$$(a)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin^2 x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2+\frac{y^2}{1+y^2}} \frac{1}{1+y^2}\, dy =$$

$$y = tg\, x$$

$$dx = \frac{dy}{1+t^2} \qquad = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{2+3y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{1+y^2\frac{3}{2}}\, dy$$

$$= \left[\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} y\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{\sqrt{6}}}}$$

(b) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x\,(2+\cos x)}\,dx = \int_{\operatorname{tg}\pi/8}^{1} \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt =$

$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $\qquad \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$ $\qquad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$\displaystyle = \int_{\operatorname{tg}\pi/8}^{1} \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}t\,(2+2t^2+1-t^2)}\,dt = \int_{\operatorname{tg}\pi/8}^{1} \frac{1}{t\,(t^2+3)}\,dt = \int_{\operatorname{tg}\pi/8}^{1} \frac{1}{3x} - \frac{x}{3(x^2+3)}\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+3)\right]_{\operatorname{tg}\pi/8}^{1} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\ln 4 - \ln(\sqrt{2}-1) + \frac{1}{2}\ln\left((\sqrt{2}-1)^2+3\right)\right)$

$\operatorname{tg}\pi/8 = \sqrt{2}-1$

(c) $\displaystyle\int_{\pi}^{3\pi} \frac{dx}{5+2\sin x-\cos x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{5+\frac{4t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{5+5t^2+4t-1+t^2}\,dt =$

problémy nejsou

$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \qquad x \in (+\pi\ ;\ 3\pi)$

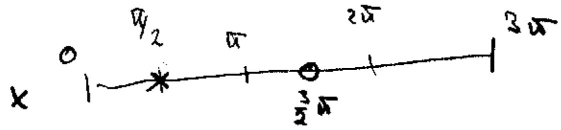
$\displaystyle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{6t^2+4t+4}\,dt =$

$\displaystyle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{3t^2+2t+2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{3\left(t^2+\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}\right)}\,dt = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{9}}\,dt$

nemá kořen

$\displaystyle = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\frac{5}{9}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{t+\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{5}{9}}}\right)^2+1}\,dt = \left[\frac{3}{5}\,\frac{\sqrt{5}}{3}\arctan\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$

(a) $\displaystyle\int_0^{3\pi} \frac{\sin x \cos x}{1+\sin x}\,dx$



$y = \sin x$

$dy = \cos x\,dx$

$\sin x \neq -1 \qquad x \neq \frac{3}{2}\pi$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{y}{1+y}\,dy = \int \frac{y+1-1}{y+1}\,dy \stackrel{c}{=} y - \ln|y+1|$$

$y(x)$: $(0, \frac{\pi}{2}) \to (0, 1)$ $\qquad \left[y - \ln|y+1|\right]_0^1$

$(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) \to (1, -1)$ $\qquad \left[\quad\right]_1^{-1}$

$(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi) \to (-1, 1)$ $\qquad \left[\quad\right]_{-1}^{1}$

$(\frac{5}{2}\pi, 3\pi) \to (1, 0)$ $\qquad \left[\quad\right]_1^{0}$

celkem $\qquad \lim_{y \to -1^+} y - \ln|y-1| = \infty$

$\to$ v bodě $x = \frac{3\pi}{2}$ neexistuje PF (ani ZPF),

nelze slepit

(e) $\int_2^3 \frac{x+1}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\int_2^3 \frac{-2x-1}{(x^2+x+1)} + \frac{2}{x-1}\,dx =$

$= \left[\frac{1}{3}\left(-\ln|x^2+x+1| + 2\ln|x-1|\right)\right]_2^3 = \frac{1}{3}\left(-\ln 13 + 2\ln 2 + \ln 7\right)$

f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x}}{x^2}\,dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{y}{(y^2-1)^2}\, 2y\,dy = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

$y = \sqrt{1+x}$

$y^2 - 1 = x$

$2y\,dy = dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|x+1| + \frac{-1}{x+1} + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(\sqrt{3}+1) + \frac{-1}{\sqrt{3}+1} + \ln(\sqrt{3}-1) - \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \ln(\sqrt{2}+1) + \frac{1}{\sqrt{2}+1} \ln(\sqrt{2}-1) + \frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

(g) $\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) dx = \int_1^{1+\sqrt{2}} (\ln t)\cdot \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$

$t = x + \sqrt{1+x^2}$

$x = \frac{t^2-1}{2t}$

$dx = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$

$= \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{1}{2}\ln t + \frac{1}{2}\frac{\ln t}{t^2}\, dt = \frac{1}{2}\left[x\ln x - x - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2}\right]_1^{1+\sqrt{2}}$

per partes: $\frac{1}{2}(x\ln x - x)$

per partes: $\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right)$

dosazení ne čtenáři.

h) $\int_1^2 \underset{u}{\ln^2 x} \cdot \underset{v'}{\frac{1}{x^2}}\,dx = \left[-\frac{\ln^2 x}{x}\right]_1^2 + 2\int_1^2 \underset{u}{\ln x}\,\underset{v'}{\frac{1}{x^2}}\,dx =$

$u' = \frac{2\ln x}{x} \qquad v = -\frac{1}{x} \qquad\qquad u' = \frac{1}{x} \qquad v = -\frac{1}{x}$

$= \left[-\frac{\ln^2 x}{x}\right]_1^2 + 2\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^2 + 2\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx =$

$= \left[-\frac{\ln^2 x}{x} - 2\frac{\ln x}{x}\right]_1^2 - 2\left[\frac{1}{x}\right]_1^2 =$

$= -\frac{\ln^2 2}{2} - \frac{2\ln 2}{2} \underbrace{-2\cdot\frac{1}{2} + 2}_{1} = -\frac{1}{2}\left(\ln^2 2 + 2\ln 2 - 1\right)$

