2. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť f, g jsou reálné funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f *je v bodě* a *malé o od* g (značíme $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$), pokud $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Speciálně, zápis

$$f(x) = o(x^n)$$

značí, pokud $f \neq 0$ na nějakém prstencovém okolí nuly, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

Definice 2. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazveme *Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a.*

Definice 3. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a f má konečné derivace všech řádů v bodě a. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme *Taylorovou řadou se středem v bodě a.* (Připomeňme, že ve výše uvedeném vzorci uvažujeme $0! = 1$ a $0^0 = 1$.)

Věta (Lokální Taylorova): *Jestliže reálná funkce f je definována na nějakém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a navíc*
(i) má na tomto okolí derivace do řádu $n-1$ včetně v každém bodě
(ii) a v bodě x_0 má také derivaci n-tého řádu, potom

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n),$$

kde koeficienty a_k jsou určeny jednoznačně a platí

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Speciálně, pokud $x_0 = 0$, pak

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Věta 4 (Lagrangeův tvar zbytku)**.** Nechť f je reálná funkce, $a < x$. Nechť f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$-derivaci. Pak existuje $c \in (a, x)$ tak, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Příklady

1. Rozviňte funkci $f(x) = -2x^2 - 6x + 2$ v bodě $a = 4$.
2. Odvoďte rozvoje pro následující funkce v nule do n-tého řádu.
   (a) e^x
   (b) $\sin x$
   (c) $\cos x$
   (d) $\ln(1+x)$
3. Odvoďte Taylorův rozvoj funkce v x_0 do m-tého řádu
   (a)
   $$f(x) = e^{2x-x^2}$$
   $x_0 = 0$, $m = 5$.
   (b)
   $$f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$$
   $x_0 = 0$, $m = 4$.
   (c)
   $$f(x) = \ln(\cos x)$$
   $x_0 = 0$, $m = 6$.
   (d)
   $$f(x) = \sin(\sin x)$$
   $x_0 = 0$, $m = 3$.
   (e)
   $$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$
   $x_0 = 0$, $m = 4$.
   (f)
   $$f(x) = \operatorname{tg} x$$
   $x_0 = 0$, $m = 5$.
   (g)
   $$f(x) = e^{-x^2} \arcsin x$$
   $x_0 = 0$, $m = 5$
   (h)
   $$\frac{1}{3-2x}$$
   $x_0 = 0$, $m = \infty$
4. Pomocí Taylorova rozvoje do 1. stupně určete přibližnou hodnotu:
   (a) $\arctan 1,1$
   (b) $\ln 1,3$
   (c) $\sin -0,22$
5. Vyjádřete funkci $\sin \frac{x\pi}{4}$ pomocí mocnin $x - 2$.
6. Vypočtěte přibližnou hodnotu čísla e s chybou menší než $0,001$.
7. Pro jaké hodnoty platí přibližný vztah $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ s přesností $0,0001$?
8. Určete maximální chybu, které se dopustíme, nahradíme-li na intervalu $(0,9; 1,1)$ funkci $\arctan x$ Taylorovým polynomem stupně 2 v bodě $x_0 = 1$.