Řady a Taylorův rozvoj

Lemma. *Nechť f je definovaná a spojitá na intervalu $[a,b)$, $f'(a)=0$ a $f'>0$ na (a,b). Potom f je ostře rostoucí na $[a,b)$ ve smyslu*

$$\text{pro každé } x,y\in[a,b),\ x<y \text{ je } f(x)<f(y).$$

Důkaz: Protože $f'>0$ na (a,b), stačí dokázat, že f je ostře rostoucí v bodě a, tedy že pro každé $x\in(a,b)$ je $f(x)>f(a)$. Předpokládejme, že tomu tak není. Potom existuje $x\in(a,b)$ tak, že $f(x)\le f(a)$. Protože f je ostře rostoucí v bodě x, existuje $y\in(a,x)$ tak, že $f(y)<f(a)$, a protože f je ostře rostoucí na intervalu (a,y), pro každé $z\in(a,y)$ platí, že $f(z)\le f(y)<f(a)$. Protože funkce f je na $[a,b)$, je zřejmě

$$\lim_{z\to a+} f(z)=f(a),$$

odkud vyplývá, že $f(a)\le f(y)<f(a)$, což je spor. □

Klíčové tvrzení. *Nechť f má spojité derivace do n-tého řádu na nějakém okolí bodu a,*

$$f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0 \qquad a \qquad f^{(n)}(a)\neq 0.$$

Potom existuje pravé a levé okolí bodu a tak, že f je na těchto okolích ryze monotónní.

Důkaz: Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $f^{(n)}(a)>0$ (jinak uvažme funkci $-f$).

Ze spojitosti $f^{(n)}$ plyne, že $f^{(n)}>0$ na nějakém okolí bodu a. Dokazujme nyní monotonii na nějakém pravém okolí, na levém by se vše dělalo analogicky.

Protože existuje $b>a$ tak, že $f^{(n)}>0$ na $[a,b)$, je $f^{(n-1)}$ rostoucí na $[a,b)$, a protože $f^{(n-1)}(a)=0$, je $f^{(n-1)}>0$ na (a,b).

Z předchozího lemmatu vyplývá, že $f^{(n-2)}$ je na $[a,b)$ ostře rostoucí. Podle předpokladu tvrzení je $f^{(n-2)}(a)=0$, tedy musí být $f^{(n-2)}>0$ na (a,b).

Z předchozího lemmatu vyplývá, že $f^{(n-3)}$ je na $[a,b)$ ostře rostoucí. Podle předpokladu tvrzení je $f^{(n-3)}(a)=0$, tedy musí být $f^{(n-3)}>0$ na (a,b).

A tak dále. Opakovaným použitím tohoto kroku dostaneme, že f je na $[a,b)$ ostře rostoucí. □

Podotkněme, že není možné dostat monotonii na nějakém okolí a, pokud n je sudé. Stačí uvážit funkci $f(x)=x^2$ v bodě $a=0$.

Klíčové tvrzení budeme používat pro důkaz monotonie posloupnosti, jejichž chování budeme odhadovat pomocí Taylorových rozvojů. Namísto formulace obecného tvrzení raději vše ukážeme na příkladech.

Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci řad.

.1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{k}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}-e\right)\cos kx$, *kde $x\in\mathbb{R}$.*

Návod: Řadu napíšeme ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty}k\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}-e\right)\frac{\cos kx}{\sqrt{k}}.$$

Nejprve vyloučíme absolutní konvergenci. K tomu stačí ukázat, že

$$\lim_{k\to\infty}k\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}-e\right) \quad \text{je vlastní a nenulová,}$$

protože potom řada absolutních hodnot diverguje srovnáním s divergentní řadou $\sum_k \frac{|\cos kx|}{\sqrt{k}}$.