(1ch) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \underset{u'}{e^y}\ \underset{v}{2y}\,dy = \left[2y e^y\right]_0^1 - \int_0^1 2e^y$

$u = e^y \quad v' = 2$

$y = \sqrt{x}$

$y^2 = x$

$2y\,dy = dx$

x	0	1
y	0	1

$= \left[2y e^y\right]_0^1 - 2\left[e^y\right]_0^1 = 2e - 2(e-1) = \underline{\underline{2}}$

$$f) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1/3}{x^2+1} + \frac{-1/3}{x^2+4}\, dx =$$

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ 4A + B &= 1 \\ 3A &= 1 \\ A &= 1/3 \end{aligned} \qquad B = -1/3$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{4\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right]}\, dx = \frac{1}{3}\left[\arctan x - \frac{1}{4}\cdot 2\arctan\frac{x}{2}\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}$$

(b) $$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \left(\sqrt{x+1}\right)^2} =$$

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$x = \frac{1+y^2}{1-y^2} \qquad dx = \frac{4y}{(1-y^2)^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\frac{1+y^2}{\cancel{1-y^2}}\,\cancel{y}\left(\frac{1+y^2}{\cancel{1-y^2}}+1\right)} \cdot \frac{4\cancel{y}}{\cancel{(1-y^2)^2}}\,dy = 4\int_0^1 \frac{1}{(1+y^2)(1+y^2+1-y^2)}\,dy$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{(1+y^2)} = 2\left[\arctan y\right]_0^1 = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

(2) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a} \operatorname{arctan} x \, dx \qquad a \in \mathbb{R}$

(a) u "0" $\quad \sin x \approx x \quad \operatorname{arctan} \approx x$

stovnáme s $g(x) = \frac{x^2}{x^a}$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\frac{|\sin x \operatorname{arctan} x|}{x^a}}{\frac{x^2}{x^a}} = 1$$

$\int_0^1 x^{2-a} \, dx \quad (A)k \quad$ pro $\quad 2-a > -1$

$\boxed{3 > a}$

z LSk $\quad$ tedy $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^a} \operatorname{arctan} x \, dx \quad (A)k \iff \boxed{a < 3}$

(b) u ∞

- pro $\boxed{a > 1}$ $\qquad$ srovnáme Sk

$$\left| \frac{\sin x}{x^a} \operatorname{arctan} x \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^a} \quad ; \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^a} \quad a > 1 \quad Ak$$

tedy pro $\boxed{a > 1}$ $\int_1^\infty \frac{\sin x \operatorname{arctan} x}{x^a} dx \quad Ak$

- pro $\boxed{0 < a \leq 1}$

$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^a} dx \quad$ konverguje (neabsolutně). Buď FAKT

nebo Dirichlet

z Abele ($\operatorname{arctan} x \to \frac{\pi}{2}$ (je om.) a monot.)

$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^a} \operatorname{arctan} x \, dx \quad$ NAk pro $\quad 0 < a \leq 1$

- divergence

$\boxed{a \le 1}$

$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^a}\,dx$ diverguje (fakt nebo BC)

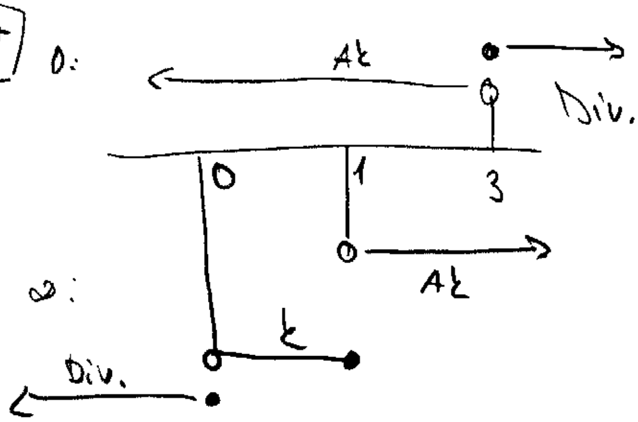
z Abele (typ 2) pak i $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^a}\arctan x\right| dx$ diverguje

$\boxed{a \le 0}$

$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^a}\,dx$ diverguje (neabsolutně) (fakt nebo BC)

z Abele (typ 2) pak i $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^a}\arctan x\,dx$ div.

Závěr



$\int_0^\infty$

Ak	pro	$1 < a < 3$
NAk		$0 < a \le 1$

$\boxed{246}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx$

probleémy: 0, 1

"0" $g(x) = \ln x$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\left|\frac{\ln x}{1-x^2}\right|}{\ln x} = 1$$

$$\int_0^{1/2} \ln x\,dx = \left[x\ln x - x\right]_0^{1/2} =$$

$$= \left(-\lim_{x\to 0} x\ln x - x\right) + \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}$$

$$= 0 + \tfrac{1}{2}\ln \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}$$

tedy AK

a z LSK $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx$ $\boxed{AK}$

"1" $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\ln x}{(1-x)(1+x)}\,dx$

$g(x) = \dfrac{1-x}{1-x}$

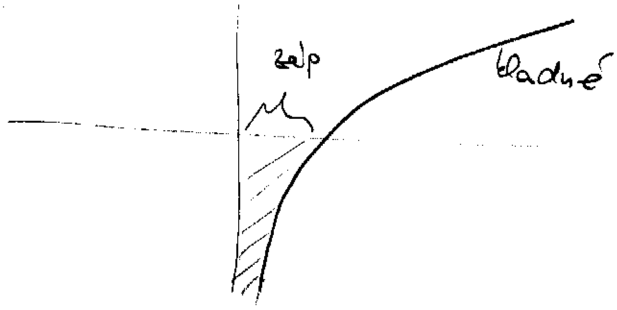
$\displaystyle\int_{1/2}^1 1\,dx = \frac{1}{2}$ AK

