F1

2. [10b] Nalezněte Fourierovu transformaci funkce

$$f(x) = \frac{x}{x^2+a^2}\,, \quad a > 0\,.$$

Nezapomeňte zdůvodnit průběh celého výpočtu.

Řešení:

Funkce $\frac{x}{x^2+a^2}$ není prvkem prostoru $L^1(\mathbb{R})$, je však prvkem prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Odtud plyne jednak, že její Fourierova transformace musí být počítána jako hlavní hodnota integrálu, tj. jako

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{xe^{-2\pi i x\xi}}{x^2+a^2}\,dx\,, \tag{3}$$

jednak, že výsledná transformace $\widehat{f}(\xi)$ nemusí být spojitá, bude však prvkem prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Dále je dobré si všimnout, že f je lichá, a tedy i její Fourierova transformace bude.
Integrál v (3) spočteme pomocí reziduové věty:

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{xe^{-2\pi i x\xi}}{x^2+a^2}\,dx \overset{\text{Pozor!}}{=} 2\pi i\,\mathrm{Res}_{ia} \frac{ze^{-2\pi i z\xi}}{z^2+a^2} = 2\pi i \left.\frac{ze^{-2\pi i z\xi}}{2z}\right|_{z=ia} = \pi i e^{2\pi a\xi}\,, \qquad \xi < 0\,. \tag{4}$$

Ono „Pozor!“ výše souvisí s omezením $\xi < 0$ a znamená toto: integrujeme přes obvod „horního půlkruhu“ a v uvedené chvíli používáme Jordanovo lemma na funkci $\frac{ze^{-2\pi i z\xi}}{z^2+a^2} =: \frac{P(z)e^{i\beta z}}{Q(z)}$. Aby příslušný integrál přes horní polokružnici šel k nule, musí být jednak stupeň čitatele P menší než stupeň jmenovatele Q (což je) a jednak v exponenciále tvaru $e^{i\beta z}$ musí být $\beta > 0$. Výpočet (4) tedy platí pouze pro $\xi < 0$.
Pro $\xi > 0$ můžeme buď obdobně jako v (4) počítat pomocí reziduové věty, ovšem tentokrát integrujeme přes obvod půlkruhu, ležícího v dolní polorovině - díky opačnému probíhání obvodu této křivky však nesmíme zapomenout násobit výsledek faktorem (-1). Nebo můžeme využít znalosti o symetrii (lichost $\widehat{f}$) a dostat rovnou

$$\widehat{f}(\xi) = -\pi i e^{-2\pi a\xi}\,, \qquad \xi > 0\,. \tag{5}$$

Pro $\xi = 0$ dostaneme

$$\widehat{f}(0) = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = 0\,, \tag{6}$$

neboť se integruje lichá funkce přes konečný interval symetrický kolem nuly.[1]
Celkově lze shrnout (4)–(6) pod společný zápis

$$\widehat{f}(\xi) = -\pi i\,\mathrm{sign}\,\xi\; e^{-2\pi a|\xi|}\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}\,. \tag{7}$$

[1] Případně též lze argumentovat tím, že $\widehat{f}$ musí být lichá a tedy nulová v nule.

F2

3. [12b] Buď funkce f definována jako $\cos\frac{x}{2}$ na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ a všude jinde na reálné ose nechť je funkce f nulová. Spočtěte $\widehat{f\star f}$, tj. Fourierovu transformaci konvoluce funkce f se sebou samou.
Návod: Použijte nejprve vzorec pro Fourierovu transformaci konvoluce. Odůvodněte jeho použití!