Důkaz tvrzení. Platí

$$\lim_{k\to\infty} k\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k - e\right) = \lim_{k\to\infty} k\left(e^{\ln(1+1/k)^k} - e\right) = e\cdot \lim_{k\to\infty} k\left(e^{\ln(1+1/k)^k-1} - 1\right) =$$

a protože funkce $(1+1/x)^x$ je monotónní a pro $x\to\infty$ konverguje k Eulerovu číslu, je podle Heineho věty a věty o limitě složené funkce

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left(e^{\ln(1+1/k)^k-1}-1\right)}{\ln(1+1/k)^k-1} = 1,$$

tudíž výpočet může pokračovat následovně

$$= e\cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\left(e^{\ln(1+1/k)^k-1}-1\right)}{\ln(1+1/k)^k-1}\cdot \left[k(\ln(1+1/k)^k-1)\right] = e\cdot \lim_{k\to\infty}\left[k(k\ln(1+1/k)-1)\right] =$$

za předpokladu, že limita napravo existuje. Tu dostaneme rozvinutím v Taylorovu řadu.

$$= e\cdot \lim_{k\to\infty}\left[k(k\ln(1+1/k)-1)\right] = e\cdot \lim_{k\to\infty}\left[k\cdot\left(k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+o(k^{-2})\right)-1\right)\right] =$$

$$= e\cdot \lim_{k\to\infty}\left[k\cdot\left(1-\frac{1}{2k}+o(k^{-1})-1\right)\right] = e\cdot \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{1}{2}+o(1)\right] = -\frac{e}{2}.$$

Tím je tvrzení dokázáno.

Neabsolutní konvergence. Řada konverguje neabsolutně pro $x\neq 0$ modulo 2π. Abychom to dokázali, řadu napišme ve tvaru

$$\sum_k \frac{\cos kx}{\sqrt{k}}\cdot k\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k - e\right) = \sum_k \frac{\cos kx}{\sqrt{k}}\cdot k\left(e^{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} - e\right) =$$

a ještě upravme do tvaru

$$\sum_k \frac{\cos kx}{\sqrt{k}}\cdot k\cdot e\cdot\left(e^{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k-1} - 1\right) =$$

$$= \sum_k \frac{\cos kx}{\sqrt{k}}\cdot e\cdot \frac{\left(e^{\ln(1+1/k)^k-1}-1\right)}{\ln(1+1/k)^k-1}\cdot\left[k\left(k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-1\right)\right]$$

Provedeme sérii úvah.

Řada $\sum \frac{\cos kx}{\sqrt{k}}$ konverguje neabsolutně podle Dirichletova kritéria.

Protože řada $\sum \frac{\cos kx}{\sqrt{k}}$ konverguje, konverguje také řada $\sum \frac{\cos kx}{\sqrt{k}}\cdot e$ (je to jen přenásobení číslem).

Funkce $\frac{e^x-1}{x}$ je rostoucí na $\mathbb{R}$ (to si derivováním dokažte sami).

Posloupnost $(1+\frac{1}{k})^k$ je rostoucí (známý fakt), a tudíž posloupnost $\ln(1+\frac{1}{k})^k$ je rostoucí, a tudíž posloupnost $\ln(1+\frac{1}{k})^k-1$ je rostoucí. S využitím toho, že funkce $\frac{e^x-1}{x}$ je rostoucí na $\mathbb{R}$ (stačilo by okolí nuly) dostáváme, že také posloupnost $\{\frac{\left(e^{\ln(1+1/k)^k-1}-1\right)}{\ln(1+1/k)^k-1}\}$ je rostoucí.

Protože řada $\sum \frac{\cos kx}{\sqrt{k}}\cdot e$ konverguje a posloupnost $\{\frac{\left(e^{\ln(1+1/k)^k-1}-1\right)}{\ln(1+1/k)^k-1}\}$ je monotónní, řada $\sum \frac{\cos kx}{\sqrt{k}}\cdot e\cdot \frac{\left(e^{\ln(1+1/k)^k-1}-1\right)}{\ln(1+1/k)^k-1}$ konverguje podle Abelova kritéria.

Potřebujeme dokázat, že posloupnost $\{k\left(k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-1\right)\}$ je od jistého členu počínaje monotónní. Stačí ukázat, že funkce $f(x) = x(x\ln(1+\frac{1}{x})-1)$ je monotónní na nějakém okolí nekonečna, což je totéž, jako že funkce $g(y) = \frac{1}{y}(\frac{1}{y}\ln(1+y)-1)$ je monotónní na nějakém pravém okolí nuly. Taylorův rozvoj funkce g je

$$\frac{1}{y}\left(\frac{1}{y}\left[y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+o(y^3)-1\right]\right) = \frac{1}{y}\left(-\frac{y}{2}+\frac{y^2}{3}+o(y^2)\right) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{3}y+o(y).$$

Z toho plyne, že funkci g lze v nule spojitě dodefinovat jako $g(0) = -\frac{1}{2}$ a takto spojitě dodefinovaná funkce g má v nule derivaci $g'(0) = \frac{1}{3}$. A protože má derivace i vyšších řádů, je první derivace na okolí nuly spojitá. První derivace funkce g je tedy na nějakém okolí nuly kladná, funkce g je tedy na nějakém okolí nuly ostře rostoucí, což bylo dokázati.