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{|\ln x|}{(\cancel{1-x})(1+x)}}{\frac{1-x}{1-x}} = \lim_{x\to 1-} \frac{1}{1+x}\left|\frac{\ln x}{1-x}\right| = \frac{1}{2}$$

z LSK i $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx$ AK

Závěr: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx$ $\boxed{AK}$

(247) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$



$0, \infty$

$\ln x \to -\infty$

$1+x^2 \to 1$

0: $\quad g(x) = \dfrac{\ln x}{1} \qquad \displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\ln x}{1+x^2}}{\frac{\ln x}{1}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+x^2} = \underline{1}$

$\displaystyle\int_0^1 \ln x \, dx = \left[x\ln x - x\right]_0^1 = -1 - \underbrace{\lim_{x\to 0+} x\ln x}_{0} = -1$

Ak

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ Ak

∞: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ Ak

$g(x) = \dfrac{\ln x}{x^2} \qquad \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{1+x^2}}{\frac{\ln x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \underline{1}$

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ Ak $\qquad a = -2 > -1$ boh

Dohromady $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ Ak

• $\lim_{x\to\pi-}\left(\frac{\sin x}{\pi-x}\right)^{p} \overset{\text{VŽDY}}{=} 1$ • $\lim_{x\to\pi-}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x\right) = e^{-\frac{\pi^2}{2}}+1$

u π: srovnání s $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)^p\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^p\,dx$ — $p>-1 \Rightarrow$ KONV.
$y=\pi-x$ — $p\le -1 \Rightarrow$ DIV.

ZÁVĚR: $p>3 \Rightarrow$ KONV.
$p\le 3 \Rightarrow$ DIV.

---

m) $\int_0^{\infty}\frac{x-\sin x}{x^p}\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,\infty)$, problém v 0 a v ∞

248

u 0: $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o_{x\to 0}(x^3) \Rightarrow \lim_{x\to 0+}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$

srovnání: $\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{x-\sin x}{x^p}}{\frac{x^3}{x^p}}=\frac{1}{6} \Rightarrow$ stačí vyšetřit $\int_0^1\frac{x^3}{x^p}\,dx$ — $3-p>-1 \Rightarrow$ KONV.
— $3-p\le -1 \Rightarrow$ DIV.

u ∞: $\frac{x-1}{x^p}\le\frac{x-\sin x}{x^p}\le\frac{x+1}{x^p} \Rightarrow$ konvergence je ekvivalentní konvergenci integrálu $\int_1^{\infty}\frac{x+\alpha}{x^p} = \int_1^{\infty}\underbrace{x^{1-p}+\alpha x^{-p}}_{=x^{1-p}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}_{\xrightarrow{x\to\infty}1}}\,dx$ — $1-p<-1 \Rightarrow$ KONV.
— $1-p\ge -1 \Rightarrow$ DIV.

ZÁVĚR: $\int_0^{\infty}\frac{x-\sin x}{x^p}\,dx$ KONV. pro $2<p<4$
DIV. pro $p\in(-\infty,2]\cup[4,\infty)$

---

n) $\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} px}{x^n}\,dx$

• $p=0 \Rightarrow$ integrand je konstantní $0 \Rightarrow$ KONV.

• $p>0$: $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} px}{px}=1 \Rightarrow$ srovnání s $\int_0^1\frac{px}{x^n}\,dx \Rightarrow 1-n>-1 \Rightarrow$ KONV
$1-n\le -1 \Rightarrow$ DIV.

$n\in\mathbb{N}$, tedy pouze pro $n=1$ je šance na konvergenci

$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\operatorname{arctg} px}{x^n}}{\frac{1}{x^n}}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ srovnání s $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^n} \Rightarrow$ $-n<-1 \Rightarrow$ KONV
$-n\ge -1 \Rightarrow$ DIV.

Tedy DIV i pro $n=1$.

• $p<0$: $\operatorname{arctg} px = -\operatorname{arctg}|p|x$, tedy $\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} px}{x^n}\,dx = -\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}|p|x}{x^n}\,dx$, kterýžto integrál jsme právě vyřešili.

ZÁVĚR: $p=0,\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow$ konv.
$p\ne 0,\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow$ div.

$\boxed{249}$ $\displaystyle\int_7^\infty \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}^{\geq 0} dx$

$$g(x) = \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}}{\frac{\ln x}{x\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = 1$$

třeba L'H

$\displaystyle\int_7^\infty \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}\,dx$ Ak (z tabulky)

[kdyby to někoho zajímalo, stačí srovnat třeba s $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}}$]

celkem $\boxed{Ak}$

[250] a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x \, dx$ ... integrand spojitý na $(0, \frac{\pi}{2})$, problém v 0 i v $\frac{\pi}{2}$.

v 0: $\lim_{x\to 0+} \cos^q x = 1$, $\lim_{x\to 0+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p \overset{VoLSF}{=} 1$

srovnání: $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin^p x \cos^q x}{x^p} = 1 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^p x \cos^q x \, dx$ KONV $\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^p$ KONV.

proto: $p > -1 \Rightarrow$ KONV, $p \leq -1 \Rightarrow$ DIV.

v $\frac{\pi}{2}$: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} \sin^p x = 1$, $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} \left(\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}\right)^q \overset{VoLSF}{=} 1$

srovnání: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} \frac{\sin^p x \cos^q x}{(\frac{\pi}{2}-x)^q} = 1 \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x \, dx$ KONV $\Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}-x)^q$ KONV.

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}-x)^q dx \underset{y=\frac{\pi}{2}-x}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} y^q \, dy$ ... proto $q > -1 \Rightarrow$ KONV, $q \leq -1 \Rightarrow$ DIV.

ZÁVĚR: $(p > -1) \wedge (q > -1) \Rightarrow$ KONV

$(p \leq -1) \vee (q \leq -1) \Rightarrow$ DIV.

