3. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com
Prosím, zítra si vezměte kalkulačky.

Teorie

Věta 1 (Lagrangeův tvar zbytku)**.** Nechť f je reálná funkce, $a < x$. Nechť f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$-derivaci. Pak existuje $c \in (a, x)$ tak, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Věta 2 (Vlastnosti o)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Jestliže $f_1(x) = o(g(x)),\ x \to a,$ a $f_2(x) = o(g(x)),\ x \to a$, pak

$$(f_1 + f_2)(x) = o(g(x)),\ x \to a.$$

2. Jestliže $f_1(x) = o(g_1(x)),\ x \to a,$ a $f_2(x) = o(g_2(x)),\ x \to a$, pak

$$(f_1 \cdot f_2)(x) = o((g_1 \cdot g_2)(x)),\ x \to a.$$

3. Jestliže $f(x) = o(g_1(x)),\ x \to a,$ a $\lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \in \mathbb{R}$, pak

$$f(x) = o(g_2(x)),\ x \to a.$$

4. Je-li $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \leq n$, a $f(x) = o((x-a)^n)$, $x \to a$, potom

$$f(x) = o((x-a)^m),\ x \to a.$$

Věta 3. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, nechť φ je funkce definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu a a nechť f a g jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí bodu b. Nechť $f(y) = o(g(y))$, $y \to b$ a $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$. Nechť dále existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta) \varphi(x) \neq b.$$

Pak

$$f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x))),\ x \to a.$$

Poznámka 4.

1. Výraz $R_n^{f,a}(x) := f(x) - T_n^{f,a}(x)$ nazýváme *zbytkem po Taylorově polynomu řádu n.*

2. Peanova věta tedy říká, že $f(x) - T_n^{f,a}(x) = o((x-a)^n)$, $x \to a$.

Příklady

1. Pomocí Taylorova rozvoje určete následující limity.

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$

   (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$

   (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{\operatorname{arctan}^3 x}$

   (g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^2 \sin^4 x}$

   (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$, $a > 0$

   (i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right)$

   (j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$

   (k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{(\exp x - 1)(\exp(-x^2) - 1)^2}$

   (l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin x - \operatorname{tg} x - x}{2\sin x - \operatorname{arctan} x - x}$

   (m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$

2. Pomocí Taylorova rozvoje do 1. stupně určete přibližnou hodnotu:

   (a) $\operatorname{arctan} 1,1$

   (b) $\ln 1,3$

   (c) $\sin -0,22$

3. Vypočtěte přibližnou hodnotu čísla e s chybou menší než $0,001$.

4. Pro jaké hodnoty platí přibližný vztah $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ s přesností $0,0001$?

5. Určete maximální chybu, které se dopustíme, nahradíme-li na intervalu $(0,9; 1,1)$ funkci $\operatorname{arctan} x$ Taylorovým polynomem stupně 2 v bodě $x_0 = 1$.

Bonus

6. Určete, zda je pravda:

   (a) Má - li funkce derivace všech řádů, tak její Taylorova řada konverguje v každém bodě.

   (b) Má - li funkce derivace všech řádů a Taylorova řada konverguje, tak už konverguje k původní funkci.

7. Zjistěte, pro která $C \in \mathbb{R}$ má funkce $f(x) = \cos x - e^{-x^2/2} + Cx^4$ lokální maximum v bodě 0.

8. Zjistěte, zda je 0 inflexním bodem funkce $\sin x + \sinh x$.