Konečně tedy, protože řada $\sum \frac{\cos kx}{\sqrt{k}} \cdot e \cdot \frac{\left(e^{\ln(1+1/k)^k - 1} - 1\right)}{\ln(1+1/k)^k - 1}$ konverguje a posloupnost $\{k\left(k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - 1\right)\}$ je od jistého členu počínaje monotónní, vyšetřovaná řada konverguje podle Abelova kritéria.

Klíčové tvrzení jsme nepotřebovali, protože funkce, kterou jsme rozvíjeli, měla hned následující člen Taylorova rozvoje po členu „určujícím její chování“ nenulový, a tedy hned první derivace funkce $\frac{\text{"posloupnost"}}{\text{"určující člen"}}$ byla nenulová. Rozmyslete!

.2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{k} - \frac{1}{k}\right)\frac{\cos k}{k^a}$, *kde* $a \in \mathbb{R}$.

Návod: Máme vyšetřit absolutní a neabsolutní konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{k} - \frac{1}{k}\right)\frac{\cos k}{k^a}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Podle Taylorova rozvoje pro funkci sinus platí

$$\sin x - x = -x^3/6 + x^5/5! + o(x^3).$$

Odtud ihned vyplývá, že

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6},$$

a tedy, podle Heineho věty,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{k} - \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^3}} = -\frac{1}{6}.$$

Divergence: Pro $a \leq -3$ řada diverguje, neboť není splněna nutná podmínka konvergence; posloupnost koeficientů řady nekonverguje k nule. To lze nahlédnout, pokud k-tý koeficient přepíšeme do tvaru

$$\frac{\sin\frac{1}{k} - \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^3}} \cdot \frac{\cos k}{k^{a+3}}.$$

Potom první činitel podle předchozího konverguje k $-1/6$ a limita druhého výrazu neexistuje.

Absolutní konvergence: Ukážeme, že pro $a > -2$ řada konverguje absolutně. Víme totiž, že potom řada $\sum_k \frac{|\cos k|}{k^{3+a}}$ konverguje absolutně, a protože

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left|\sin\frac{1}{k} - \frac{1}{k}\right|\frac{|cos k|}{k^a}}{\frac{|\cos k|}{k^{3+a}}} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\sin\frac{1}{k} - \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^3}}\right| = \frac{1}{6},$$

je tvrzení dokázáno podle limitního srovnávacího kritéria.

Z této rovnosti zároveň plyne, že pro $a \leq -2$ řada absolutně nekonverguje, neboť řada $\sum_k \frac{|\cos k|}{k^{3+a}}$ je v takovém případě divergentní.

Neabsolutní konvergence: Zbývá ukázat, že pro $-1 < a \leq -2$ je řada neabsolutně konvergentní. K tomu potřebujeme ukázat, monotonii funkce

$$\frac{\sin x - x}{x^3}$$

na nějakém pravém okolí nuly. Z toho totiž vyplývá, že posloupnost

$$\frac{\sin\frac{1}{k} - \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^3}}$$

je monotónní od nějakého členu počínaje a potom můžeme použít následujících úvah: řada

$$\sum_k \frac{\cos k}{k^{3+a}}$$

konverguje podle Dirichletova kritéria, a díky monotonii výše uvedené posloupnosti tudíž konverguje i vyšetřovaná řada podle Abelova kritéria.

$$\sum_k \frac{\sin\frac{1}{k} - \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^3}} \frac{\cos k}{k^{3+a}}$$

Pro důkaz monotonie použijeme klíčové tvrzení. Zopakujme, potřebujeme dokázat, že funkce $g(x) = \frac{\sin x - x}{x^3}$ je monotónní na nějakém pravém okolí nuly. Ale tato funkce má Taylorův rozvoj

$$g(x) = \frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{x - x^3/3! + x^5/5! + \ldots - x}{x^3} = -\frac{1}{3!} + 0x + \frac{1}{5!}x^2 + \ldots$$

Odtud vyplývá, že g lze v nule spojitě dodefinovat hodnotou $g(0) = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$ (což jsme vlastně již spočetli) a že po tomto dodefinování je $g'(0) = 0$ a $g''(0) = \frac{1}{5!} \neq 0$. Podle klíčového tvrzení je funkce g ryze monotónní na nějakém pravém okolí nuly.

