1. $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
2. $\sin x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n})$
3. $\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
4. $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} x^k + o(x^n)$
5. $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)$
6. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
7. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$
8. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
9. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
10. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

Příklady

1. Rozviňte funkci $f(x) = -2x^2 - 6x + 2$ v bodě $a = 4$.

   Řešení: Začneme derivovat:

$$f'(x) = -4x - 6$$
$$f'(4) = -22$$
$$f''(x) = -4$$
$$f''(4) = -4$$

   Všechny další derivace už jsou rovny 0, čímž jsme získali odpověd na otázku, jak bude dlouhý rozvoj. Dosadíme:

$$T_2^{f,4} = -54 - 22(x-4) - 4(x-4)^2 = -2x^2 - 6x + 2$$

   Vyšel nám původní polynom.

2. Odvoďte rozvoje pro následující funkce v nule do n-tého řádu.

   (a) e^x

   Řešení: Použijeme vyjádření koeficientů v lokální Taylorově větě. K tomu stačí spočítat n-tou derivaci dané funkce a dělit $n!$.

   Použijeme vyjádření koeficientů v lokální Taylorově větě. K tomu stačí spočítat n-tou derivaci dané funkce a dělit $n!$.

(b) $\sin x$

Řešení: Použijeme vyjádření koeficientů v lokální Taylorově větě. K tomu stačí spočítat n-tou derivaci dané funkce a dělit $n!$.

(c) $\cos x$

Řešení: Platí, že

$$(\cos x)^{(4n+1)} = -\sin x, \quad (\cos x)^{(4n+2)} = -\cos x,$$
$$(\cos x)^{(4n+3)} = \sin x, \quad (\cos x)^{(4n)} = \cos x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

a tedy

$$(\cos x)^{(4n+1)}(0) = 0, \quad (\cos x)^{(4n+2)} = -1, \quad (\cos x)^{(4n+3)}(0) = 0,$$
$$(\cos x)^{(4n)} = 1, \qquad n \in \mathbb{N}$$

všechny liché derivace jsou tedy nulové a sudé lze vyjádřit jedním vztahem

$$(\cos x)^{(2n)}(0) = (-1)^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

(d) $\ln(1+x)$ **Řešení:** Platí, že

$$[\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x}, \qquad [\ln(1+x)]'' = -\frac{1}{(1+x)^2},$$
$$[\ln(1+x)]''' = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}, \qquad [\ln(1+x)]'''' = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}$$

odkud lze vyvodit, že

$$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

V nule dostaneme

$$[\ln(1+x)]^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

3. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

3a

$$f(x) = e^{2x-x^2}$$

do pátého řádu.

Řešení: Podle vztahu pro rozvoj exponenciální funkce dostaneme

$$e^{2x-x^2} = 1 + (2x-x^2) + \frac{(2x-x^2)^2}{2!} + \frac{(2x-x^2)^3}{3!} + \frac{(2x-x^2)^4}{4!} + \frac{(2x-x^2)^5}{5!} =$$
$$= 1+(2x-x^2)+\frac{1}{2}(4x^2-4x^3+x^4)+\frac{1}{6}(8x^3-12x^4+6x^5+o(x^5))+\frac{1}{24}(16x^4-32x^5+o(x^5))$$
$$+\frac{1}{120}(32x^5+o(x^5)) =$$
$$= 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5)$$

4. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

3b

$$f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$$

do čtvrtého řádu. Určete $f^{(4)}(0)$.

Řešení: Na nějakém okolí nuly, kde $|x - x^2| < 1$, platí rovnost

$$\begin{aligned}
&\frac{1+x+x^2}{1-(x-x^2)} \\
&= (1+x+x^2)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(x-x^2)^k = \\
&(1+x+x^2) + (1+x+x^2)(x-x^2) + (1+x+x^2)(x-x^2)^2 \\
&+(1+x+x^2)(x-x^2)^3 + (1+x+x^2)(x-x^2)^4 + o(x^4) = \\
&= (1+x+x^2) + (x+x^2+x^3-x^2-x^3-x^4) \\
&+(x^2+x^3+x^4-2x^3-2x^4+x^4+o(x^4)) + (x^3+x^4-3x^4+o(x^4)) \\
&+(x^4+o(x^4)) + o(x^4) = \\
&= 1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4)
\end{aligned}$$

Z jednoznačnosti rozvoje pak vyplývá, že $f^{(4)}(0)/4! = -2$, a tedy $f^{(4)}(0) = -48$.

5. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

3c

$$f(x) = \ln(\cos x)$$

do šestého řádu.

