1. cvičení

http://www.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, f, g jsou reálné funkce a existuje $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Jestliže navíc platí

(a) $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$, nebo

(b) $\lim_{x\to a+} |g(x)| = \infty$,

potom

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Příklady

1. Spočtěte limity. Nezapomeňte na Heineho a na fakt, že ne vždy L'Hospital pomůže.

(a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$$

(b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$$

(c)
$$\lim_{x\to 0+} x^x$$

(d)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2}$$

(e)
$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\ln^2(n+1)}{(n-1)^2}$$

(f)
$$\lim_{x\to 1} \arcsin \frac{x^{60} + 3x - 4}{x^{40} - 2x + 1}$$

(g)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos x}{x}$$

(h)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{cotg} x - 1}{x^2}$$

(i)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

(j)
$$\lim_{x\to 1-} \ln x \cdot \ln(1-x)$$

(k) Použijte l'Hospitala pro $1/n = x \to 0+$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tan\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}}$$

(l) Schovejte si kosinus a pak použijte k-krát l'Hospitala
$$\lim_{n\to\infty} \cos(n\pi) \frac{n^k}{e^{an}},$$
$k \in \mathbb{N}$, $a > 0$.

(m)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$$

(n)
$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(\sqrt{a} \arctan \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \arctan \sqrt{\frac{x}{b}} \right),$$
$a, b > 0$

2. Rozhodněte, zda je funkce $f(x) = \frac{x \cos 2x \sin 3x}{x^2 - \pi^2}$, $f(\pi) = -\frac{1}{2}$, spojitá.

3. Najděte asymptoty funkce $\ln(x^2 + e^{x+2})$

Bonus

4. Zkuste zlhospitalit známé limity:

(a)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(b)
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(c)
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

(d)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

(e) $\alpha > 0, \beta > 0$:
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0$$

(f) $n \in \mathbb{N}$
$$\lim_{x \to 0+} x^n \ln x = 0$$

(g)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

(h)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

(i)
$$\lim_{x \to 1-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{2}$$

5. Spočtěte limity

(a)
$$\lim_{x \to 0+} (\operatorname{cotg} x)^{\sin x}$$

(b)
$$\lim_{x \to \infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$$

(c)
$$\lim_{x \to 0} \operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}$$

(d)
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}}$$

(e)
$$\lim_{n \to \infty} \frac{c^n}{n},$$
$c > 1$.

(f)
$$\lim_{n \to \infty} (\ln n)^{\frac{1}{n}}$$

(g)
$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\cos \frac{3}{n}}{\cos \frac{5}{n}} \right)^{n^2}$$