Kapitola 3

Mocninné řady

I. Poloměr konvergence

Fakt I. Pro poloměr R konvergence mocninné řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ platí vztah

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Fakt II. Mějme mocninnou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$. Jestliže existuje limita

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|,$$

potom je rovna poloměru konvergence R této mocninné řady.

Určete poloměr konvergence R následujících mocninných řad v komplexním oboru (a také konvergenci příslušné řady v bodech na hraniční kružnici).

I.1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$, *kde* $p \in \mathbb{R}$.

Návod: Pro každé $p \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}}\right| = 1,$$

tudíž poloměr konvergence je vždy 1.

Chování na hraniční kružnici: Pokud $p > 1$, pak řada konverguje absolutně na hraniční kružnici. Pokud $1 \geq p > 0$, potom na hraniční kružnici, s výjimkou bodu $x = 1$, řada konverguje neabsolutně podle Dirichletova kritéria, neboť $x = e^{i\alpha}$, pro vhodné $\alpha \in (0, 2\pi)$ a řada $\sum e^{in\alpha}$ má omezené částečné součty. V bodě $x = 1$ řada pro $1 \geq p > 0$ diverguje. Pro $p > 0$ řada na hraniční kružnici diverguje ve všech bodech.

I.2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n$.

Návod: Platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|3^n + (-2)^n|}{n}} = \limsup_{n\to\infty} 3 \cdot \frac{\sqrt[n]{|1 + (-2/3)^n|}}{\sqrt[n]{n}} = 3 \cdot \frac{1}{1} = 3.$$

tudíž poloměr konvergence je $\frac{1}{3}$.
Chování na hraniční kružnici: Na hraniční kružnici je $x = 1 + \frac{1}{3}e^{i\alpha}$, kde $\alpha \in [0, 2\pi)$, vyšetřujeme tedy řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \frac{1}{3^n} e^{in\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-2/3)^n}{n} e^{in\alpha} =$$

Pro $\alpha = 0$ řada diverguje srovnáním s harmonickou řadou. Jinak poslední řadu ještě rozdělíme na dvě

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{in\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2/3)^n}{n} e^{in\alpha}.$$

Pro $\alpha \in (0, 2\pi)$ první řada výše konverguje neabsolutně, podle Dirichletova kritéria, neboť $\sum e^{in\alpha}$ má omezené částečné součty a $\frac{1}{n} \searrow 0$. Druhá řada konverguje dokonce absolutně, jejich součet tedy konverguje neabsolutně (sami rozmyslete, proč absolutně nikoliv).

I.3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$

Návod: Je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n!)^2}{(2n!)}}{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4.$$

Tudíž poloměr konvergence je 4.
Na hraniční kružnici je $x = 4e^{i\alpha}$ pro nějaké $\alpha \in [0, 2\pi)$. Vyšetřujeme tedy řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n \, e^{in\alpha}.$$

Podle Stirlingovy formule je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Proto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \cdot 2\pi n}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \cdot \sqrt{4\pi n}} 4^n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\pi n} \neq 0,$$

a tudíž řada musí divergovat, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

I.4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n$, *kde* $(0 < \alpha < 1)$.

Návod: Podle Cauchy-Hadamardova vztahu

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha^{n^2}|} = \limsup_{n\to\infty} \alpha^n = 0,$$

a tedy $R = +\infty$.

I.5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot x^n.$

Návod: Podle Cauchy-Hadamardova vztahu

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

a tedy $R = \frac{1}{e}$. Na hraniční kružnici je $x = \frac{1}{e}e^{i\alpha}$, kde $\alpha \in [0, 2\pi)$, vyšetřujeme tedy řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n} \cdot e^{in\alpha}$$

Platí ale

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}=\frac{1}{\sqrt{e}},$$

tudíž řada diverguje, protože nesplňuje nutnou podmínku konvergence $a_n\to 0$. Limitu lze spočítat například takto pomocí Taylorova rozvoje (s využitím spojitosti exponenciální funkce):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}\frac{1}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\exp\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]=\exp\left[\lim_{x\to\infty}x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]=$$

$$=\exp\left[\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(x^{-2})\right)-x\right]=\exp\left[\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{2}+o(1)\right]=e^{-1/2+0}=e^{-1/2}.$$

I.6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}\cdot x^n$, *kde* $(a>1)$.

