12. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

$$\tan^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$$

Příklady

Najděte primitivní funkce na největším možném intervalu:

1. (a) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

Řešení: Zlomek již máme připraven ve tvaru vhodném k integraci. Použijeme substituci $x = \operatorname{tg} t$. Dostaneme, že

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t+1)^3}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int \cos^4 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2t+\cos^2 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{8}\int (3+4\cos 2t+\cos 4t)\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{3}{8}t+\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{32}\sin 4t$$
$$= \frac{3}{8}t+\frac{1}{2}\sin t\cos t+\frac{1}{16}\sin 2t(2\cos^2 t-1)$$
$$= \frac{3}{8}\arctan x+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{16}\frac{x}{x^2+1}\left(\frac{2}{x^2+1}-1\right)$$
$$= \frac{3}{8}\arctan x+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{8}\frac{x(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{3}{8}\arctan x+\frac{1}{8}\frac{3x^3+5x}{(x^2+1)^2}$$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$

Řešení: Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{\mathrm{d}x+E}{(x^2+x+1)^2}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x^2+3x-2 = A(x^2+x+1)^2+(Bx+C)(x^2+x+1)(x-1)+(\,\mathrm{d}x+E)(x-1)$$

Roznásobením pravé strany máme

$$x^2+3x-2 = A-C-E+2Ax-Bx-Dx+Ex+3Ax^2+Dx^2+2Ax^3+Cx^3+Ax^4+Bx^4$$

odkud porovnáním koeficientů dostaneme, že

$$A=\frac{2}{9},\ B=-\frac{2}{9},\ C=-\frac{4}{9},\ D=\frac{1}{3},\ E=\frac{8}{3}$$

Hledaný rozklad má tedy tvar

$$\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}=\frac{2}{9}\frac{1}{x-1}-\frac{2}{9}\frac{x+2}{x^2+x+1}+\frac{1}{3}\frac{x+8}{(x^2+x+1)^2}$$

Jednotlivé zlomky budeme integrovat zvlášť. Platí, že

$$\int \frac{2}{9}\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{2}{9}\ln|x-1|$$

$$-\frac{2}{9}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{9}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=}-\frac{1}{9}\ln(x^2+x+1)-\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

a nakonec

$$\frac{1}{3}\int \frac{x+8}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x+\frac{5}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=}$$

(Druhý integrál počítáme převedením jmenovatele na kanonický tvar $(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1]$ a substitucí $\frac{2x+1}{\sqrt{3}}=\operatorname{tg} t$.)

$$\stackrel{C}{=}\frac{5}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Dohromady dostaneme po úpravě

$$\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{1}{3}\frac{5x+2}{x^2+x+1}+\frac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$$

(c) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}$

Řešení: Jmenovatel lze rozložit na součin kvadratických trojčlenů

$$(x^4+x^2+1)^2=(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2$$

Z toho vyplývá, že rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Kx+L}{x^2-x+1}+\frac{Mx+N}{(x^2-x+1)^2}$$

Například metodou neurčitých koeficientů dostaneme, že

$$A=B=C=D=L=N=\frac{1}{4},\quad K=M=-\frac{1}{4}$$

Integrací jednotlivých zlomků dostaneme po úpravách

$$\int \frac{1}{4}\frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{8}\ln(x^2+x+1)$$

$$\int \frac{1}{4}\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{6\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{12}\frac{x-1}{x^2+x+1}$$

$$\int -\frac{1}{4}\frac{x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{8}\ln(x^2-x+1)$$

$$\int -\frac{1}{4}\frac{x-1}{(x^2-x+1)^2}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{6\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{12}\frac{x+1}{x^2-x+1}$$

Sečtením a úpravami dostaneme, že

$$\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{C}{=} \frac{5}{12\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{12\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{8}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{6}\frac{2x^2+1}{x^4+x^2+1}$$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+x+1)^2}$

Řešení: Výsledný zlomek máme přímo ve tvaru rozkladu na parciální zlomky, budeme tedy přímo počítat integrál. Provedeme jej převedením jmenovatele na čtverec a goniometrickou substitucí.