ÚLOHA 3

a) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ ... integrand spojitý na $(0, \infty)$, problém v 0 i v ∞

v 0: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\sin x}{x^\alpha}}{x^{1-\alpha}} = 1 \Rightarrow$ srovnání s $\int_0^{\pi} x^{1-\alpha} dx$
$(\sin x \geq 0$ na $(0,\pi))$

Tedy $1-\alpha > -1$, tj. $\alpha < 2 \Rightarrow$ KONV.
$\alpha \geq 2 \Rightarrow$ DIV.

v ∞: AK: $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$. $-\alpha < -1 \Rightarrow$ ABS. KONV. (tj. $\alpha > 1$)

NAK: Kdykoli $\alpha > 0$, pak $\frac{1}{x^\alpha} \searrow 0$ pro $x \to \infty$.

$\forall M > 1$: $\left|\int_1^M \sin x \, dx\right| = |\cos 1 - \cos M| \leq 2$, tedy částečné integrály jsou omezené

DIV: Je-li $\alpha \leq 0$, pak u ∞ není splněna Bolzano-Cauchyova podm.
Ukažme, nechť $k \in \mathbb{N}$ spočtěme $\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \geq ((2k+1)\pi)^{-\alpha} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin x \, dx =$
$= 2 \cdot ((2k+1)\pi)^{|\alpha|}$

Tedy $\exists \varepsilon > 0 : \forall x_0 \in (0,\infty) : \exists c, d > x_0, c < d : \int_c^d \frac{\sin x}{x^\alpha} > \varepsilon$
třeba $\varepsilon = 2$
stačí $c = 2k\pi$, $d = (2k+1)\pi$, kde $k \in \mathbb{N}$ tak, aby $c > x_0$

Tedy pro $\alpha \leq 0$ integrál u ∞ diverguje

e) $\int_0^1 x^{-\ln x}\,dx = \int_0^1 e^{-\ln^2 x}\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,1]$.

v 0: $\ln^2 x \xrightarrow[x\to 0+]{} +\infty \Rightarrow e^{-\ln^2 x} \xrightarrow[x\to 0+]{} 0$ ... integrand lze spojitě rozšířit na $[0,1]$, je tedy omezený $\Rightarrow$ KONV.

---

[251] f) $\int_0^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{arctg}\,x}{x}\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,\infty) \Rightarrow$ nutno vyšetřit oba krajní body

v 0: $\mathrm{arctg}\,x = x + o(x) = x\cdot(1+o(1))$ .. Maclaurin 1. stupně

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{arctg}\,x}{x}}{\frac{\sin\frac{1}{x}\cdot x}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\mathrm{arctg}\,x}{x} = 1$$

$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{arctg}\,x}{x}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 \sin\frac{1}{x}$ KONV. $\qquad \int_0^1 \sin\frac{1}{x}$ KONV.

$|\sin\frac{1}{x}| \le 1 \Rightarrow \int_0^1 |\sin\frac{1}{x}|dx \le \int_0^1 1\,dx = 1 \Rightarrow$ ABS. KONV.

v ∞: $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0_+$, $\frac{\sin y}{y} \xrightarrow[y\to 0+]{} 1$, $\mathrm{arctg}\,x \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sin\frac{1}{x}\cdot \mathrm{arctg}\,x}{x}}{\frac{\frac{1}{x}\cdot\frac{\pi}{2}}{x}} \overset{\text{VoAL}}{\underset{\text{VoLSF}}{=}} 1 \Rightarrow \int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{arctg}\,x}{x} \text{ KONV.} \Leftrightarrow \int_1^\infty \frac{\frac{1}{x}\frac{\pi}{2}}{x}\,dx = \int_1^\infty \frac{c}{x^2}\,dx \text{ KONV.}$$

Zadaný integrál tedy konverguje

---

g) $\int_0^\pi \ln\sin x\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,\pi)$, v krajních bodech utíká do $-\infty$.

v 0: $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0+]{} 1$ ... zkusíme srovnat $\ln(\sin x)$ s $\ln x$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln\sin x}{\ln x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim \cos x \cdot \frac{x}{\sin x} \overset{\text{VoAL}}{=} 1$$

$\int_0^1 \ln\sin x\,dx$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 \ln x\,dx$ KONV. $\qquad \int_0^1 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_0^1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ KONV.

v π: $\frac{\sin x}{\pi - x} \xrightarrow[x\to\pi-]{} 1$ ... plyne z Taylorova rozvoje sinu v bodě π.

$$\lim_{x\to\pi-} \frac{\ln\sin x}{\ln(\pi-x)} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\pi-} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{\pi-x}} = \lim_{x\to\pi-} (-\cos x)\cdot\frac{\pi-x}{\sin x} \overset{\text{VoAL}}{=} 1$$

$\int_1^\pi \ln\sin x\,dx$ KONV. $\Leftrightarrow \int_1^\pi \ln(\pi-x)\,dx$ KONV $\Leftrightarrow \int_0^{\pi-1} \ln y\,dy$ KONV.
substit. $y = \pi - x$

ZÁVĚR: $\int_0^\pi \ln\sin x\,dx$ KONVERGUJE

$\boxed{252}$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^p+x^q}$ $\overset{0}{\underset{1}{\nearrow}}$ $p,q \in \mathbb{R}$ BÚNO $p \leq q$

"0" $g(x) = \dfrac{1}{x^p}$

LSK $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x^p+x^q}}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+\frac{x^q}{x^p}} = \begin{cases} 1 & p<q \\ \frac{1}{2} & p=q \end{cases}$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ Ak $\Leftrightarrow$ $p<1$ $(q \in \mathbb{R})$

"∞" $g(x) = \dfrac{1}{x^q}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^p+x^q}}{\frac{1}{x^q}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{x^p}{x^q}+1} = \begin{cases} 1 & p<q \\ 1/2 & p=q \end{cases}$