Návod: Platí

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n!}{a^{n^2}}}{\frac{(n+1)!}{a^{(n+1)^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{(n+1)^2-n^2}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n+1}}{n+1}=+\infty.$$

I.7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\cdot x^n$, *kde* $a>0$, $b>0$.

Návod: Podle Cauchy-Hadamardova vztahu platí

$$\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right|}=\max\{|a|,|b|\}\cdot\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{a^n}{n}\frac{1}{\max\{|a|^n,|b|^n\}}+\frac{b^n}{n^2}\frac{1}{\max\{|a|^n,|b|^n\}}\right|}=\max\{|a|,|b|\},$$

podle věty o sevření, neboť,

$$\frac{a^n}{n}\frac{1}{\max\{|a^n|,|b^n|\}}+\frac{b^n}{n^2}\frac{1}{\max\{|a^n|,|b^n|\}}\geq\frac{a^n}{n^2}\frac{1}{\max\{|a^n|,|b^n|\}}+\frac{b^n}{n^2}\frac{1}{\max\{|a^n|,|b^n|\}}\geq\frac{1}{n^2},$$

neboť v jednom zlomku se maximum ve jmenovateli a čitatel zkrátí. Naopak

$$\frac{a^n}{n}\frac{1}{\max\{|a^n|,|b^n|\}}+\frac{b^n}{n^2}\frac{1}{\max\{|a^n|,|b^n|\}}\leq\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}.$$

Proto

$$\sqrt[n]{\frac{a^n}{n}\frac{1}{\max\{|a|^n,|b|^n\}}+\frac{b^n}{n^2}\frac{1}{\max\{|a|^n,|b|^n\}}}\leq\sqrt[n]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\to 1$$

$$\sqrt[n]{\frac{a^n}{n}\frac{1}{\max\{|a|^n,|b|^n\}}+\frac{b^n}{n^2}\frac{1}{\max\{|a|^n,|b|^n\}}}\geq\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}\to 1.$$

Z toho vyplývá, že

$$\frac{1}{R}=\max\{a,b\}\implies R=\min\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right\}.$$

Konvergence na hraniční kružnici:

Pokud $b>a$, pak řada srovnáním s řadou $\frac{1}{n^2}$ konverguje absolutně i na hraniční kružnici.

Pokud $a>b$, pak řada na hraniční kružnici v bodech $x=\frac{1}{a}e^{i\alpha}$ konverguje neabsolutně podle Dirichletova kritéria, pokud $\alpha\in(0,2\pi)$. Pokud $\alpha=0$, pak řada diverguje (neboť její první část je harmonická).

I.8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$, *kde* $a>0$, $b>0$.

Návod: Podle Cauchy-Hadamardova vztahu platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a^n + b^n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\max(a,b)} \sqrt[n]{\frac{\max(a^n, b^n)}{a^n + b^n}} = \frac{1}{\max(a,b)},$$

a tudíž

$$R = \max(a,b).$$

Na hraniční kružnici řada diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max(a,b)^n}{a^n + b^n} \to 1 \neq 0.$$

I.9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}$, *kde* $a > 0$.

Návod: Podle Cauchy-Hadamardova vztahu platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}} = \limsup_{n\to\infty} a^{-\sqrt{n}\cdot 1/n} = a^0 = 1.$$

Tedy

$$R = 1.$$

Na hraniční kružnici je $x = e^{i\alpha}$. Pokud $a > 1$, potom řada na hraniční kružnici konverguje absolutně, což ze srovnání

$$\frac{\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{a^{\sqrt{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

(Limitu lze spočíst například použitím Heineho věty a dvojnásobným aplikováním l'Hopitalova pravidla.)

Pokud $0 < a \leq 1$, potom řada na hraniční kružnici diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence, $a_n \not\to 0$.

I.10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$.