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]^2}\,\mathrm{d}x = \frac{16}{9}\int \frac{1}{[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1]^2}\,\mathrm{d}x =$$

Nyní použijeme substituci $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} t$ a dostaneme, že

$$= \frac{16}{9}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{(\operatorname{tg}^2+1)^2}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{4\sqrt{3}}{9}(t+\sin t\cos t)$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{3}}{9}\frac{2x+1}{\sqrt{(2x+1)^2+(\sqrt{3})^2}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(2x+1)^2+(\sqrt{3})^2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{(x^3+1)^2}$

Řešení: Platí, že

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

Rozklad tedy musíme hledat ve tvaru

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} + \frac{Ex+F}{(x^2-x+1)^2}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme

$$\begin{aligned}1 &= A(x+1)(x^2-x+1)^2 + B(x^2-x+1)^2 \\ &+ (Cx+D)(x+1)^2(x^2-x+1) + (Ex+F)(x^2-x+1)^2\end{aligned}$$

Roznásobením pravé strany máme

$$1 = A+B+D+F-Ax-2Bx+Cx+Dx+2Fx+Ex+Ax^2+3Bx^2+Cx^2+Fx^2+2Ex^2+$$

$$+Ax^3-2Bx^3+Dx^3+Ex^3-Ax^4+Bx^4+Cx^4+Dx^4+Ax^5+Cx^5$$

odkud sestavíme porovnáním koeficientů soustavu rovnic

$$\begin{aligned}1 &= A+B+D+F \\ 0 &= -A-2B+C+D+E+2F \\ 0 &= A+3B+C+F+2E \\ 0 &= A-2B+D+E \\ 0 &= -A+B+C+D \\ 0 &= A+C\end{aligned}$$

jejíž řešení je

$$A=\frac{2}{9},\ B=\frac{1}{9},\ C=-\frac{2}{9},\ D=\frac{1}{3},\ E=-\frac{1}{3},\ F=\frac{1}{3}$$

a hledaný rozklad tedy má tvar

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} = \frac{2}{9}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{9}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{9}\frac{2x-3}{x^2-x+1} - \frac{1}{3}\frac{x-1}{(x^2-x+1)^2}$$

Budeme integrovat zvlášť jednotlivé zlomky. Platí, že

$$\int \frac{2}{9}\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{2}{9}\ln|x+1|$$

$$\int \frac{1}{9}\frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{1}{9}\frac{1}{x+1}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{9}\frac{2x-3}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{9}\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{2}{9}\frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \\ &\overset{C}{=} \frac{1}{9}\ln(x^2-x+1) - \frac{4}{9\sqrt{3}}\operatorname{arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

a nakonec

$$\int \frac{1}{3}\frac{x-1}{(x^2-x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{6}\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{6}\frac{1}{(x^2-x+1)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{6}\frac{1}{x^2-x+1} - \int \frac{1}{6}\frac{1}{(x^2-x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Zbylý integrál vypočteme takto:

$$\int \frac{1}{6}\frac{1}{(x^2-x+1)^2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{6}\frac{16}{9}\frac{1}{\left[\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]^2}\ \mathrm{d}x =$$

nyní aplikujeme substituci tg $t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$, přičemž máme, že $\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x$, a proto

$$= \int \frac{1}{6}\frac{8}{3\sqrt{3}}\frac{1}{(\mathrm{tg}^{\,2} t+1)^2}\,\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{4}{9\sqrt{3}}\cos^4 t\,\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{4}{9\sqrt{3}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$
$$\overset{C}{=} \frac{4}{9\sqrt{3}}\frac{t+\sin t\cos t}{2} = \frac{2}{9\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{9\sqrt{3}}\frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^2+3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(2x-1)^2+3}}$$
$$= \frac{2}{9\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{18}\frac{(2x-1)}{x^2-x+1}$$