Řešení: Je-li $f\in L^1(\mathbb{R})$, platí $\widehat{f\star f}=\widehat{f}\cdot\widehat{f}$. Naše funkce je spojitá a nulová vně intervalu $\langle -\pi,\pi\rangle$, je tedy jistě prvkem prostoru $L^1(\mathbb{R})$, proto lze uvedený vzorec použít. Stačí tedy spočítat Fourierovu transformaci a tu pak umocnit na druhou:

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-2\pi ix\xi}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2\pi ix\xi}\cos\frac{x}{2}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2\pi ix\xi}\cdot\frac{e^{i\frac{x}{2}}+e^{-i\frac{x}{2}}}{2}\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x(\frac{i}{2}-2\pi i\xi)}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x(-\frac{i}{2}-2\pi i\xi)}\,dx\,, \qquad (5)
\end{aligned}
$$

pokud použijeme vyjádření kosinu pomocí komplexní exponenciály. Oba integrály v (5) lze spočítat přímo, protože integrované funkce mají triviální primitivní funkci, ovšem následující výpočet platí pouze pro $\xi\neq\pm\frac{1}{4\pi}$:

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{i-4\pi i\xi}\left(e^{\pi(\frac{i}{2}-2\pi i\xi)}-e^{-\pi(\frac{i}{2}-2\pi i\xi)}\right)+\frac{1}{-i-4\pi i\xi}\left(e^{\pi(-\frac{i}{2}-2\pi i\xi)}-e^{-\pi(-\frac{i}{2}-2\pi i\xi)}\right) = \\
&= \frac{1}{i-4\pi i\xi}\left(ie^{-2\pi^2 i\xi}+ie^{2\pi^2 i\xi}\right)+\frac{1}{-i-4\pi i\xi}\left(-ie^{-2\pi^2 i\xi}-ie^{2\pi^2 i\xi}\right) = \\
&= \frac{2\cos 2\pi^2\xi}{1-4\pi\xi}+\frac{2\cos 2\pi^2\xi}{1+4\pi\xi} = \frac{4\cos 2\pi^2\xi}{1-16\pi^2\xi^2}\,, \qquad \xi\neq\pm\frac{1}{4\pi}\,.
\end{aligned}
$$

Fourierova transformace funkce z $L^1(\mathbb{R})$ však musí být spojitá, proto musí existovat vlastní limita výrazu $\frac{4\cos 2\pi^2\xi}{1-16\pi^2\xi^2}$ v bodech $\xi=\pm\frac{1}{4\pi}$. Ze sudosti f a tedy i $\widehat{f}$ stačí napočítat limitu jen v jednom z těchto bodů (malá vzpomínka na blahé doby prvního semestru), případně použít přímo vztah (5) pro $\xi=\pm\frac{1}{4\pi}$, jak se vám chce. V každém případě vyjde π. Celkově pak tedy

$$
(\widehat{f\star f})(\xi)=\widehat{f}(\xi)\cdot\widehat{f}(\xi)=\begin{cases}\left(\frac{4\cos 2\pi^2\xi}{1-16\pi^2\xi^2}\right)^2, & \xi\neq\pm\frac{1}{4\pi}\,,\\[2mm] \pi^2\,, & \xi=\pm\frac{1}{4\pi}\,.\end{cases}
$$

F3

3. [10b] Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$\frac{1}{x^2+x+1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Do jakého z L^p prostorů patří tato funkce a jaký to má vliv na vlastnosti výsledné transformace? (Tj. lze-li některou z těchto vlastností využít, učiňte tak.)

Řešení: Uvažovaná funkce $f(x) := \frac{1}{x^2+x+1}$ patří jak do prostoru $L^1(\mathbb{R})$, tak do prostoru $L^2(\mathbb{R})$, a tedy $\widehat{f}$ bude spojitá, L^2-integrovatelná funkce.
Kořeny jmenovatele jsou $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ a my máme

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{x^2+x+1}\,dx = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})} \frac{e^{-2\pi i z\xi}}{z^2+z+1} \tag{4}$$

podle reziduové věty, aplikované na integrál přes obvod „horního půlkruhu“. Ovšem pozor: podle Jordanova lemmatu půjde integrál přes „rozpínající se horní půlkružnici“ k nule jen tehdy, když bude v čitateli výraz e^{iax} pro $a > 0$. Je tedy vztah (4) použitelný pouze pro $\xi < 0$, a proto (pól v $(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$ je jednonásobný):

$$\xi < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \widehat{f}(\xi) = 2\pi i\,\frac{e^{-2\pi i(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\xi}}{2(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{\pi i\xi} e^{\pi\xi\sqrt{3}}.$$

