11. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (O rozkladu na parciální zlomky)**.** Nechť P a Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

(i) stupeň polynomu P je menší než stupeň polynomu Q,

(ii) polynom Q lze psát ve tvaru

$$Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1}\dots(x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}\dots(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l},$$

(iii) čísla $a_n \neq 0$, $x_1,\dots,x_k$ a $\alpha_1,\dots,\alpha_l$ a $\beta_1,\dots,\beta_l$ jsou reálná a čísla $p_1,\dots,p_k$ a $q_1,\dots,q_l$ jsou přirozená,

(iv) žádné dva z mnohočlenů

$$(x-x_1),\dots,(x-x_k),\ (x^2+\alpha_1 x+\beta_1),\dots,(x^2+\alpha_l x+\beta_l)$$

nemají společný kořen,

(v) kvadratické trojčleny

$$(x^2+\alpha_1 x+\beta_1),\dots,(x^2+\alpha_l x+\beta_l)$$

nemají žádný reálný kořen.

Pak existují jednoznačně určená čísla

$$A_{1,1},\dots,A_{1,p_1},A_{2,1},\dots,A_{2,p_2},\dots,A_{k,1},\dots,A_{k,p_k},$$

$$B_{1,1},C_{1,1},\dots,B_{1,q_1},C_{1,q_1},\dots,B_{l,1},C_{l,1},\dots,B_{l,q_l},C_{l,q_l}$$

taková, že platí:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x-x_1)^1}+\dots+\frac{A_{1,p_1}}{(x-x_1)_1^p}+\dots+\frac{A_{k,1}}{(x-x_k)^1}+\dots+\frac{A_{k,p_k}}{(x-x_1)^{p_k}}+$$

$$+\frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^1}+\dots+\frac{B_{1,q_1}x+C_{1,q_1}}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}}+\dots+\frac{B_{l,1}x+C_{l,1}}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^1}+\dots+\frac{B_{l,q_l}x+C_{l,q_l}}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}}.$$

Příklady

1. $f(x) = \dfrac{2x+3}{(x-2)(x+5)}$

   Řešení:

   Rozkladem na parciální zlomky můžeme postupovat následovně: hledáme koeficienty A, B tak, aby

   $$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$$

   Přenásobením této rovnice $(x-2)(x+5)$ dostaneme rovnost

   $$2x+3 = A(x+5) + B(x-2)$$

   Rovnost platí pro každé x. Dosazením $x = 2$ dostaneme, že $7 = 7A + 0$, a tedy $A = 1$. Dosazením $x = -5$ dostaneme, že $-7 = -7B$, a tedy $B = 1$. Odtud vyplývá, že

   $$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x+5}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \ln|x-2| + \ln|x+5|$$

   Výsledky jsou totožné (podle pravidla o součtu logaritmů).

2. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^4+5x^2+4}$

   Řešení:

   Platí, že

   $$\frac{x^4}{x^4+5x^2+4} = \frac{(x^4+5x^2+4)-5x^2-4}{x^4+5x^2+4} = 1 - \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4} = 1 - \frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

   Obecně bychom měli hledat rozklad ve tvaru

   $$\frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A+Bx}{x^2+1} + \frac{C+\mathrm{d}x}{x^2+4}$$

   zde ale postačí hledat jej ve tvaru

   $$\frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x^2+1} + \frac{C}{x^2+4}$$

   Je to z toho důvodu, že ve zlomku není nikde přítomno x v první mocnině. Možná bude lépe vidět, proč to funguje, pokud namísto x^2 budeme psát t.

   $$\frac{5t+4}{(t+1)(t+4)} = \frac{A}{t+1} + \frac{C}{t+4}$$

Poznamenejme, že jde o substituci do výrazu za účelem hledání rozkladu, nikoliv substituci do integrálu. Substituce nám bude užitečná i v tom, že za t lze dosazovat záporná čísla, což zjednoduší postup získávání koeficientů A, B. Každopádně, přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$5t + 4 = A(t + 4) + C(t + 1)$$

Dosazením $t = -4$ a $t = -1$ dostaneme, že[1]

$$-16 = -3C \implies C = \frac{16}{3}$$

$$-1 = 3A \implies A = -\frac{1}{3}$$

Odtud tedy máme, že

$$\frac{5t+4}{(t+1)(t+4)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{t+1} + \frac{16}{3}\frac{1}{t+4}$$

a tedy

$$\frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{x^2+1} + \frac{16}{3}\frac{1}{x^2+4}$$

Nyní už můžeme provést integraci.