Dáme-li jednotlivé výsledky dohromady, dostáváme

$$\int \frac{1}{(x^3+1)^2}\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} - \frac{1}{9(x+1)} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9}\frac{x+1}{x^2-x+1} =$$
$$= \frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\frac{x}{x^3+1}$$

(f) $f(x) - \dfrac{3}{16}\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

Řešení: Integrujeme pomocí substituce $x = \mathrm{tg}\ t$.

$$\int -\frac{3}{16}\frac{1}{(x^2+1)^2}\ \mathrm{d}x = -\frac{3}{16}\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} -\frac{3}{32}(t+\sin t\cos t)$$
$$= -\frac{3}{32}\arctan x - \frac{3}{32}\frac{x}{x^2+1}\int -\frac{1}{8}\frac{1}{(x^2+1)^3}\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{8}\int \cos^4 t\,\mathrm{d}t =$$

Použitím vztahů $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$ a $\cos^2 2t = \frac{1}{2}(1+\cos 4t)$ dostaneme, že

$$= -\frac{1}{64}\,(3+4\cos 2t+\cos 4t)\ \mathrm{d}t \overset{C}{=} -\frac{1}{64}\left(3t+2\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 4t\right) =$$
$$= -\frac{3}{64}t - \frac{1}{16}\sin t\cos t - \frac{1}{64}\sin t\cos t(2\cos^2 t-1)$$
$$= -\frac{3}{64}\arctan x - \frac{1}{16}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{64}\frac{x}{x^2+1}\frac{1-x^2}{x^2+1} =$$
$$= -\frac{3}{64}\arctan x - \frac{1}{64}\frac{3x^3+5x}{(x^2+1)^2}$$

(g) $f(x) = \dfrac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}$.

Řešení:

Proveďme substituci $t = x^5$.

$$\int \frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{t}{(t^2+2t+2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{10}\int \frac{2t}{(t+1)^2+1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{10}\int \frac{2t+2-2}{\left((t+1)^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}t == \frac{1}{10}\int \frac{2t+2}{\left((t+1)^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{5}\int \frac{1}{\left((t+1)^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}t =$$

Na první integrál použijeme substituci $u = (t+1)^2+1$, na druhý $t+1 = \mathrm{tg}\ y$ a s přihlédnutím ke vztahům

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\ ^2 y+1} = \cos^2 y, \qquad \mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 y}\,\mathrm{d}y$$

dostaneme, že

$$= \frac{1}{10}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} - \frac{1}{5}\int \cos^2 y\,\mathrm{d}y \overset{C}{=} -\frac{1}{10}\frac{1}{u} - \frac{1}{5}\frac{y+\sin y\cos y}{2} =$$

$$= -\frac{1}{10}\frac{1}{(t+1)^2+1} - \frac{1}{10}y - \frac{1}{10}\mathrm{tg}\ y\cos^2 y =$$

$$= -\frac{1}{10}\frac{1}{t^2+2t+2} - \frac{1}{10}\mathrm{arctan}\ (t+1) - \frac{1}{10}\frac{\mathrm{tg}\ y}{\mathrm{tg}\ ^2 y+1} =$$

$$= -\frac{1}{10}\frac{1}{x^{10}+2x^5+2} - \frac{1}{10}\mathrm{arctan}\ (x^5+1) - \frac{1}{10}\frac{x^5+1}{x^{10}+2x^5+2} =$$

$$= -\frac{1}{10}\frac{x^5+2}{x^{10}+2x^5+2} - \frac{1}{10}\mathrm{arctan}\ (x^5+1).$$