Návod: Platí

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}}{\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+2} = 1.$$

Na hraniční kružnici je $x = e^{i\alpha}$. Využijeme odhadů dokazatelných indukcí

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} > \frac{1}{2n+1}, \qquad \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+2}}.$$

Z prvního odhadu je zřejmé, že pro $\alpha = 0$ řada diverguje srovnáním s řadou $\sum \frac{1}{2n+1}$. Z druhého odhadu vyplývá, že pro $\alpha \in (0, 2\pi)$ řada konverguje neabsolutně podle Dirichletova kritéria, neboť $\sum e^{in\alpha}$ má v tom případě omezené částečné součty (a dokázat monotonii posloupnosti $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ není těžké).

I.11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n$.

Návod: Platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{[3 + (-1)^n]^n}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{[3 + (-1)^n]^n} = \limsup_{n\to\infty} [3 + (-1)^n] = 4.$$

Tudíž $R = \frac{1}{4}$. Na hraniční kružnici je $x = \frac{1}{4} e^{i\alpha}$. Podíváme-li se pouze na sudé členy, dostaneme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n}}{2n} \frac{1}{4^{2n}} e^{2in\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2in\alpha}}{2n},$$

která pro $\alpha = 0$ diverguje a pro $\alpha \in (0, 2\pi)$ konverguje neabsolutně podle Dirichletova kritéria.

Pro liché členy dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \frac{1}{4^{2n+1}} e^{i(2n+1)\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i(2n+1)\alpha}}{2n+1} \frac{1}{2^{2n+1}},$$

která konverguje absolutně.

Sečtením „liché“ a „sudé části“ řady dospíváme k závěru, že pro $\alpha = 0$ řada na hraniční kružnici diverguje a pro $\alpha \in (0, 2\pi)$ konverguje neabsolutně.

I.12. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1 + 2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n} x^n.$

Návod: Platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\left(1 + 2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n}} = \limsup_{n\to\infty} \left(1 + 2\cos\frac{\pi n}{4}\right) = 3,$$

a tedy $R = \frac{1}{3}$. Na konvergenční kružnici pro $x = \frac{1}{3}e^{i\alpha}$ vyšetřujeme řadu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1 + 2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n} \frac{1}{3^n} e^{in\alpha}.$$

Protože funkce cos je 2π periodická, můžeme řadu roztrhnout na osm částí, pro $n = 8k$, $n = 8k + 1$, $n = 8k + 2$ atd. až $n = 8k + 7$, kde k probíhá přirozená čísla. Pokud n není násobkem osmi, potom

$$\left|1 + 2\cos\frac{\pi n}{4}\right| < 3 \implies \left|\frac{1 + 2\cos\frac{\pi n}{4}}{3}\right| < 1,$$

a tudíž sedm částí řady konverguje absolutně srovnáním s geometrickou řadou. Poslední část konverguje neabsolutně podle Dirichletova kritéria pro ta $\alpha \in [0, 2\pi)$, pro která

$$e^{8ik\alpha} \neq 1 \text{ pro každé } k \in \mathbb{N}, \text{ tedy pro } \alpha \neq 0, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \dots, \frac{7\pi}{4},$$

neboť potom $\sum e^{ik\cdot(8\alpha)}$ má omezené částečné součty a $1/\ln n \to 0$ monotónně. Pro zbylých osm hodnot α řada diverguje srovnáním s divergentní řadou $\sum \frac{1}{\ln n}$. (Speciálně tedy diverguje pro $x = \pm 1$, což odpovídá $\alpha = 0$ a $\alpha = \pi$.)

I.13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2}.$

Návod: Jedná se o mocninnou řadu, jejíž koeficienty jsou povětšinou nulové, s výjimkou koeficientů u x^{n^2}. Uvědomte si nyní, že koeficient $\frac{1}{2^n}$ je koeficient nikoliv u n-tého, ale n^2-tého členu této řady! Abychom mohli použít vztahy pro výpočet poloměru konvergence, potřebujeme najít vztah pro n-tý koeficient a_n!