Řešení:

Je

$$f(x) = \ln(\cos x) = \ln(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)) =$$

Označme $V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$

$$= V(x) - \frac{V(x)^2}{2} + \frac{V(x)^3}{3} + o(x^6) =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^2}{2}\frac{x^4}{24} + o(x^6)\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^6}{8} + o(x^6)\right) =$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)$$

6. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

3d

$$f(x) = \sin(\sin x)$$

do třetího řádu.

Řešení: Je

$$f(x) = \sin(\sin x) = \sin(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) =$$

Označme $V(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$= V(x) - \frac{V(x)^3}{6} + o(x^3) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{6}\left(x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3) =$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

7. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

3e

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

do čtvrtého řádu.

Řešení:

Na vhodném okolí nuly je

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + x^5/5! + o(x^6)} =$$

$$\frac{1}{1 + x/2! + x^2/3! + x^3/4! + x^4/5! + o(x^5)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)\right)^k =$$

Označme $V(x) = \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)$

$$= 1 - V(x) + V(x)^2 - V(x)^3 + V(x)^4 - V(x)^5 + o(x^5).$$

Rozveďme jednotlivé mocniny $V(x)$ do pátého řádu.

$$V(x) = \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5)$$

$$V(x)^2 = \frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^3}{2!3!} + \frac{x^4}{3!3!} + 2\frac{x^4}{2!4!} + 2\frac{x^5}{2!5!} + 2\frac{x^5}{3!4!} + o(x^5)$$
$$V(x)^3 = \frac{x^3}{2!2!2!} + 3\frac{x^4}{2!2!3!} + 3\frac{x^5}{2!2!4!} + 3\frac{x^5}{2!3!3!} + o(x^5)$$
$$V(x)^4 = \frac{x^4}{2!2!2!2!} + 4\frac{x^5}{2!2!2!3!} + o(x^5)$$
$$V(x)^5 = \frac{x^5}{2!2!2!2!2!} + o(x^5)$$

Když všechny příspěvky sečteme, resp. odečteme, dostaneme

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^5)$$

(32)

8. Najděte Taylorův rozvoj v nule funkce

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

do pátého řádu.

Řešení: Je

$$f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)} =$$

na vhodném okolí nuly

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^k =$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) + (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) +$$
$$(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) \cdot \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right)^2 + o(x^5) =$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)) + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^5}{4!} - \frac{x^5}{3!2!} + o(x^5) + \frac{x^5}{2!2!} + o(x^5) + o(x^5) =$$
$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$(37)\qquad (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) \quad \textit{pro} \quad x \to 0 \quad \textit{a každé} \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

$$(38)\qquad \arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \quad \textit{pro} \quad x \to 0;$$

$$(39)\qquad \operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \quad \textit{pro} \quad x \to 0.$$

Poznámka 6.6. Jak snadno nahlédneme, je *n-tý Taylorův polynom součtu resp. rozdílu dvou funkcí roven součtu resp. rozdílu jejich n-tých Taylorových polynomů.*

Taylorovy polynomy lze i („zkráceně") *násobit*, a to takto: *Jsou-li*

$$(40)\qquad \mathcal{T}^{f}_{a,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_j (x-a)^j, \quad \mathcal{T}^{g}_{a,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k$$

n-té Taylorovy polynomy funkcí f, g, je n-tý Taylorův polynom součinu fg roven součtu všech výrazů tvaru $a_j b_k (x-a)^{j+k}$, kde $j+k \le n$, tj. roven

$$(40')\qquad \mathcal{T}^{fg}_{a,n}(x) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j} (x-a)^m .$$

Jinými slovy: Podobně jako při tzv. zkráceném násobení čísel násobíme jen ty dvojice sčítanců, u nichž je výsledný mocnitel výrazu $(x-a)$ nejvýše roven n. Všechny takové součiny sečteme a zpravidla i uspořádáme tak jako ve (40′).

