6. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta. *Mějme mocninnou řadu* $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ *s poloměrem konvergence* $R > 0$. *Potom pro každé* x *takové, že* $|x - x_0| < R$ *platí, že*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k (x - x_0)^{k-1}.$$

Věta říká, že uvnitř konvergenčního kruhu lze derivovat řadu člen po členu. Věta platí v reálném i komplexním oboru.

Navíc platí, že derivovaná řada má stejný poloměr konvergence, jako původní řada.

Analogicky platí věta o integraci člen po členu.

Věta. *Mějme mocninnou řadu* $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ *s poloměrem konvergence* $R > 0$. *Potom pro každé* x *takové, že* $|x - x_0| < R$ *platí, že funkce* F *definovaná předpisem*

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1}$$

má v bodě x *derivaci rovnou* $F'(x) = f(x)$.

Věta (Abelova sumační metoda). *Nechť řada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje. Nechť* R *je poloměr konvergence mocninné řady* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$. *Potom platí*

$$\lim_{x \to R-} \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Abelovou sumační metodou nazýváme metodu, kdy z *libovolné* řady $\sum a_k$ uděláme mocninnou přidáním x^k o poloměru konvergence R a spočítáme limitu

$$\lim_{x \to R-} \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k.$$

Tím lze přiřadit součet i některým divergentním řadám! Máme ale zaručeno, že pokud řada $\sum_k a_k$ konverguje, pak jsme ji touto metodou sečetli správně.

Příklady

1. (a) $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$

   Řešení: Máme sečíst řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^k.$$

Podle „podílového kritéria“ má poloměr konvergence jedna. Platí, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}.$$

Označme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$$

Potom na kruhu konvergence platí integrováním člen po členu, že

$$f(x) = F'(x), \qquad \text{kde} \qquad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} = \frac{x}{1-x}.$$

Odtud vyplývá, že

$$f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1$$

a odtud

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = xf(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1.$$

(b) $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \ldots$
Řešení: Řada má poloměr konvergence jedna, jak plyne z „podílového kritéria“. Máme sečíst řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^2 x^k = x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^2 x^{k-1} =$$

což, podle věty o integrování člen po členu, je rovno

$$= x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} kx^k\right)' = x \cdot \left(x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} kx^{k-1}\right)' =$$

a znovu podle věty o integrování člen po členu a vztahu pro součet geometrické řady platí

$$= x \cdot \left(x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k\right)'\right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)'\right)' =$$

a nyní zbývá jen spočítat příslušné derivace

$$= x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{(1+x) - x}{(1+x)^2}\right)\right)' = x \cdot \left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)' =$$

$$= x \cdot \left(\frac{(1+x)^2 - 2x(1+x)}{(1+x)^4}\right) = x \cdot \frac{1-x^2}{(1+x)^4} = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}, \qquad |x| < 1.$$

(c) $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$
Řešení: Máme sečíst řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k.$$

Poloměr konvergence je jedna, jak plyne z „podílového kritéria". Podle věty o integraci člen po členu platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k+1}\right)' = \left(x^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}\right)' =$$

$$= \left(x^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)'\right)' = \left(x^2 \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)' = \left(x^2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2}\right)' =$$

$$= \frac{2x(1-x)^2 + 2x^2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2x - 4x^2 + 2x^3 + 2x^2 - 2x^3}{(1-x)^4} = \frac{2x}{(1-x)^3}, \qquad |x| < 1.$$

2. (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k}$
Řešení:
Již výše jsme spočetli, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k = \frac{2x}{(1-x)^3}, \qquad |x| < 1.$$

Dosazením $x = \frac{1}{2}$ dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^3} = 8.$$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{3^k}$
Řešení: Namísto $(-1)^k/3^k$ budeme psát x^k a potom dosadíme $x = -\frac{1}{3}$. Sečtěme tedy řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k.$$

Poloměr konvergence je roven jedné. Je

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k = x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k\right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^k\right)'\right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)'\right)'\right)' =$$

1d

(2) $1+2x+3x^2+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

POL. KONV.: $\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\frac{n+1}{n+2} = \underline{1}$

$\Rightarrow$ řada konv. na $\underline{(-1,1)}$!

