k f na intervalech $(0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ a $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, kde k je libovolné celé číslo. Protože

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \\ -\sin x & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \end{cases}$$

platí, že libovolná primitivní funkce k funkci f na $\mathbb{R}$ má tvar

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + A_k & x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \\ \cos x + B_k & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \end{cases}$$

kde A_k, B_k jsou konstanty. V bodech $2k\pi$ je potřeba zajistit, aby funkce F byla spojitá, a tudíž limita zleva byla rovna limitě zprava. Z toho vyplývá, že

$$\begin{aligned} -\cos x + A_k = \cos x + B_{k-1} \qquad &\text{pro } x = 2k\pi \implies -1 + A_k = 1 + B_{k-1} \\ &\implies A_k = 2 + B_{k-1} \\ -\cos x + A_k = \cos x + B_k \qquad &\text{pro } x = \pi + 2k\pi \implies 1 + A_k = -1 + B_k \\ &\implies B_k = A_k + 2 = 4 + B_{k-1} \end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že funkce F je jednoznačně určena volbou kterékoliv konstanty A_k nebo B_k pro jedno libovolně volené celé číslo k.

(d) $f(x) = \sqrt{1 - \sin 2x}$

Řešení:

Sledujte výpočet.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - \sin 2x}\, \mathrm{d}x &= \int \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x}\, \mathrm{d}x \\ &= \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2}\, \mathrm{d}x = \int |\cos x - \sin x|\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Nyní hledejme primitivní funkci zvlášť na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$, kde

$$\int |\cos x - \sin x|\, \mathrm{d}x = \int (\cos x - \sin x)\, \mathrm{d}x = \sin x + \cos x + C_1$$

a na intervalu $(\frac{\pi}{4}, \pi)$, kde

$$\int |\cos x - \sin x|\, \mathrm{d}x = \int (\sin x - \cos x)\, \mathrm{d}x = -\cos x - \sin x + C_2.$$

Abychom dostali primitivní funkci na celém intervalu $(0, \pi)$, musíme zajistit, aby v bodě $\frac{\pi}{4}$ byla spojitá, tedy aby platilo

$$\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + C_1 = -\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} + C_2$$

$$\sqrt{2} + C_1 = -\sqrt{2} + C_2$$

$$C_2 = 2\sqrt{2} + C_1.$$

Volbou jedné z konstant C_1 nebo C_2 je tedy primitivní funkce jednoznačně určena. Naopak, jednu z těchto konstant můžeme volit zcela libovolně.

Je možné ověřit, že nalezená funkce je v bodě $\frac{\pi}{4}$ je diferencovatelná (výpočtem derivace zleva a zprava pomocí limity) a derivace má správnou hodnotu. Není to ale nutné, protože funkce f je spojitá na $(0, \pi)$ a primitivní funkce tedy existovat musí, je nutně spojitá (neboť má vlastní derivaci v každém bodě) a na intervalech $(0, \pi/4)$ a $(\pi/4, \pi)$ je až na konstantu určena jednoznačně nalezenými vztahy. Dodefinovat ji v $\pi/4$ lze díky požadavku spojitosti pouze jedním způsobem.