$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+1} - \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{4}\frac{1}{(x/2)^2+1}\right)\mathrm{d}x \stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctan} x - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1/2}\operatorname{arctan}\frac{x}{2} = x + \frac{1}{3}\operatorname{arctan} x - \frac{8}{3}\operatorname{arctan}\frac{x}{2}$$

3. $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - 3x + 2}$

   Řešení:

   Protože stupeň polynomu v čitateli je menší než stupeň polynomu ve jmenovateli, není potřeba zlomek před rozkladem na parciální zlomky upravovat.

   Nejprve najděme rozklad jmenovatele. Uhodneme, že číslo 1 je kořenem polynomu $x^3 - 3x + 2$. Potom platí, že

$$(x^3 - 3x + 2) : (x - 1) = x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

   a tedy platí, že

$$(x^3 - 3x + 2) = (x - 1)^2(x + 2)$$

[1]) Poznamenejme, že zde hledáme rozklad platný pro **všechna** t reálná. Pokud by někdo namítl, že $t = x^2$ a není tedy možné dosazovat záporná čísla, pak na tuto námitku odpovězme, že pokud najdeme obecnější rovnost platnou pro **všechna** reálná čísla, pak jistě platí i pro všechna nezáporná reálná čísla — která již lze psát ve tvaru druhé mocniny x.

Rozklad na parciální zlomky budeme hledat ve tvaru

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x = A(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)^2$$

Dosazením $x = 1$ a $x = -2$ dostaneme, že

$$1 = 3A \implies A = \frac{1}{3}$$

$$-2 = 9C \implies C = -\frac{2}{9}$$

Nakonec třeba dosazením $x = 0$ dostaneme, že

$$0 = 2A - 2B + C \implies B = A + \frac{C}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

Odtud vyplývá, že platí

$$\int \frac{x}{(x-1)(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{9}\frac{1}{x-1} - \frac{2}{9}\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} -\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)} + \frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{2}{9}\ln|x+2| = -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$$

4. $f(x) = \dfrac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$

Řešení:

Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x^2+3x-2 = A(x^2+x+1)^2 + (Bx+C)(x^2+x+1)(x-1) + (Dx+E)(x-1)$$

Roznásobením pravé strany máme

$$x^2+3x-2 = A-C-E+2Ax-Bx-Dx+Ex+3Ax^2+Dx^2+2Ax^3+Cx^3+Ax^4+Bx^4$$

odkud porovnáním koeficientů dostaneme, že

$$A = \frac{2}{9},\ B = -\frac{2}{9},\ C = -\frac{4}{9},\ D = \frac{1}{3},\ E = \frac{8}{3}$$

Hledaný rozklad má tedy tvar

$$\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{2}{9}\frac{1}{x-1} - \frac{2}{9}\frac{x+2}{x^2+x+1} + \frac{1}{3}\frac{x+8}{(x^2+x+1)^2}$$

Jednotlivé zlomky budeme integrovat zvlášť. Platí, že

$$\int \frac{2}{9}\frac{1}{x-1}\,dx \overset{C}{=} \frac{2}{9}\ln|x-1|$$

$$-\frac{2}{9}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx = -\frac{1}{9}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} -\frac{1}{9}\ln(x^2+x+1) - \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

a nakonec

$$\frac{1}{3}\int \frac{x+8}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx + \frac{5}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx \overset{C}{=}$$

(Druhý integrál počítáme převedením jmenovatele na kanonický tvar $(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} = \frac{3}{4}[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1]$ a substitucí $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} t$.)

$$\overset{C}{=} \frac{5}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{10}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Dohromady dostaneme po úpravě

$$\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\,dx \overset{C}{=} \frac{1}{3}\frac{5x+2}{x^2+x+1} + \frac{8}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$$

5. $f(x) = \left(\dfrac{x}{x^2-3x+2}\right)^2$

Řešení:

Nejprve najdeme rozklad jmenovatele. Platí, že

$$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$$

Hledáme tedy rozklad výrazu

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

Ten je potřeba obecně hledat ve tvaru

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{x-2}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x^2 = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2)^2 + C(x-1)^2 + D(x-2)(x-1)^2$$

