10. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (první věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in R^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na intervalu (α, β) s hodnotami v (a, b), která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \stackrel{C}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Věta 2 (druhá věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in R^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ má v každém bodě nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \stackrel{C}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Hinty

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} = \frac{1 - e^{-2x}}{2e^{-x}}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} = \frac{1 + e^{-2x}}{2e^{-x}}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$$

$$\begin{aligned}
\sinh(-x) &= -\sinh(x) \\
\cosh(-x) &= \cosh(x) \\
\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 \\
\cosh(x+y) &= \sinh(x) \cdot \sinh(y) + \cosh(x) \cdot \cosh(y) \\
\sinh(x+y) &= \cosh(x) \cdot \sinh(y) + \sinh(x) \cdot \cosh(y) \\
\cosh(x) + \sinh(x) &= e^x \\
\cosh(x) - \sinh(x) &= e^{-x}
\end{aligned}$$

Příklady

Určete primitivní funkci k daným funkcím:

1. Goniometrické substituce

   (a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x^2)^{3/2}}$

   (c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{a + x}{a - x}}$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$

2. Hyperbolické:

   (a) $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$

   (b) $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$

   (c) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}}$

   (d) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

3. Směs

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + e^x}}$

   (b) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{4x - 7} + 3}$

   (c) $f(x) = \sin \sqrt{x}$

   (d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

4. Důležité (první věta)

   (a) $f(x) = \dfrac{3}{5 - 2x}$

   (b) $f(x) = \dfrac{-8}{(3 + 5x)^4}$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{2 - 3x^2}$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x + 2}$

   (e) $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 - 2x - 1}$

   (f) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + x + 1}$

   (g) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^4 - x^2 + 2}$

5. Procvičení (první věta)

   (a) $f(x) = x^2 \sqrt[3]{1 - x}$

   (b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{2 - x}}$

   (c) $f(x) = \cos^5 x \sqrt{\sin x}$

   (d) $f(x) = \dfrac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x}$

   (e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}}$

   (f) $f(x) = \dfrac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \dfrac{1}{1 + x}$