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^q}$ Ak $\Leftrightarrow$ $\boxed{q>1}$

Záver $\boxed{\text{Ak} \Leftrightarrow q>1 \ \& \ p<1}$

$\boxed{253}$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \underbrace{\ln(\cos x)}_{\leq 0} \underset{\underset{0}{\vee\!\mid}}{\mathrm{tg}^p x} \, dx$

nemění znaménko (LSK)

u "0" $\quad \mathrm{tg}\, x \approx x \qquad \underbrace{\ln(\underset{\underset{1}{\downarrow}}{\cos x})}\approx \cos x - 1 \approx -x^2$

$\boxed{LSK}$

$$g(x) = x^2 \cdot x^{p}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|\ln(\cos x)\ \mathrm{tg}^p x|}{x^2 \cdot x^p} = \frac{1}{2} \quad (\text{třeba z } L'H)$$

($\frac{\mathrm{tg}^p x}{x^p} \to 1$)

tedy $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x^{p+2}\, dx$ $\quad$ AK $\Leftrightarrow$ $p+2 > -1$

$\boxed{p > -3}$

u "$\frac{\pi}{2}$" $\quad \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\cos x) \frac{\sin^p x}{\cos^p x}$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos^p x \approx \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^p$$

$$\ln(\cos x) \approx \ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$g(x) = \frac{|\ln(\frac{\pi}{2} - x)|}{(\frac{\pi}{2} - x)^p}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \frac{\frac{|\ln(\cos x)|\ \sin^p(x)}{\cos^p x}}{\frac{|\ln(\frac{\pi}{2}-x)|}{(\frac{\pi}{2}-x)^p}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \underset{\underset{1}{\downarrow}}{\frac{(\frac{\pi}{2}-x)^p}{\cos^p x}} \cdot \underset{\underset{1}{\downarrow}}{\frac{\ln(\cos x)}{\ln(\frac{\pi}{2}-x)}} \overset{L'H}{=} 1$$

($\sin^p(x) \to 1$)

tedy $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\ln(\frac{\pi}{2}-x)}{(\frac{\pi}{2}-x)^p}\, dx = \int_{\pi/4}^{0} -\frac{y}{y^p}\, dy = \int_0^{\pi/4} y^{1-p}\, dy$ $\quad$ AK $\Leftrightarrow$ $1-p > -1$

$\boxed{2 > p}$

$y = \frac{\pi}{2} - x$

$dy = -dx$

Závěr: $\int$ AK $\Leftrightarrow$ $\boxed{-3 < p < 2}$

$\boxed{255}$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$ ≥ 0

„0“: $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$ $\displaystyle\int_0^1 x^{2-1/2}\,dx$ Ak

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$\Rightarrow$ Ak

„∞“ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{2\sqrt{x}}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{2\sqrt{x}} - \underbrace{\frac{\cos 2x}{2\sqrt{x}}}_{\text{k z Dirichleta}}$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\downarrow$ diverguje ze žáky

Celkem diverguje (lze ukázat i z B-C podm.)

$\boxed{256}$ $\int_0^\infty u \cos u^4 \, du = \int_0^\infty x^{1/4} \cdot \frac{1}{4} x^{-3/4} \cos x \, dx = \frac{1}{4}\int_0^\infty x^{-1/2} \cos x \, dx$

$0/1 \ \infty$ $\qquad u^4 = x \qquad u = x^{1/4}$

$\qquad 4u^3 du = dx \qquad du = \frac{1}{4} x^{-3/4} dx$

$$\int_0^\infty \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}\ \underbrace{\cos x}\ dx$$

monot. $\quad \int \cos x = \sin x$ om. $\Big\}$ DIR $\quad$ konv. $\quad$ (~~=~~ Fim) $\boxed{NAŽ}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

- Až u ∞

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^{1/2}}$$

$a = 1/2$ ~~Až~~ ne

z tabulky jinak (BC) (viz kalendř BC) (po sin složitě)

260

Příklad 10.8. Pro každou dvojici čísel α, β (z $\mathbb{R}$) je funkce

$$f(x) := \frac{1}{x^\alpha \lg^\beta x} \tag{35}$$

spojitá a kladná v intervalu $(1, +\infty)$; vyšetříme, kdy existuje integrál $\int_2^{+\infty} f$.

Pro $\alpha = 1$ jsme velmi podobný problém (s jiným označením parametrů) vyřešili již v Př. 10.4: $\int_e^{+\infty} f$ existuje, právě když je $\beta > 1$. Protože existence integrálu $\int_2^e f$ plyne ze spojitosti funkce f v intervalu $\langle 2, e\rangle$, je i existence integrálu $\int_2^{+\infty} f$ (pro $\alpha = 1$) ekvivalentní s nerovností $\beta > 1$.

Je-li $\alpha > 1$, je číslo $\gamma := \frac{1}{2}(\alpha - 1)$ kladné, a v důsledku toho je $x^\gamma \lg^\beta x \to +\infty$ pro $x \to +\infty$ a pro každé $\beta \in \mathbb{R}$. Z toho plyne, že

$$f(x) = \frac{1}{x^{1+\gamma} \cdot x^\gamma \lg^\beta x} = O\Big(\frac{1}{x^{1+\gamma}}\Big) \quad \text{pro} \quad x \to +\infty,$$

a protože $1 + \gamma > 1$, integrál $\int_2^{+\infty} f$ existuje podle 1. části věty 10.11.