Dosazením $x = 1$ a $x = 2$ dostaneme, že

$$1 = A, \qquad 4 = C$$

Zbylé koeficienty B, D určíme dosazením dvou libovolných hodnot, třeba $x = 0$ a $x = 3$. Dostaneme, že

$$0 = 4A - 4B + C - 2D = 4 - 4B + 4 - 2D \implies -8 = -4B - 2D$$

$$9 = A + 2B + 4C + 4D = 1 + 2B + 16 + 4D \implies -8 = 2B + 4D$$

Odtud snadno vyplývá, že $D = -4$ a $B = 4$. Odtud vyplývá:

$$\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 = \int \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-1} + \frac{4}{(x-2)^2} - \frac{4}{x-2}\right) \stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=} -\frac{1}{x-1} + 4\ln|x-1| - \frac{4}{x-2} - 4\ln|x-2| = -\frac{x-2+4(x-1)}{(x-1)(x-2)} + 4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| =$$

$$-\frac{5x-6}{x^2-3x+2} + 4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|$$

6. $f(x) = \dfrac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}$

Řešení:

Jmenovatel je kvadratický trojčlen v x^2. Podle Viètových vztahů platí, že

$$x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2+1)(x^2+4)$$

Hledáme rozklad na parciální zlomky ve tvaru

$$\frac{x^2+5x+4}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme, že

$$x^2 + 5x + 4 = (Ax+B)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2+1)$$

$$x^2 + 5x + 4 = Ax^3 + 4Ax + Bx^2 + 4B + Cx^3 + \mathrm{d}x^2 + Cx + D$$

Odtud máme soustavu rovnic

$$A + C = 0$$

$$B + D = 1$$

$$4A + C = 5$$
$$4B + D = 4$$

která má řešení

$$A = \frac{5}{3}, \quad B = 1, \quad C = -\frac{5}{3}, \quad D = 0$$

Rozklad na parciální zlomky má tedy tvar

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{\frac{5}{3}x + 1}{x^2 + 1} + \frac{-\frac{5}{3}x}{x^2 + 4}$$

po roztržení prvního zlomku na dva a vhodném rozšíření dostaneme

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{5}{6}\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{1 + x^2} - \frac{5}{6}\frac{2x}{x^2 + 4}$$

Odtud vyplývá, že (integrál z prvního a třetího zlomku řešíme třeba substitucí t = jmenovatel příslušného zlomku)

$$\int \frac{x^2 + 5x + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} \, \mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{5}{6}\ln(1 + x^2) + \arctan x - \frac{5}{6}\ln(4 + x^2)$$

7. $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)}$

   Řešení:

   Platí, že

   $$(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5) = (x - 2)^2(x^2 - 4x + 5)$$

   přičemž druhý kvadratický trojčlen je nerozložitelný (nemá reálné kořeny). Hledáme tedy rozklad ve tvaru

   $$\frac{1}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 4x + 5}$$

   Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

   $$1 = A(x - 2)(x^2 - 4x + 5) + B(x^2 - 4x + 5) + (Cx + D)(x - 2)^2,$$

   odkud dosazením $x = 2$ dostaneme, že $B = 1$. Roznásobením v předchozím vztahu a porovnáním koeficientů na levé a pravé straně

   $$1 = A(x - 2)(x^2 - 4x + 5) + (x^2 - 4x + 5) + (Cx + D)(x - 2)^2$$

   $$1 = 5 - 10A + 4D - 4x + 13Ax + 4Cx - 4Dx + x^2 - 6Ax^2 - 4Cx^2 + Dx^2 + Ax^3 + Cx^3$$

   dostaneme soustavu rovnic

   $$1 = 5 - 10A + 4D$$

$$0 = -4 + 13A + 4C - 4D$$
$$0 = 1 - 6A + 4C + D$$
$$0 = A + C$$

Ta má řešení $A = 0$, $C = 0$, $D = -1$. Odtud máme, že hledaný rozklad má tvar

$$\frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2-4x+5}$$

Odtud vyplývá

$$\int \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{x-2} - \int \frac{1}{1+(x-2)^2}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} -\frac{1}{x-2} - \arctan\,(x-2)$$

8. $f(x) = \dfrac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}$

Řešení: Kvadratický trojčlen $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ nemá reálné kořeny. Proto rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$1 = A(1+x)(1+x+x^2) + Bx(1+x+x^2) + (Cx+D)x(x+1)$$

Dosazením $x = 0$ dostaneme, že $A = 1$. Dosazením $x = -1$ dostaneme, že $B = -1$. Po dosazení a roznásobení dostaneme

$$1 = (1+x)(1+x+x^2) - x(1+x+x^2) + (Cx+D)x(x+1)$$
$$1 = 1 + x + x^2 + Cx^3 + Cx^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x$$

odkud vyplývá, že $D = -1$ a $C = 0$. Rozklad má tvar

$$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x^2+x+1}$$

Integrací dostáváme

$$\int \frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \ln|x| - \ln|1+x| - \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \stackrel{C}{=}$$
$$\stackrel{C}{=} \ln\left|\frac{x}{1+x}\right| - \sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\,\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \ln\left|\frac{x}{1+x}\right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