Jestliže ale platí

$$a_{n^2} = \frac{1}{2^n} \qquad \text{a koeficienty jsou jinde nulové,}$$

potom

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} \qquad \text{pokud } n = k^2 \text{ pro nějaké } k \text{ přirozené} \\ a_n &= 0 \qquad \text{jinak} \end{aligned}$$

Podle Cauchy-Hadamardova vztahu spočteme

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} 2^{-\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}} = 2^0 = 1.$$

Na hraniční kružnici je $x = e^{i\alpha}$, ukážeme, že řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{in\alpha}$$

konverguje absolutně pro každé $\alpha \in [0, 2\pi)$. Je totiž

$$|a_n e^{in\alpha}| = |a_n| \leq \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} \leq \frac{1}{n^2},$$

od nějakého členu počínaje. Poslední odhad plyne například z toho, že $2^{\sqrt{n}}/n^2 \to +\infty$ (což lze ukázat například několikanásobným použitím l'Hopitalova pravidla).

II. Derivování člen po členu. Abelova sumační metoda

Věta. *Mějme mocninnou řadu $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ s poloměrem konvergence $R > 0$. Potom pro každé x takové, že $|x - x_0| < R$ platí, že*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k(x - x_0)^{k-1}.$$

Věta říká, že uvnitř konvergenčního kruhu lze derivovat řadu člen po členu. Věta platí v reálném i komplexním oboru.

Navíc platí, že derivovaná řada má stejný poloměr konvergence, jako původní řada.

Analogicky platí věta o integraci člen po členu.

Věta. *Mějme mocninnou řadu $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ s poloměrem konvergence $R > 0$. Potom pro každé x takové, že $|x - x_0| < R$ platí, že funkce F definovaná předpisem*

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k + 1}$$

má v bodě x derivaci rovnou $F'(x) = f(x)$.

Věta (Abelova sumační metoda). *Nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje. Nechť R je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$. Potom platí*

$$\lim_{x \to R-} \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Abelovou sumační metodou nazýváme metodu, kdy z *libovolné* řady $\sum a_k$ uděláme mocninnou přidáním x^k o poloměru konvergence R a spočítáme limitu

$$\lim_{x \to R-} \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k.$$

Tím lze přiřadit součet i některým divergentním řadám! Máme ale zaručeno, že pokud řada $\sum_k a_k$ konverguje, pak jsme ji touto metodou sečetli správně.

Derivováním člen po členu sečtěte následující řady (uvnitř kruhu konvergence).

II.1. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$

Návod: Označme

$$f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$$

Formálním derivováním člen po členu dostaneme řadu

$$1 + x^2 + x^4 + \ldots$$

což je geometrická řada s prvním členem 1 a kvocientem x^2. Zároveň je to mocninná řada s koeficienty střídavě 0 a 1, má tedy poloměr konvergence roven jedné. Původní řada má tedy poloměr konvergence také roven jedné a uvnitř kruhu konvergence platí

$$f'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x^2}.$$

Lze ověřit přímým výpočtem, že

$$\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1-x^2},$$

tudíž

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \qquad |x| < 1.$$

II.2. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$

Návod: Označme

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$$

Formálním derivováním člen po členu dostaneme řadu

$$1 - x^2 + x^4 + \ldots$$

což je geometrická řada s prvním členem 1 a kvocientem $-x^2$. Zároveň je to mocninná řada s koeficienty střídavě 0 a ± 1, má tedy poloměr konvergence roven jedné. Původní řada má tedy poloměr konvergence také roven jedné a uvnitř kruhu konvergence platí

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1+x^2}.$$

Platí, že

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

tudíž

$$f(x) = \operatorname{arctg} x, \qquad |x| < 1.$$

Poznámka: Vztah platí pro $|x| \leq 1$, k tomu je ale zapotřebí lepší teorie, než máme k dispozici.

Integrováním člen po členu sečtěte následující řady (uvnitř kruhu konvergence).

II.3. $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$

Návod: Máme sečíst řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k.$$

Podle „podílového kritéria“ má poloměr konvergence jedna. Platí, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}.$$

Označme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$$

Potom na kruhu konvergence platí integrováním člen po členu, že

$$f(x) = F'(x), \qquad \text{kde} \qquad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} = \frac{x}{1-x}.$$

Odtud vyplývá, že

$$f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1$$

a odtud

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = xf(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1.$$