Je-li $\alpha < 1$, je číslo $\delta := \frac{1}{2}(1 - \alpha)$ kladné, takže $x^{-\delta} \lg^\beta x \to 0$ pro $x \to +\infty$ a pro každé $\beta \in \mathbb{R}$. Z toho plyne, že $h(x) := 1/(x^{-\delta} \lg^\beta x) \to +\infty$, a existuje tedy $K \in \mathbb{R}_+$ tak, že nerovnost $h(x) \geq K$ platí pro všechna $x \in \langle 2, +\infty)$.[5]) V tomto intervalu pak platí i relace

$$f(x) = \frac{1}{x^{1-\delta} \cdot x^{-\delta} \lg^\beta x} \geq \frac{K}{x^{1-\delta}}\,;$$

protože je $1 - \delta < 1$, integrál $\int_2^{+\infty} (K/x^{1-\delta})\, dx$ neexistuje; podle V. 10.10 platí totéž i o integrálu $\int_2^{+\infty} f(x)\, dx$.

Tím je dokázáno, že

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \lg^\beta x} \ \text{ existuje } \Leftrightarrow (\alpha > 1) \vee ((\alpha = 1) \wedge (\beta > 1)). \tag{36}$$

Poznámka 10.9. Vyšetření existence integrálu v právě dořešeném příkladě dalo dost práce; příčinou je skutečnost, že funkce $\lg^\beta x$ a x^α nejsou téhož řádu pro žádnou dvojici čísel α, β. (Relace $\lg^\beta x \asymp x^\alpha$ pro $x \to +\infty$ nemůže platit, protože pro každé $\beta \in \mathbb{R}$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}_+$ je $\lg^\beta x = o(x^\alpha)$ pro $x \to +\infty$.[6]) V souvislosti s tím říkáme, že *každá kladná mocnina x roste do nekonečna rychleji než kterákoli mocnina* $\lg x$. Této okolnosti bylo nutné obratně využít – pro $\alpha > 1$ k důkazu existence, pro $\alpha < 1$ k důkazu neexistence integrálu. Podobně bychom postupovali, kdyby se

[5]) Podrobněji: Z podmínky $h(x) \to +\infty$ pro $x \to +\infty$ plyne existence čísla $c \in (2, +\infty)$, pro něž $x > c \Rightarrow h(x) > 1$. Protože h je na intervalu $\langle 2, c\rangle$ spojitá a kladná, má tam i kladné minimum; označíme-li je d, stačí položit $K = \min(d, 1)$.

[6]) Připomeňme, že to znamená, že podíl levé a pravé strany této „rovnosti" má pro $x \to +\infty$ nulovou limitu. (Sr. s (25) v kapitole 6.)

§22. **Integrál součtu.** Občas se hodí následující jednoduché pozorování.

Nechť f, g jsou spojité na (a,b) a $\int_a^b g$ konverguje. Pak $\int_a^b f$ konverguje, právě když konverguje $\int_a^b (f+g)$.

Příklad Konverguje integrál $\int_0^1 \frac{1-\sin x}{x}\,dx$?

Řešení. Integrál $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ konverguje (viz §20), zatímco $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ diverguje dle příkladu v předchozím paragrafu. Proto podle uvedeného tvrzení náš integrál diverguje. ■

Další, méně triviální, případy použití pozorování z tohoto paragrafu v kombinaci s jinými kritérii jsou uvedeny dále.

§23. **Bolzano-Cauchyova podmínka.** Následující věta dává nutnou a postačující podmínku pro konvergenci integrálu. Je přeformulací Bolzano-Cauchyovy podmínky pro existenci vlastní limity primitivní funkce.

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a,b)$. Pak integrál $\int_a^b f$ konverguje, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $b' \in (a,b)$ takové, že pro každé dva body x_1, x_2 splňující $b' < x_1 < x_2 < b$ platí $|\int_{x_1}^{x_2} f| < \varepsilon$. Analogické tvrzení platí pro interval typu $(a,b]$.

Příklad Je-li $\alpha \geq 0$, integrál $\int_1^\infty x^\alpha \sin x\,dx$ diverguje.

Řešení. Použijeme Bolzano-Cauchyovu podmínku. Je-li $k \geq 1$ celé číslo, platí

$$\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^\alpha \sin x\,dx\right| \geq (k\pi)^\alpha \int_0^\pi \sin x\,dx = 2(k\pi)^\alpha \geq 2\pi^\alpha.$$

Zvolme nyní $\varepsilon = \pi^\alpha$. Pro každé $b' < \infty$ existuje $k \geq 1$ celé tak, že $k\pi > b'$. Položme $x_1 = k\pi$ a $x_2 = (k+1)\pi$. Pak dle uvedeného výpočtu je $\left|\int_{x_1}^{x_2} x^\alpha \sin x\,dx\right| > \varepsilon$. Integrál proto diverguje. ■

§24. **Srovnávací kritérium** je obsaženo v následující větě.

Nechť funkce f a g jsou spojité na intervalu (a,b) a pro každé $x \in (a,b)$ platí $|f(x)| \leq g(x)$. Pokud $\int_a^b g$ konverguje, pak $\int_a^b f$ konverguje též. (A tedy, diverguje-li $\int_a^b f$, diverguje i $\int_a^b g$.)

Důsledkem je následující tvrzení.

Nechť f je funkce spojitá na (a,b). Pokud $\int_a^b f$ konverguje absolutně, pak i konverguje.

Příklad Pokud $\alpha > 1$, pak $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ konverguje (dokonce absolutně).

Závěr je, že integrál ze zadání konverguje, právě když $\alpha < -1$ nebo $\alpha > 1$. ∎

§**27.** Užitečným kritériem pro neabsolutní konvergenci integrálu je **Dirichletovo kritérium.**

Nechť funkce f a g jsou spojité na intervalu $[a, b)$, každá (ekvivalentně nějaká) primitivní funkce k f je omezená na (a, b), funkce g je monotónní na $[a, b)$ a $\lim_{x \to b-} g(x) = 0$. Pak $\int_a^b fg$ konverguje. Analogické tvrzení platí pro intervaly typu $(a, b]$.

<u>Příklad</u> Integrál $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}\, dx$ pro $\alpha > 0$ konverguje.

