(a) $$\lim_{x,y \to 0,0} \frac{x^2 \sin y}{x^2+y^2} = \lim \frac{\sin y}{y} \times \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

$1 \qquad 0 \qquad$ om.

$$-\frac{1}{2} \le \frac{xy}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2}$$

(b) $$\lim_{x,y \to 0,0} \frac{2-\cos x-\cos y}{x^2+y^2} = \lim_{x,y \to 0,0} \frac{2-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)-\left(1-\frac{y^2}{2}+o(y^3)\right)}{x^2+y^2}$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

$$= \lim_{x,y \to 0,0} \frac{x^2+y^2}{4(x^2+y^2)} + \frac{o(x^3)}{x^3} \cdot \underbrace{\frac{x^3}{x^2+y^2}}_{0} + \frac{o(y^3)}{y^3} \cdot \frac{y^3}{x^2+y^2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}+0+0}}$$

$$\frac{y^3}{y^2+1} \le \frac{y^3}{y^2} = y \to 0$$

na okolí

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x(x^2+y^2)^2}{1-\cos(x^2+y^2)} = \lim\limits_{x,y\to 0,0} \underbrace{\dfrac{(x^2+y^2)^2}{1-\cos(x^2+y^2)}}_{\downarrow\ 2} \cdot \underbrace{x}_{\downarrow\ 0} = 0$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy\,(x^2+y^2)}{1-\cos(x^2+y^2)} = \lim\limits_{x,y\to 0,0} \dfrac{(x^2+y^2)^2}{1-\cos(x^2+y^2)} \quad \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

pro $x=y$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2x^2)^2}{1-\cos 2x^2} \cdot \dfrac{2x^2}{2x^2} = 2$

$-x=y$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2x^2)^2}{1-\cos(2x^2)} \cdot \dfrac{-2x^2}{2x^2} = -2$

$\Rightarrow \lim \nexists$

(1e)

$$\lim_{x,y \to 0,0} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = \infty$$

pomocný výpočet: jak vypadá $f(x,y)$ na kružnici o poloměru r?

$x = r \cos\varphi$

$y = r \sin\varphi$

pak $\dfrac{r^2}{r^4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)} \geq \dfrac{1}{2r^2}$

Zvolme okolí 0 o poloměru R, pak

$$\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \geq \frac{1}{2R^2} \to \infty$$

tedy přímo z definice $\lim_{x,y \to 0,0} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = \infty$

(1f)

$$\lim_{x,y \to 0,0} \frac{\sin yx^2}{x^4+y^2} = \lim \frac{\sin yx^2}{yx^2} \cdot \frac{yx^2}{x^4+y^2}$$

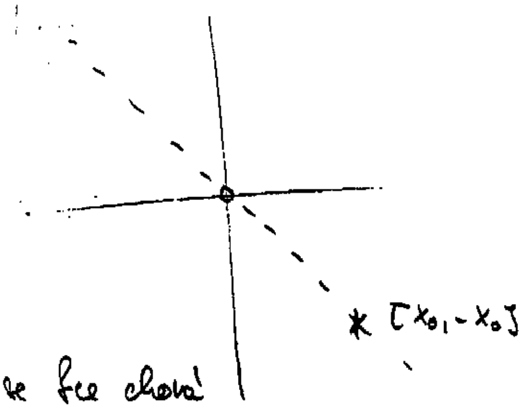
volme $y = kx^2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{kx^4}{x^4+k^2x^4} \cdot \frac{\sin kx^4}{kx^4} = 1 \cdot \frac{k}{1+k^2}$$

$\to \lim \nexists$

(g) $\lim\limits_{x,y\to 0,0} \dfrac{x^6}{x^3+y^3}$

$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{ x = -y \}$



Idea: zafixujme

$[x_0, -x_0]$ a sledujme, jak se fce chová na okolí.

Pro $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,-x_0]} \dfrac{x^6}{\underbrace{x^3+y^3}_{\to 0}} = \pm\infty$

Tedy → když se přiblížíme k ose, tak funkce jde do $\pm\infty$

→ takto se chová na jakémkoli okolí

→ $\lim\limits_{x,y\to 0,0} \dfrac{x^6}{x^3+y^3}$ $\nexists$