39

Příklad 6.9. Abychom získali pátý Taylorův polynom funkce $e^{-x^2} \arcsin x$ o středu 0, násobíme pátý Taylorův polynom prvního faktoru pátým Taylorovým polynomem druhého faktoru, ale ponecháme si jen mocniny x^m s $m \le 5$:

$$(41)\qquad e^{-x^2} \arcsin x = \left(1 - x^2 + \tfrac{1}{2}x^4 + o(x^5)\right)\left(x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + o(x^5)\right)$$
$$= x + \left(-1 + \tfrac{1}{6}\right)x^3 + \left(\tfrac{3}{40} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2}\right)x^5 + o(x^5) = x - \tfrac{5}{6}x^3 + \tfrac{49}{120}x^5 + o(x^5).$$

Všechny ostatní součiny „přešly" (podle (20) a (21)) do $o(x^5)$. □

Taylorovy polynomy lze též *dělit*:

38

Příklad 6.10. Pátý Taylorův polynom funkce $\operatorname{tg} x$ v bodě 0 lze získat (opět „zkráceným") dělením pátého Taylorova polynomu funkce $\sin x$ pátým Taylorovým polynomem funkce $\cos x$. Běžným algoritmem dostaneme tento výsledek:

$$(42)\qquad \operatorname{tg} x = \left(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right) : \left(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right)$$
$$= x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

(3h)

$$\frac{1}{3-2x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}x} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{3}x\right)^{-1}.$$

Poté položíme $-\frac{2}{3}x = t$ a dostaneme funkci $\frac{1}{3}(1+t)^{-1}$. Její rozvoj do binomické řady je

$$\frac{1}{3}(1+t)^{-1} = \frac{1}{3}\left[1+\binom{-1}{1}t+\binom{-1}{2}t^2+\cdots+\binom{-1}{n}t^{+}\cdot\right] = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}t^n, \quad t\in(-1,1).$$

Po dosazení za $t = -\frac{2}{3}x$ získáme Maclaurinovu řadu

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3-2x} &= \frac{1}{3}\left[1+\binom{-1}{1}\left(-\frac{2}{3}x\right)+\cdots+\binom{-1}{n}\left(-\frac{2}{3}x\right)^n+\cdots\right] = \\
&= 1+(-1)\left(-\frac{2}{3}x\right)+\cdots+\frac{(-1)^n n!}{n!}\left(\frac{2}{3}\right)^n(-1)^n x^n+\cdots = \\
&= \frac{1}{3}\left[1+\frac{2}{3}x+\frac{(-1)(-2)}{2!}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 x^2+\cdots+\frac{n!}{n!}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n+\cdots\right] = \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n.
\end{aligned}$$

$$\text{d)} f(x) = \mathrm{e}^{\cos x}.$$

Řešení. Provedeme rozvoje v Maclaurinovu řadu pro funkce e^x a $\cos x$

$$\mathrm{e}^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\cos x} &= \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2!}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{x^4}{4!}}+\cdots = \mathrm{e}\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2!}\right)^2}{2!}+\cdots\right]\left[1+\frac{x^4}{4!}+\frac{\left(\frac{x^4}{4!}\right)^2}{2!}+\cdots\right] = \\
&= \mathrm{e}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+\cdots\right)\left(1+\frac{x^4}{24}+\frac{x^8}{2\cdot 24^2}+\cdots\right) = \mathrm{e}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}+\cdots\right).
\end{aligned}$$

$$\text{e)} f(x) = \mathrm{e}^x\sin x.$$

Řešení. Maclaurinova řada pro funkci e^x (viz předchozí příklad) a $\sin x$ je

4a

(298) Pomocí diferenciálu funkce přibližně určete arctg 1, 1.

Řešení:

Zvolíme $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$ a $h = 0,1$. Potom

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} \frac{\pi}{4}, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} \frac{1}{2}.$$

Tedy pomocí diferenciálu funkce dostaneme

$$f(1,1) = f(1+0,1) = \operatorname{arctg} 1,1 \approx \frac{\pi}{4} + \frac{0,1}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4} + 0,05}}.$$

46

(299) Pomocí diferenciálu funkce přibližně určete $\ln 1,3$.

Řešení:

Zvolíme $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$ a $h = 0,3$. Potom

$$f(x) = \ln x \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \overset{x_0=1}{\rightsquigarrow} 1.$$

Tedy pomocí diferenciálu funkce dostaneme

$$f(1,3) = f(1+0,3) = \ln 1,3 \approx 0 + 1 \cdot 0,3 = 0,3.$$

(300) Pomocí diferenciálu funkce přibližně určete $\sin(-0,22)$.

4c **Řešení:**

Zvolíme $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$ a $h = -0,22$. Potom

$$f(x) = \sin x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 0, \quad f'(x) = \cos x \overset{x_0=0}{\rightsquigarrow} 1.$$

Tedy pomocí diferenciálu funkce dostaneme

$$f(-0,22) = f(0-0,22) = \sin(-0,22) \approx 0 + 1 \cdot (-0,22) = -0,22.$$

(304) Vyjádřete funkci $\sin\frac{x\pi}{4}$ pomocí mocnin $x-2$.