KONV. V KRAJNÍCH BODECH:

$x=1$: $\sum(n+1)$ DIV. dle nutné podmínky: $\lim \cancel{a_n}(n+1) \neq 0$

$x=-1$: $\sum(n+1)(-1)^n$ — " ——— : $\lim (-1)^n(n+1) \neq 0$

Označme $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

INTEGROVÁNÍM ČLEN PO ČLENU DOSTANEME, ŽE

$f(x)=F'(x)$, kde $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1} =$

$= \frac{x}{1-x}$ (pozor na první člen!)

Tedy $f(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ na $\underline{(-1,1)}$!

1e

VI. 1(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+5}}{n!} = x^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^4)^n}{n!} = x^5 \cdot e^{x^4}$

neboť

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{R}, \text{ tedy i pro } z = x^4.$$

VI. 1(b) $\sum n x^n$ viz př. 2a)

! VI. 1c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} =: f(x)$

Pak

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n+1} =$$

POdíl K: $\lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1$

$\Rightarrow$ konv. na $(-1, 1)$

V KRAJ. BODECH:

$x = 1$: $\sum \frac{1}{n(n+1)} \leq \sum \frac{1}{n^2}$ K.

$x = -1$: KONV. ABSOLUTNĚ, NEB

$$\sum \left|\frac{(-1)^n}{n(n+1)}\right| = \sum \frac{1}{n(n+1)} \ldots$$

~~VI. 1d~~

VI. 1e) viz 2b

VI. 1d) $x \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}}_{f(x)}$ PK: $R=1$.

(1f)

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad \text{Př. (2a)}$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{(1-x)^2 + x \cdot 2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1-x+2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$\rightarrow \sum n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$ na $(-1,1)$ $\overset{\mathrm{D}}{\mathrm{o}}$

(1g) VI. 1f) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n = \frac{1}{x} \underbrace{\sum n(n+2)x^{n+1}}_{f(x)}$ PK: $R=1$

$$F(x) = \sum n x^{n+2} = x^2 \sum n x^n = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{3x^2(1-x)^{\cancel{2}} + x^3 \cdot 2\cancel{(1-x)}}{(1-x)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{3x^2 - x^3}{(1-x)^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n = \frac{3x - x^2}{(1-x)^3}$$ na $(-1,1)$ $\overset{\mathrm{D}}{\mathrm{o}}$

~~VI~~ 1g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $\qquad e^x = \sum \frac{x^n}{n!} \qquad e^{-x} = \sum (-1)^n \frac{x^n}{n!}$

$$e^x + e^{-x} = 2 \sum \frac{x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow 2\cosh x$$

~~VI~~ 1h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} =$ ~~$\cosh(x)$~~ $\leftarrow$ ~~$\frac{x^2}{2!}$~~ ~~$\frac{x^6}{6!}$~~ $\frac{1}{2}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} - \cos x\right)$

$$\cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\cos x\right)}$$

$$\cancel{\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}\ \cos x = 1+2\frac{x^4}{4!}+2\frac{x^8}{8!}}$$

VI.

1i) $$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)(n+3)\,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{NAHRAD } y^n}}{x^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)(n+3)\,y^n$$

(1b)

PK: R = 1. V KRAJ'ICH DIV.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\dots = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(n+3)y^n = y\underbrace{\sum_{n=2}(n-1)(n+3)y^{n-1}}_{f(y)}$$

(PRVNÍ ČL. NULA

$$F(y)=\sum_{n=2}^{\infty}(n+3)y^n = \frac{1}{y^2}\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}(n+3)y^{n+2}}_{g(y)}$$

$$G(y)=\sum_{n=2}^{\infty}y^{n+3}=\frac{y^5}{1-y}$$

$$g(y)=G'(y)=\frac{5y^4(1-y)+y^5}{(1-y)^2}=\frac{5y^4-4y^5}{(1-y)^2}$$

$$F(y)=\frac{1}{y^2}g(y)=\frac{5y^2-4y^3}{(1-y)^2}$$

$$f(y)=F'(y)=\frac{(10y-12y^2)(1-y)+2(5y^2-4y^3)}{(1-y)^3}=$$

$$=\frac{10y-12y^2\cancel{-10y^2}+12y^3+\cancel{10y^2}-8y^3}{(1-y)^3}=\frac{10y-12y^2+4y^3}{(1-y)^3}$$

$$\sum\dots y^n = y\cdot\frac{10y-12y^2+4y^3}{(1-y)^3}$$