Pro $\xi > 0$ budeme integrovat přes obvod „dolního půlkruhu“. Nesmíme zapomenout, že tedy bereme do úvahy reziduum v $(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})$ a dále že díky opačné orientaci křivky bude koeficient před reziduem „$-2\pi i$“:

$$\xi > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \widehat{f}(\xi) = -2\pi i\,\frac{e^{-2\pi i(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})\xi}}{2(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{\pi i\xi} e^{-\pi\xi\sqrt{3}}.$$

Oba částečné výsledky je možno zapsat jednotně pro pro $\xi \neq 0$:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{\pi i\xi} e^{-\pi|\xi|\sqrt{3}}.$$

Protože však víme, že $\widehat{f}$ je spojitá na celé reálné ose, platí výše uvedený vztah i pro $\xi = 0$. To nám m.j. („bez počítání“) dává hodnotu integrálu

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

R1

2. [10b] Spočtěte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos x)^2}{3+2\cos x}\,dx$$

pomocí reziduové věty. Výpočet okomentujte (odůvodněte) s odvoláním na tuto větu.

Řešení:
Jde o standardní typ integrace „racionální funkce v sinech a kosinech přes interval délky 2π". Integrál se převede na křivkový komplexní integrál přes obvod jednotkového kruhu z funkce

$$\frac{1}{iz}\cdot\frac{\left(1+z+\frac{1}{z}\right)^2}{\left(3+z+\frac{1}{z}\right)}.$$

Podle reziduové věty

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos x)^2}{3+2\cos x}\,dx = 2\pi \sum_{|z_0|<1} \operatorname{Res}_{z_0} \frac{(z^2+z+1)^2}{z^2\,(z^2+3z+2)},$$

protože funkce $f(z) := \frac{(z^2+z+1)^2}{z^2\,(z^2+3z+2)}$ je holomorfní v celé komplexní rovině s výjimkou tří izolovaných singularit, z nichž žádná neleží na obvodu jednotkového kruhu. Kořeny kvadratického polynomu ve jmenovateli jsou totiž $\frac{-3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, z nich pak leží uvnitř jednotkového kruhu pouze $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. Počítáme tedy reziduum (označme jej R_2) v tomto bodě (je tam jednoduchý pól f) a v nule (dvojnásobný pól f), toto reziduum označíme R_1.
Reziduum v nule spočteme podle vzorce pro reziduum ve dvojnásobném pólu: f násobíme výrazem z^2, jednou zderivujeme, podělíme 1! a dosadíme nulu. Zamyslíme-li se nad tím, co znamená dosadit nulu, můžeme s výhodou po derivování psát nulu místo všech členů, které obsahují nějaké z (tj. „vynechat je"):

$$R_1 := \left(\frac{(z^2+z+1)^2}{z^2+3z+2}\right)'\Bigg|_{z=0} = \frac{2(0+0+1)(0+1)(0+0+1)-(0+0+1)^2(0+3)}{(0+0+1)^2} = \frac{2-3}{1} = -1\,.$$

Reziduum v $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ dá trochu víc práce: díky jednonásobnosti kořene ve jmenovateli sice můžeme využít pravidlo „dosaď do holomorfního čitatele a do derivace jmenovatele", ale kořen sám je trochu nepříjemný. Ale ne moc:

$$R_2 := \frac{(z^2+z+1)^2}{z^2\,(2z+3)}\Bigg|_{z=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\left(\frac{9-6\sqrt{5}+5}{4}+\frac{-3+\sqrt{5}}{2}+1\right)^2}{\frac{14-6\sqrt{5}}{4}\sqrt{5}} = \cdots = \frac{28-12\sqrt{5}}{7\sqrt{5}-15},$$

samozřejmě to dá trochu úprav. Celkově je tedy výsledek

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos x)^2}{3+2\cos x}\,dx = 2\pi(R_1+R_2) = 2\pi\frac{43-19\sqrt{5}}{7\sqrt{5}-15} = \cdots = \frac{8\pi}{\sqrt{5}} - 2\pi\,.$$

Poslední rovnost dostanete tak, že zlomek rozšíříte výrazem $(7\sqrt{5}+15)$.