Řešení:

Takovéto vyjádření je možné pomocí Taylorova polynomu. Ze zadání plyne, že $x_0 = 2$ a že musíme polynom sestavit v obecné podobě, neboť nebyl zadán stupeň aproximace. Proto

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin\frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} 1,\\
f'(x) &= \frac{\pi}{4}\cos\frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} 0,\\
f''(x) &= -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\sin\frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2,\\
f'''(x) &= -\left(\frac{\pi}{4}\right)^3\cos\frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} 0,\\
f^{(4)}(x) &= \left(\frac{\pi}{4}\right)^4\sin\frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} \left(\frac{\pi}{4}\right)^4.
\end{aligned}$$

Z tvaru jednotlivých derivací můžeme pro $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ odvodit

$$\begin{aligned}
f^{(2k)}(x) &= (-1)^k\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\sin\frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} (-1)^n\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k},\\
f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^k\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+1}\cos\frac{x\pi}{4} \overset{x_0=2}{\rightsquigarrow} 0.
\end{aligned}$$

Proto hledaný Taylorův polynom je tvaru

$$\sin\frac{x\pi}{4} = 1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!} + \left(\frac{\pi}{4}\right)^4\frac{(x-2)^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}\frac{(x-2)^{2n}}{(2n)!} + \cdots.$$

6

(308) Užitím Maclaurinova polynomu vypočtěte přibližnou hodnotu čísla e s chybou menší než 0,001.

Řešení:

Z Příkladu 305 víme, že platí

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1},$$

což pro $x = 1$ dává

$$e = 1 + x + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!},$$

kde $\xi \in (0, 1)$. K tomu, abychom dosáhli chyby menší než 0,001, musíme vyřešit nerovnici

$$\frac{e^\xi}{(n+1)!} < 0{,}0001 \;\Big|\, \text{protože } \xi \in (0,1) \,\Big| \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{(n+1)!} < 0{,}0001 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3000 < (n+1)! \quad \Rightarrow \quad n > 5.$$

Proto musíme použít Taylorův polynom alespoň šestého stupně, tj.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2{,}718055556.$$

(7)

(309) Pro jaké hodnoty x platí přibližný vztah $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ s přesností $0,0001$?

Řešení:

Z Příkladu 307 pro $n = 2$ víme, že platí

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + R_2(x),$$

kde $R_2(x) = \frac{x^4 \cos\xi}{4!}$ a ξ leží mezi 0 a x. Z omezenosti funkce $\cos x$ plyne, že

$$\left|\frac{x^4 \cos\xi}{24}\right| \leq \frac{|\cos\xi|\, x^4}{24} \leq \frac{x^4}{24}.$$

Musíme proto vyřešit nerovnici

$$\frac{x^4}{24} \leq 0,0001 \quad \Rightarrow \quad x^4 \leq 0,0001.$$

Řešením tedy je $x \in [-\sqrt[4]{0,0024}, \sqrt[4]{0,0024}] \doteq [-0,222, 0,222]$, tj. $|x| \leq 0,222 = 12°30'$.

(303) Určete maximální chybu v aproximaci z Příkladu 302, kde $x \in (0,9;1,1)$.

8

Řešení:

Chyba je určena výrazem

$$R_2(x) = \frac{6\xi^2 - 2}{6(\xi^2+1)^3}(x-1)^3, \quad 0,9 < \xi < 1,1.$$

Musíme tedy vhodně omezit výraz $|R_2(x)|$ a tak určit maximální chybu aproximace. Nejdříve se zaměříme na čitatele, tj.

$$\left|6\xi^2 - 2\right| \ \big|\ |a+b| \le |a| + |b| \ \big| \ \le 6|\xi|^2 + 2 < 6 \cdot 1,1^2 + 2 = 9,26.$$

Jmenovatele omezíme takto

$$\left|6(\xi^2+1)^3\right| = 6\left(\xi^2+1\right)^3 \ge 10,86, \quad \text{neboť jistě platí } \xi^2 + 1 > 0,9^2 + 1 = 1,81.$$

Proto nyní můžeme psát

$$|R_2(x)| = \left|\frac{6\xi^2-2}{6(\xi^2+1)^3}\right| |(x-1)|^3 \le \frac{9,26}{10,86}|(x-1)|^3 \le 0,8526 \cdot 0,1^3 = 0,00085 \doteq 0,0009.$$

Maximální chyba aproximace Taylorovým polynomem druhého stupně je $0,0009$.