Řešení. Funkce $f(x) = \cos x$ má omezenou primitivní funkci $\sin x$, funkce $g(x) = 1/x^\alpha$ je klesající a má v $+\infty$ limitu 0. Navíc jsou obě funkce spojité na $[1, \infty)$, a tedy integrál konverguje dle Dirichletova kritéria. ∎

Poznamenejme, že tento příklad bychom mohli řešit pomocí metody per partes jako v §26. To není náhoda, Dirichletovo kritérium pro případ, kdy g má spojitou derivaci, lze pomocí metody per partes dokázat.

<u>Příklad</u> Integrál $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx$ konverguje, právě když $\alpha > 1$.

Řešení. Konvergence pro $\alpha > 1$ byla dokázána v §24, divergence pro $\alpha \leq 0$ plyne z příkladu v §23 a z toho, že absolutní konvergence implikuje konvergenci (viz §24). Nechť $\alpha \in (0, 1]$. Platí

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1 - \cos 2x}{2x^\alpha}.$$

Přitom $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ diverguje a $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x^\alpha}\, dx$ konverguje podle Dirichletova kritéria (funkce x^α je klesající a má v ∞ limitu 0, funkce $\cos 2x$ má omezenou primitivní funkci). A tedy $\int_1^\infty \frac{1 - \cos 2x}{2x^\alpha}\, dx$ diverguje (viz §22). Podle srovnávacího kritéria původní integrál diverguje. ∎

261 <u>Příklad</u> Zjistěte, zda konverguje integrál $\int_2^\infty \frac{\sin x}{x + 2\sin x}\, dx$.

Řešení. Funkce $\sin x$ má omezenou primitivní funkci, a tak můžeme zkusit použít Dirichletovo kritérium. Funkce $\frac{1}{x + 2\sin x}$ má limitu 0, ale není monotónní (jest $(x + 2\sin x)' = 1 + 2\cos x$, a tato derivace pravidelně mění znaménko). Takže Dirichletovo kritérium použít nelze. Víme však, že konverguje $\int_2^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ a můžeme zkusit použít postřehu z §22. Tedy náš integrál konverguje, právě když konverguje integrál $\int_2^\infty \left(\frac{\sin x}{x + 2\sin x} - \frac{\sin x}{x}\right) dx$. Upravíme-li integrand, vyjde $\int_2^\infty \frac{-2\sin^2 x}{x(x + 2\sin x)}\, dx$. Tento integrál srovnáme s konvergentním integrálem $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2}$. Je totiž

$$|-2\sin^2 x| \leq 2 \quad \text{a} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{x(x + 2\sin x)}}{\frac{1}{x^2}} = 2.$$

Proto $\int_2^\infty \frac{-2\sin^2 x}{x(x+2\sin x)}\,dx$ konverguje, a tudíž i integrál ze zadání konverguje. ∎

Příklad Zjistěte, zda konverguje integrál $\int_4^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}+2\sin x}\,dx$.

Řešení. Postupujme podobně jako v předchozím příkladu s využitím faktu, že $\int_4^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ konverguje. Jest $\frac{\sin x}{\sqrt{x}+2\sin x} - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{-2\sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2\sin x)}$, konvergence integrálu ze zadání je tedy ekvivalentní konvergenci $\int_4^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2\sin x)}\,dx$. S ohledem na předminulý příklad lze odhadnout, že tento integrál bude divergovat. Pokusme se to dokázat. Platí

$$\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2\sin x)} \geq \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} = \frac{1-\cos 2x}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}.$$

Protože $\int_4^\infty \frac{\cos 2x}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}\,dx$ konverguje podle Dirichletova kritéria, stačí ukázat, že integrál $\int_4^\infty \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$ diverguje. To plyne z limitního srovnávacího kritéria, neboť $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$ a $\int_4^\infty \frac{dx}{x}$ diverguje. Tak jsme ukázali, že integrál ze zadání diverguje. ∎

Předchozí příklad svědčí o tom, že Dirichletovo kritérium by neplatilo, kdybychom v něm vynechali předpoklad monotonie funkce g. Předminulý příklad naproti tomu ukazuje, že absence monotonie nezaručí divergenci.

§28. Spolu s Dirichletovým kritériem se obvykle uvádí **Abelovo kritérium.** Uvádíme ho zde zvlášť, protože na rozdíl od Dirichletova kritéria má i symetrickou verzi.

Nechť funkce f a g jsou spojité na intervalu $[a,b)$, funkce g nechť je na tomto intervalu monotónní a omezená.

(i) Jestliže konverguje $\int_a^b f$, konverguje i integrál $\int_a^b fg$.

(ii) Pokud navíc $\lim\limits_{x\to b-} g(x) \neq 0$, pak $\int_a^b f$ konverguje, právě když konverguje integrál $\int_a^b fg$.

Analogické tvrzení platí pro intervaly typu $(a,b]$.

Příklad Zjistěte, pro které hodnoty parametrů konverguje, případně absolutně konverguje, $\int_1^\infty \sin(x^\alpha)\cdot \operatorname{arctg}^\beta x \cdot \frac{x^2}{x^2+1}\cdot \cos\frac{1}{x}\cdot x^\gamma\,dx$.