2. (a) $f(x) = \dfrac{x}{x^8-1}$

Řešení: Budeme substituovat $t = x^2$. Dostaneme

$$\int \frac{x}{x^8-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\frac{1}{t^4-1}\,\mathrm{d}t =$$

a nyní použijeme rozklad

$$= \int \left(\frac{1}{4}\frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{1}{8}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + \frac{1}{4}\mathrm{arctan}\ t = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| + \frac{1}{4}\mathrm{arctan}\ x^2$$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^8+3}$

Řešení: Budeme substituovat $t = x^4$. Dostaneme, že

$$\int \frac{x^3}{x^8+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3} \overset{C}{=} \frac{1}{4\sqrt{3}}\mathrm{arctan}\ \frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\mathrm{arctan}\ \frac{x^4}{\sqrt{3}}$$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x^6+1}$

Řešení: Budeme integrovat zvlášť

$$\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2}{x^6+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{x}{x^6+1}\,\mathrm{d}x$$

Na první zlomek použijeme substituci $t = x^3$ a dostaneme, že

$$\int \frac{x^2}{x^6+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \overset{C}{=} \frac{1}{3}\operatorname{arctan} t = \frac{1}{3}\operatorname{arctan} x^3$$

Na druhý zlomek použijeme substituci $t = x^2$ a dostaneme, že

$$\int \frac{x}{x^6+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}t}{t^3+1} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t^2-t+1)} =$$

a nyní použijeme rozklad na parciální zlomky.

$$\frac{1}{t^3+1} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}$$

$$1 = A(t^2-t+1) + (Bt+C)(t+1)$$

$$1 = At^2 - At + A + Bt^2 + Bt + Ct + C$$

odkud vyplývá, že $A + C = 1$, $B + C - A = 0$ a $A + B = 0$, a tedy $A = -B = \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$, takže

$$= \frac{1}{6}\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{6}\int \frac{t-2}{t^2-t+1} =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{12}\int \frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{t^2-t+1} \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} \frac{1}{6}\ln|t+1| - \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctan}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} =$$

$$\frac{1}{6}\ln|x^2+1| - \frac{1}{6}\ln(x^4-x^2+1) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctan}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}$$

Dohromady dostaneme

$$\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{3}\operatorname{arctan} x^3 + \frac{1}{6}\ln|x^2+1| - \frac{1}{6}\ln(x^4-x^2+1) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctan}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}$$

(d) $f(x) = \dfrac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}$

Řešení:

Integrujme zvlášť

$$\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^4}{x(x^8+3x^4+2)}\,\mathrm{d}x - \int \frac{3}{x(x^8+3x^4+2)}\,\mathrm{d}x$$

Na první zlomek aplikujeme substituci $t = x^4$ a dostaneme (po zkrácení)

$$\int \frac{x^3}{x^8+3x^4+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+3t+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(t+1)(t+2)}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{1}{4}\left|\ln\frac{t+1}{t+2}\right| = \frac{1}{4}\left|\ln\frac{x^4+1}{x^4+2}\right|$$

Na druhý zlomek aplikujeme tutéž substituci. Je totiž

$$\int \frac{3}{x(x^8+3x^4+2)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3x^3}{x^4(x^8+3x^4+2)}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\int \frac{4x^3}{x^4(x^8+3x^4+2)}\,\mathrm{d}x =$$

a po substituci rozkladem na parciální zlomky dostaneme

$$= \frac{3}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{t(t^2+3t+2)} = \frac{3}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)(t+2)} \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\ln|t| - \ln|3(1+t)| + \frac{1}{2}\ln|3(2+t)|\right) \overset{C}{=} \frac{3}{2}\ln|x| - \frac{3}{4}\ln|(1+x^4)| + \frac{3}{8}\ln|(2+x^4)|$$

Dohromady dostaneme po úpravě

$$\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{3}{2}\ln|x| + \ln(1+x^4) - \frac{5}{8}\ln(2+x^4)$$

(e) $f(x) = \dfrac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}$

Řešení: Použijeme substituci $t = x^4$.

