6. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta. *Mějme mocninnou řadu* $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *s poloměrem konvergence* $R > 0$. *Potom pro každé* x *takové, že* $|x - x_0| < R$ *platí, že*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k(x-x_0)^{k-1}.$$

Věta říká, že uvnitř konvergenčního kruhu lze derivovat řadu člen po členu. Věta platí v reálném i komplexním oboru.

Navíc platí, že derivovaná řada má stejný poloměr konvergence, jako původní řada.

Analogicky platí věta o integraci člen po členu.

Věta. *Mějme mocninnou řadu* $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *s poloměrem konvergence* $R > 0$. *Potom pro každé* x *takové, že* $|x - x_0| < R$ *platí, že funkce* F *definovaná předpisem*

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1}$$

má v bodě x *derivaci rovnou* $F'(x) = f(x)$.

Věta (Abelova sumační metoda). *Nechť řada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje. Nechť* R *je poloměr konvergence mocninné řady* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$. *Potom platí*

$$\lim_{x \to R-} \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Abelovou sumační metodou nazýváme metodu, kdy z *libovolné* řady $\sum a_k$ uděláme mocninnou přidáním x^k o poloměru konvergence R a spočítáme limitu

$$\lim_{x \to R-} \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k.$$

Tím lze přiřadit součet i některým divergentním řadám! Máme ale zaručeno, že pokud řada $\sum_k a_k$ konverguje, pak jsme ji touto metodou sečetli správně.

Příklady

1. Sečtěte následující řady (uvnitř kruhu konvergence).

   (a) $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$

   (b) $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$

   (c) $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$

   (d) $1 + 2x + 3x^2 + \cdots$

   (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+5}}{n!}$

   (f) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$

   (g) $\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)x^n$

   (h) $\sum_{n=0}^{\infty} (n-1)(n+3)x^{2n}$

2. Najděte součet následujících řad.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{3^k}$