22

2. [12b] Spočtěte integrál
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{(2-\cos x)^2}\,dx$$
pomocí reziduové věty. Výpočet okomentujte (odůvodněte) s odvoláním na tuto větu.

Řešení:
Jde o standardní typ integrace „racionální funkce v sinech a kosinech přes interval délky 2π“. Integrál se převede na křivkový komplexní integrál přes obvod jednotkového kruhu z funkce:
$$\frac{1}{iz}\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{\left(2-\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)^2} = \frac{2z^2+2}{i(z^2-4z+1)^2}.$$

Podle reziduové věty je
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{(2-\cos x)^2}\,dx = 2\pi i \sum_{|z_0|<1} \operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{2z^2+2}{i(z^2-4z+1)^2} = 4\pi \sum_{|z_0|<1} \operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{z^2+1}{(z^2-4z+1)^2},$$

protože funkce $f(z) := \frac{z^2+1}{(z^2-4z+1)^2}$ je holomorfní v celé komplexní rovině s výjimkou dvou izolovaných singularit, z nichž žádná neleží na obvodu jednotkového kruhu. Kořeny kvadratického polynomu ve jmenovateli jsou totiž $2\pm\sqrt{3}$, z nich pak leží uvnitř jednotkového kruhu pouze $2-\sqrt{3}$. Počítáme tedy reziduum v tomto bodě (je tam dvojnásobný pól f):
Reziduum v $2-\sqrt{3}$ spočteme podle vzorce pro reziduum ve dvojnásobném pólu: f násobíme výrazem $(z-2+\sqrt{3})^2$, jednou zderivujeme, podělíme $1!$ a dosadíme $z = 2-\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{2-\sqrt{3}} f(z) &= \left(\frac{z^2+1}{(z-2-\sqrt{3})^2}\right)'\Bigg|_{z=2-\sqrt{3}} = \frac{2z(z-2-\sqrt{3})^2-(z^2+1)\cdot 2\cdot(z-2-\sqrt{3})}{(z-2-\sqrt{3})^4}\Bigg|_{z=2-\sqrt{3}} = \\
&= \frac{2(2-\sqrt{3})(-2\sqrt{3})-2(4-4\sqrt{3}+3+1)}{(-2\sqrt{3})^3} = \frac{-8\sqrt{3}+12-16+8\sqrt{3}}{-8\cdot 3\sqrt{3}} = \\
&= \frac{4}{8\cdot 3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{18}.
\end{aligned}$$

Celkově je tedy výsledek
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{(2-\cos x)^2}\,dx = 4\pi\frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Tento příklad je modifikací příkladu č. 2 z 5.6.2006. Srovnejte postup.

83

3. [12b] Spočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x \operatorname{arctg} x}{(x^2+2)^3}\, dx .$$

Návod: Nejprve se pomocí integrace per partes zbavte arkustangenty. Výpočet okomentujte (odůvodněte) s odvoláním na věty a postupy z přednášky.

Řešení: Integrace per partes s $u' = \frac{4x}{(x^2+2)^3} \Rightarrow u = -\frac{1}{(x^2+2)^2}$, $v = \operatorname{arctg} x \Rightarrow v' = \frac{1}{1+x^2}$ dává