$$\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{x^8\cdot 4x^3}{x^8+3x^4+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{t^2}{t^2+3t+2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{(t^2+3t+2)-(3t+2)}{t^2+3t+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int 1\,\mathrm{d}t - \frac{1}{4}\int \frac{3t+2}{t^2+3t+2}\,\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{4}t - \frac{3}{8}\int \frac{2t+3}{t^2+3t+2}\,\mathrm{d}t + \frac{5}{8}\int \frac{1}{t^2+3t+2}\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} \frac{1}{4}t - \frac{3}{8}\ln|t^2+3t+2| + \frac{5}{8}\ln\left|\frac{t+1}{t+2}\right| =$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{8}\ln|x^8+3x^4+2| + \frac{5}{8}\ln\left|\frac{x^4+1}{x^4+2}\right|$$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{x(x^{10}+2)}$.

Řešení: Použijeme substituci $t = x^5$. Protože $\mathrm{d}t = 5x^4\ \mathrm{d}x$ a platí, že

$$\frac{1}{x(x^{10}+2)} = \frac{5x^4}{5x^5\left((x^5)^2+2\right)},$$

máme, že

$$\int \frac{1}{x(x^{10}+2)}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{1}{t(t^2+2)}\ \mathrm{d}t.$$

Nyní použijeme rozklad na parciální zlomky, který budeme hledat ve tvaru

$$\frac{1}{t(t^2+2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+2}.$$

Odtud vyplývá, že

$$1 = A(t^2+2) + (Bt+C)t$$
$$1 = 2A + Ct + (A+B)t^2$$

a tudíž

$$A = \frac{1}{2}, \qquad C = 0, \qquad B = -A = -\frac{1}{2}.$$

Nyní se výpočet snadno dokončí.

$$\frac{1}{5}\int \frac{1}{t(t^2+2)}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{10}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\frac{2t}{t^2+2}\right)\ \mathrm{d}t \stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=} \frac{1}{10}\ln|t| - \frac{1}{10}\ln\sqrt{t^2+2} = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{t}{\sqrt{t^2+2}}\right| = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{x^5}{\sqrt{x^{10}+2}}\right|.$$

3. (a) $f(x) = \dfrac{x^{2n-1}}{x^n+1}$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Řešení: Použijeme substituci $t = x^n$. Potom s přihlédnutím ke vztahu

$$\mathrm{d}t = nx^{n-1}\ \mathrm{d}x$$

dostaneme, že

$$\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{n}\frac{nx^n \cdot x^{n-1}}{x^n+1}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int \frac{t}{t+1}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)\ \mathrm{d}t$$
$$\stackrel{C}{=} \frac{1}{n}t - \frac{1}{n}\ln|t+1| = \frac{x^n - \ln|x^n+1|}{n}.$$

(b) $f(x) = \dfrac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Řešení: Použijeme substituci $t = x^n$. Potom $\mathrm{d}t = nx^{n-1}\,\mathrm{d}x$ a

$$\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{n}\frac{nx^{n-1}x^{2n}}{(x^{2n}+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t =$$

a po roztržení zlomku na dva sčítance použijeme na druhý z integrálů substituci $\operatorname{tg} y = t$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\arctan t - \frac{1}{n}\int \cos^2 y\,\mathrm{d}y \\
&\overset{C}{=} \frac{1}{n}\arctan\,(x^n) - \frac{1}{n}\frac{y+\sin y\cos y}{2} = \frac{1}{n}\arctan\,(x^n) - \frac{y}{2n} - \frac{1}{2n}\frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg}^2 y+1} \\
&= \frac{1}{n}\arctan\,(x^n) - \frac{\arctan\,(x^n)}{2n} - \frac{1}{2n}\frac{x^n}{x^{2n}+1} = \frac{\arctan\,(x^n)}{2n} - \frac{1}{2n}\frac{x^n}{x^{2n}+1}.
\end{aligned}$$