9. $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$

Řešení:

Platí, že $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1) = (x+1)((x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})$. Druhý kvadratický trojčlen tedy nemá reálné kořeny, rozklad tedy hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

dosazením $x=-1$ dostaneme, že $A = \frac{1}{3}$. Roznásobením pak dostaneme

$$1 = \frac{1}{3}(x^2-x+1) + Bx^2 + Bx + Cx + C$$

odkud ihned vyplývá, že $C = \frac{2}{3}$ (porovnání koeficientů absolutních členů) a $B = -\frac{1}{3}$ (porovnání koeficientů u druhé mocniny x). Rozklad má tedy tvar

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}$$

Platí, že

$$\int \frac{1}{3}\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{1}{3}\ln|x+1|$$

$$\int \frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{6}\frac{2x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{3}\frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=}$$
$$\stackrel{C}{=} \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) - \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

Odkud vyplývá, že

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

10. $f(x) = \dfrac{x}{x^3-1}$

Řešení:

Platí, že $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$, přičemž druhý člen již nemá reálné kořeny. Rozklad tedy hledáme ve tvaru

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$

dosazením $x = 1$ dostaneme, že $A = \frac{1}{3}$. Zpětným dosazením a roznásobením dostaneme, že

$$x = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + Bx^2 - Bx + Cx - C,$$

odkud vyplývá, že $C = \frac{1}{3}$ (absolutní členy) a $B = -\frac{1}{3}$ (koeficienty u x^2). Rozklad má tedy tvar

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{1}{3}\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{3}\frac{x - 1}{x^2 + x + 1}$$

Platí, že

$$\int \frac{1}{3}\frac{1}{x-1}\, \mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{3}\ln|x - 1|$$

$$\int \frac{1}{3}\frac{x-1}{x^2+x+1}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{6}\frac{2x+2}{x^2+x+1}\, \mathrm{d}x - \int \frac{1}{3}\frac{2}{x^2+x+1}\, \mathrm{d}x - \overset{C}{=}$$

$$\frac{1}{6}\ln(x^2 + x + 1) - \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Odtud vyplývá:

$$\int \frac{x}{x^3 - 1}\, \mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2 + x + 1) + \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

11. $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + x^2 + 1}$

Řešení:

Polynom $x^4 + x^2 + 1$ zjevně nemá žádné reálné kořeny, lze jej tedy rozložit na součin dvou ireducibilních kvadratických trojčlenů. Hledejme tento rozklad ve tvaru

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + Px + Q)(x^2 + Rx + S)$$

Roznásobením pravé strany dostaneme

$$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + Rx^3 + Sx^2 + Px^3 + PRx^2 + PSx + Qx^2 + RQx + SQ$$

Odtud máme soustavu rovnic

$$SQ = 1,\ RQ + PS = 0,\ S + Q + PR = 1,\ R + P = 0$$

Z poslední rovnice plyne, že $R = -P$, z druhé potom plyne, že $RQ = RS$ a tedy $Q = S$. Dosazením do zbylých dvou dostaneme, že $S^2 = 1$ a $2S + R^2 = 1$, odkud plyne, že $S = Q = 1$ a $R = -P = \pm 1$. Tím dostáváme rozklad

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Rozklad na parciální zlomky tedy hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$1 = (Ax + B)(x^2 - x + 1) + (Cx + D)(x^2 + x + 1)$$

roznásobením levé strany máme

$$1 = B + D + Ax - Bx + Cx + Dx - Ax^2 + Bx^2 + Cx^2 + Dx^2 + Ax^3 + Cx^3$$

a odtud dostáváme porovnáním koeficientů soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 &= B + D \\ 0 &= A - B + C + D \\ 0 &= -A + B + C + D \\ 0 &= A + C \end{aligned}$$

která má řešení

$$A = B = D = \frac{1}{2},\ C = -\frac{1}{2}$$

Rozklad na parciální zlomky má tedy tvar

$$\frac{1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{2}\frac{x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2}\frac{x - 1}{x^2 - x + 1}$$

Dalším rozkladem na tvar

$$\frac{1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{4}\frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{4}\frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x^2 - x - 1}$$

a následnou integrací dostaneme, že

$$\int \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{4}\ln\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}$$