Řešení. Nejprve si úlohu zjednodušíme podle symetrické verze Abelova kritéria. Všechny činitele v integrandu jsou spojité funkce na $[1,\infty)$. Funkce $\cos(1/x)$ je na $[1,\infty)$ rostoucí a v ∞ má limitu 1. A tedy konvergence (absolutní konvergence) integrálu ze zadání je ekvivalentní konvergenci (absolutní konvergenci) integrálu $\int_1^\infty \sin(x^\alpha)\cdot \operatorname{arctg}^\beta x\cdot \frac{x^2}{x^2+1}\cdot x^\gamma\,dx$. To plyne z Abelova kritéria. Dále funkce $\operatorname{arctg}^\beta x$ je monotónní (rostoucí pro $\beta > 0$, klesající pro $\beta < 0$, konstantní pro $\beta = 0$) a má v ∞ vlastní nenulovou limitu $(\pi/2)^\beta$. Funkce $\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$ je rostoucí a má limitu 1. Dvojí použití Abelova kritéria dává, že konvergence (absolutní konverv integrálu vyskytl např. součin $x^\alpha \exp(\beta x)$, protože ani tentokrát nemají faktory stejný řád pro $x \to +\infty$. Čtenáři doporučujeme, aby si postupy užité v Př. 10.8 dobře promyslil. □

Dvě kritéria existence integrálu, která obsahuje následující věta, lze užít (na rozdíl od V. 10.10 a V. 10.11) i k vyšetření *neabsolutní konvergence*.

Věta 10.12. (Abelovo a Dirichletovo kritérium.) *Nechť $-\infty < a < b \le +\infty$ a nechť funkce $f : \langle a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá, funkce $g : \langle a, b) \to \mathbb{R}$ spojitá a monotónní.*

Pak integrál

$$\int_a^b fg \tag{37}$$

existuje, platí-li jedna z těchto podmínek:

$$\int_a^b f \text{ existuje a funkce } g \text{ je omezená v } \langle a, b) \tag{38}$$

(Abelovo kritérium),

$$\text{funkce } f \text{ má omezenou primitivní funkci v } \langle a, b) \text{ a } \lim_{x \to b} g(x) = 0 \tag{39}$$

(Dirichletovo kritérium).

Dále platí: Jsou-li funkce h_1, h_2 spojité a kladné v $\langle a, b)$, je-li jejich podíl h_1/h_2 monotónní v $\langle a, b)$ a je-li $h_1(x) \asymp h_2(x)$ pro $x \to b-$, je existence integrálu $\int_a^b fh_1$ ekvivalentní s existencí integrálu $\int_a^b fh_2$ (symetrické Abelovo kritérium).

Analogická tvrzení platí pro intervaly $(a, b\rangle \subset \mathbb{R}$, kde $-\infty \le a < b < +\infty$.

Bc

Příklad 10.9. Vyšetřme absolutní resp. neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx, \tag{40}$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$. Integrand $f(x) := \sin x / x^\alpha$ je spojitý v $\mathbb{R}_+$ a splňuje podmínky

$$f(x) \asymp \frac{1}{x^{\alpha-1}} \text{ pro } x \to 0+, \quad f(x) = O\Big(\frac{1}{x^\alpha}\Big) \text{ pro } x \to +\infty. \tag{41}$$

V intervalu $(0, \pi)$ je $f(x) > 0$, a podle V. 10.11 $\int_0^\pi f$ tedy existuje, právě když je $\alpha < 2$; konvergence je pak samozřejmě absolutní. Podle druhé z relací (41), podle V. 10.10 a podle F z Př. 10.2 konverguje integrál $\int_\pi^{+\infty} f$ absolutně, je-li $\alpha > 1$. Zatím jsme tedy dokázali, že

$$\text{pro } \alpha \in (1, 2) \text{ konverguje integrál (40) absolutně.} \tag{42_1}$$

Dirichletovo kritérium nám poskytne další informaci: Protože funkce $-\cos x$ (která je funkcí primitivní k funkci $\sin x$) je v $\mathbb{R}_+$ omezená, protože funkce $1/x^\alpha$

Rc

je tam spojitá a monotónní a konverguje k 0 pro $x \to +\infty$, je-li $\alpha \in \mathbb{R}_+$, integrál $\int_\pi^{+\infty} f$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}_+$ existuje. Z toho plyne, že *integrál* (40) *existuje pro všechna* $\alpha \in (0,2)$.

Dokažme nyní sporem, že

(42_2) *pro každé* $\alpha \in (0,1)$ *konverguje integrál* (40) *neabsolutně.*

Předpokládejme, že integrál $\int_\pi^{+\infty}$ konverguje (pro některé $\alpha \in (0,1)$) absolutně, tj. že existuje integrál

$$I := \int_\pi^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx. \tag{43}$$

Protože funkce $G(x) := \int_\pi^x |f|$ je primitivní funkcí funkce $|f|$ v $\mathbb{R}_+$, je existence integrálu (43) ekvivalentní s existencí konečné limity $I := G(+\infty-)$; pak je ovšem i $\lim_{n\to\infty} G(n\pi) = I$. Z toho plyne, že

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (G((k+1)\pi) - G(k\pi)) \\ &= \lim_{n\to\infty} G(n\pi) = I \ (< +\infty). \end{aligned} \tag{44}$$

Zároveň však je

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx \geq \frac{1}{((k+1)\pi)^\alpha} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\, dx \geq \frac{2}{(k+1)\pi}$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$, takže

$$G(n\pi) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} \to +\infty \quad \text{pro } n \to \infty, \tag{45}$$

což je ve sporu s (44). Tím je (42_2) dokázáno.

Zbývá ověřit, že

(42_3) *pro žádné* $\alpha \leq 0$ *integrál* (40) *neexistuje.*

Označíme-li $F(x)$ nějakou primitivní funkci k funkci $\sin x / x^\alpha$ v $\mathbb{R}_+$, plynula by z existence integrálu $\int_\pi^{+\infty} f$ existence konečné limity $\lim_{n\to\infty} F(n\pi)$. Kdyby bylo $F(n\pi) \to A \in \mathbb{R}$, bylo by i $F((n+1)\pi) \to A$, a tedy $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f = F((n+1)\pi) - F(n\pi) \to 0$. To však není pravda, protože (pro každé $\alpha \leq 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$) je

$$\left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx \right| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\, dx \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\, dx = 2. \tag{46}$$

Obsah tvrzení (42_1), (42_2), (42_3) je úplným řešením našeho problému. □