II.4. $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$

Návod: Řada má poloměr konvergence jedna, jak plyne z „podílového kritéria“. Máme sečíst řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^2 x^k = x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^2 x^{k-1} =$$

což, podle věty o integrování člen po členu, je rovno

$$= x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} kx^k\right)' = x \cdot \left(x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} kx^{k-1}\right)' =$$

a znovu podle věty o integrování člen po členu a vztahu pro součet geometrické řady platí

$$= x \cdot \left(x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k\right)'\right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)'\right)' =$$

a nyní zbývá jen spočítat příslušné derivace

$$= x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}\right)\right)' = x \cdot \left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)' =$$

$$= x \cdot \left(\frac{(1+x)^2 - 2x(1+x)}{(1+x)^4}\right) = x \cdot \frac{1-x^2}{(1+x)^4} = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}, \qquad |x| < 1.$$

II.5. $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$

Návod: Máme sečíst řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k.$$

Poloměr konvergence je jedna, jak plyne z „podílového kritéria“. Podle věty o integraci člen po členu platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k+1}\right)' = \left(x^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}\right)' =$$

$$= \left(x^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)'\right)' = \left(x^2 \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)' = \left(x^2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2}\right)' =$$

$$= \frac{2x(1-x)^2 + 2x^2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2x - 4x^2 + 2x^3 + 2x^2 - 2x^3}{(1-x)^4} = \frac{2x}{(1-x)^3}, \qquad |x| < 1.$$

Najděte součet následujících řad.

II.6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k}$

Návod: Již výše jsme spočetli, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k = \frac{2x}{(1-x)^3}, \qquad |x|<1.$$

Dosazením $x=\frac{1}{2}$ dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^3} = 8.$$

II.7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{3^k}$

Návod: Namísto $(-1)^k/3^k$ budeme psát x^k a potom dosadíme $x=-\frac{1}{3}$. Sečtěme tedy řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k.$$

Poloměr konvergence je roven jedné. Je

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3x^k = x\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2x^k\right)' = x\cdot\left(x\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^k\right)'\right)' = x\cdot\left(x\cdot\left(x\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)'\right)'\right)' =$$

$$= x\cdot\left(x\cdot\left(x\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)'\right)' = x\cdot\left(x\cdot\left(x\cdot\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)\right)'\right)' =$$

$$= x\cdot\left(x\cdot\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'\right)' = x\cdot\left(x\cdot\left(\frac{1+x}{(1-x)^3}\right)\right)' =$$

$$= x\cdot\left(\frac{x+x^2}{(1-x)^3}\right)' = \frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}.$$

Odvodili jsme, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3x^k = \frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}, \qquad |x|<1.$$

Nyní dosazením $x=-\frac{1}{3}$ do levé a pravé strany dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k}k^3 = \frac{3}{128}.$$

Ke sčítání řad Abelovou sumační metodou je obvykle nutné umět integrovat. Pokud to již umíte, zkuste touto metodou sečíst následující řady.

II.8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

Návod: Řada konvegruje podle Leibnizova kritéria. Podle Abelovy věty je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{x\to 1-} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}x^k.$$

Označme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}x^k.$$

Potom na kruhu konvergence platí

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x}^{k-1} = -\frac{1}{1+x},$$

a tedy
$$f(x) = \int \frac{dx}{1+x} = -\ln(1+x) + C,$$
přičemž, protože $f(0) = 0$, je $C = 0$. Odtud vyplývá, že
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{x \to 1-} f(x) = -\ln 2.$$

II.9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

Návod: Řada je evidentně konvergentní. Lze ji samozřejmě sečíst elementárně pomocí vztahu
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$
Snadno tak dostaneme, že
$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N\to\infty} = 1.$$
Nicméně to zkusme Abelovou metodou. Za tím účelem sečteme řadu
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}.$$
Na kruhu konvergence je
$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k},$$
$$f''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x},$$
a proto
$$f'(x) = \int \frac{1}{1-x}\, dx = -\ln(1-x) + C_1,$$
přičemž $f'(0) = 0$, a tedy $C_1 = 0$. Nyni integrací per partes (s funkcemi $u' = 1$ a $v = \ln(1-x)$) dostaneme
$$f(x) = x - x\ln(1-x) + \ln(1-x) + C_2,$$
opět je zřejmě $f(0) = 0$, a proto $C_2 = 0$. Nakonec, podle Abelovy věty, platí
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{x\to 1-} f(x) = 1 - 1 \cdot \ln(1) + \ln(1) = 1.$$