

8. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (první věta o substituci). Necht' $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Necht' F je primitivní funkce k f na (a, b) . Necht' φ je funkce definovaná na intervalu (α, β) s hodnotami v (a, b) , která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \stackrel{C}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Příklady

Určete primitivní funkci k funkci $f(x)$ na otevřené podmnožině jejího definičního oboru, kde primitivní funkce existuje.

1. $f(x) = \frac{x}{3 - 2x^2}$

Řešení: Použijeme substituci $y = 3 - 2x^2$. Potom $dy = -4x dx$ a platí

$$\int \frac{x}{3 - 2x^2} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{dy}{y} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{4} \ln |y| = -\frac{1}{4} \ln |3 - 2x^2|$$

2. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

Řešení: Použijeme substituci $y = 1 - x^2$. Pak $dy = -2x dx$ a platí

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{y}} \stackrel{C}{=} -\sqrt{y} = -\sqrt{1 - x^2}$$

3. $f(x) = xe^{-x^2}$

Řešení: Použijeme substituci $y = -x^2$. Potom $dy = -2x dx$ a platí

$$\int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^y dy \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} e^y = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$$

4. $f(x) = \frac{x}{(1 + x^2)^2}$

Řešení: Použijeme substituci $y = 1 + x^2$. Potom $dy = 2x dx$ a platí

$$\int \frac{x}{(1 + x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \frac{1}{y} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 + x^2}$$

5. $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \frac{1}{x}$. Potom $dy = -\frac{1}{x^2} dx$ a platí

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = - \int \sin y dy \stackrel{C}{=} \cos y = \cos \frac{1}{x}$$

6. $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \ln x$. Pak $dy = \frac{1}{x} dx$ a platí

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int y^2 dy \stackrel{C}{=} \frac{y^3}{3} = \frac{\ln^3 x}{3}$$

7. $f(x) = \sin^5 x \cos x$.

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Pak $dy = \cos x dx$ a platí

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \int y^5 dy \stackrel{C}{=} \frac{y^6}{6} = \frac{\sin^6 x}{6}$$

8. $f(x) = \frac{e^x}{2 + e^x}$

Řešení: Použijeme substituci $y = e^x$. Potom $dy = e^x dx$ a platí

$$\int \frac{e^x}{2 + e^x} dx = \int \frac{dy}{2 + y} \stackrel{C}{=} \ln |2 + y| = \ln(2 + e^x)$$

9. $f(x) = \frac{\arctan x}{1 + x^2}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \arctan x$, potom $dy = \frac{1}{1+x^2} dx$ a platí

$$\int \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx = \int y dy \stackrel{C}{=} \frac{y^2}{2} = \frac{\arctan^2 x}{2}$$

10. $f(x) = \operatorname{tg} x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \cos x$. Potom $dy = -\sin x dx$ a platí

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{dy}{y} \stackrel{C}{=} -\ln |y| = -\ln |\cos x|$$

11. $f(x) = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \ln(\ln x)$. Potom $dy = \frac{1}{x \ln x} dx$ a platí

$$\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx = \int \frac{1}{y} dy \stackrel{C}{=} \ln |y| = \ln(|\ln(\ln x)|)$$

$$12. f(x) = \frac{x}{4+x^4}$$

Řešení: Použijeme substituci $y = x^2$. Potom $dy = 2x dx$ a platí

$$\int \frac{x}{4+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{4+y^2} = \frac{1}{8} \int \frac{dy}{1+(y/2)^2} \stackrel{C}{=} \frac{1}{4} \arctan \frac{y}{2} = \frac{1}{4} \arctan \frac{x^2}{2}$$

$$13. f(x) = \frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \arcsin x$, potom $dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ a platí

$$\int \frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dy}{y^2} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{y} = -\frac{1}{\arcsin x}$$

$$14. f(x) = \cos^3 x$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $dy = \cos x dx$ a platí

$$\int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (1 - y^2) dy \stackrel{C}{=} y - \frac{y^3}{3} = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$$

$$15. f(x) = \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{x}$. Potom $y^2 = x$, $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ a platí

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{1+y^2} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2 \int \frac{1}{1+y^2} dy \stackrel{C}{=} 2 \arctan y = 2 \arctan \sqrt{x}$$

$$16. f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}$$

Řešení: Použijeme substitute $y = \sin x - \cos x$. Potom $dy = \cos x + \sin x$ a platí

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx = \int \frac{dy}{y^{1/3}} \stackrel{C}{=} \frac{3}{2} y^{2/3} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{1 - \sin 2x}$$

$$17. f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

Řešení: Vztah upravíme a použijeme substituci $y = e^x$, $dy = e^x dx$

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{dy}{1+y^2} \stackrel{C}{=} \arctan y = \arctan e^x$$

$$18. f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \cos x$. Pak $dy = -\sin x dx$ a platí

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx = - \int \frac{dy}{\sqrt{y^3}} \stackrel{C}{=} 2y^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{\cos x}}$$

$$19. f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{x^2+1}$. Potom $dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ a $y^2 - 1 = x^2$ a platí

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx &= \int \frac{1}{x^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{1}{y^2-1} dy = - \int \frac{1}{1-y^2} dy \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| = \\ &= -\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{1-\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

$$20. f(x) = \frac{1}{\sin x}$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \cos x$. Potom $dy = -\sin x dx$ a platí

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} dx = - \int \frac{dy}{1-y^2} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right| = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \right| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \end{aligned}$$

$$21. f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\cotg x}}$$

Řešení:

Použijeme substituci $y = \cotg x$. Potom $dy = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\cotg x}} dx = - \int \frac{dy}{y^{1/4}} \stackrel{C}{=} \frac{4}{3} y^{3/4} = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\cotg^3 x}$$

$$22. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{x}$. Potom $y^2 = x$, $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy \stackrel{C}{=} \arcsin y = \arcsin \sqrt{x}$$

$$23. f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$$

Řešení: Nejprve použijeme substituci $y = e^x$, $dy = e^x dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx = \int \frac{e^x dx}{e^x \sqrt{1+e^{2x}}} = \int \frac{dy}{y \sqrt{1+y^2}} \stackrel{C}{=}$$

a poté postupujeme jako v příkladu (??)

$$\stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{y^2+1}}{1-\sqrt{y^2+1}} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{e^{2x}+1}}{1-\sqrt{e^{2x}+1}}$$

24. $f(x) = \cotg x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $dy = \cos x dx$ a platí

$$\int \cotg x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{dy}{y} \stackrel{C}{=} \ln |y| = \ln |\sin x|$$

25. $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $dy = \cos x dx$ a platí

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{dy}{1 - y^2} \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + y}{1 - y} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right| \end{aligned}$$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Pak platí

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx &= \int \frac{\cos^2 x \cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x)}{\sin x} \cos x dx = \\ &= \int \frac{1 - y^2}{y} dy = \int \frac{1}{y} dy - \int y dy \stackrel{C}{=} \ln |y| - \frac{y^2}{2} = \ln |\sin x| - \frac{\sin^2 x}{2} \end{aligned}$$