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x \operatorname{arctg} x}{(x^2+2)^3}\, dx = \left[-\frac{1}{(x^2+2)^2} \operatorname{arctg} x\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+2)^2} \cdot \frac{1}{x^2+1}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2)^2(x^2+1)} ,$$

hraniční členy vypadnou, protože arctg je v nekonečnu omezená a $\frac{1}{(x^2+2)^2}$ tam má nulovou limitu. Dostali jsme integrál z racionální funkce, která nemá póly na reálné ose, přes celou reálnou osu. Protože stupeň jmenovatele je alespoň o dva větší než stupeň čitatele, jde integrál přes oblouk kružnice o poloměru R v horní polorovině k nule (při $R \to +\infty$), podle modifikovaného Jordanova lemmatu, a tedy podle reziduové věty aplikované na obvod „horního půlkruhu“ o poloměru R:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2)^2(x^2+1)} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{i\sqrt{2}} + \operatorname{Res}_i\right) \frac{1}{(z^2+2)^2(z^2+1)} .$$

Reziduum v i je reziduum v jednoduchém pólu, tedy dosazujeme do holomorfní části a do derivace neholomorfní části ve jmenovateli:

$$\operatorname{Res}_i \frac{1}{(z^2+2)^2(z^2+1)} = \frac{1}{(-1+2)^2 \cdot 2i} = \frac{1}{2i} .$$

Reziduum v $i\sqrt{2}$ je reziduum ve dvojnásobném pólu, tedy násobíme $(z-i\sqrt{2})^2$, jednou derivujeme, dělíme $1!$ a dosadíme $i\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{i\sqrt{2}} \frac{1}{(z^2+2)^2(z^2+1)} &= \left(\frac{1}{(z+i\sqrt{2})^2(z^2+1)}\right)'\Bigg|_{z=i\sqrt{2}} = \\
&= \frac{-2(z+i\sqrt{2})(z^2+1) - 2z(z+i\sqrt{2})^2}{(z+i\sqrt{2})^4(z^2+1)^2}\Bigg|_{z=i\sqrt{2}} = \\
&= \frac{(-4i\sqrt{2}) \cdot (-1) + 8 \cdot 2i\sqrt{2}}{16 \cdot 9} = \frac{5i\sqrt{2}}{16} = -\frac{5\sqrt{2}}{16i} .
\end{aligned}$$

Celkově tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x \operatorname{arctg} x}{(x^2+2)^3}\, dx = 2\pi i \left(\frac{1}{2i} - \frac{5\sqrt{2}}{16i}\right) = \pi - \frac{5\pi\sqrt{2}}{8} .$$

Tento příklad je modifikací příkladu č. 3 z 5.6.2006. Srovnejte postup.

b4

2. [11b] Spočtěte integrál

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}\, dx\,.$$

Řešení:
Jde o standardní typ integrace „racionální funkce v sinech a kosinech přes interval délky 2π“. Integrál se převede na křivkový komplexní integrál přes obvod jednotkového kruhu z funkce:

$$\frac{1}{iz}\cdot\frac{\left(z-\frac{1}{z}\right)^2\left(\frac{1}{-4}\right)}{2+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}} = \frac{-1}{2i}\,\frac{z^4-2z^2+1}{z^2(z^2+4z+1)}\,.$$

Podle reziduové věty je

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}\, dx = 2\pi i \sum_{|z_0|<1} \mathrm{Res}_{z=z_0} \frac{-1}{2i}\,\frac{z^4-2z^2+1}{z^2(z^2+4z+1)} = (-\pi)\sum_{|z_0|<1} \mathrm{Res}_{z=z_0}\frac{z^4-2z^2+1}{z^2(z^2+4z+1)}\,,$$

protože funkce $f(z) := \frac{z^4-2z^2+1}{z^2(z^2+4z+1)}$ je holomorfní v celé komplexní rovině s výjimkou tří izolovaných singularit, z nichž žádná neleží na obvodu jednotkového kruhu. Kořeny kvadratického polynomu ve jmenovateli jsou totiž $-2\pm\sqrt{3}$, z nich pak leží uvnitř jednotkového kruhu pouze $-2+\sqrt{3}$. Počítáme tedy reziduum v tomto bodě (je tam jednoduchý pól f) a v bodě nula (je tam jednoduchý pól f).
Reziduum v 0 spočteme podle vzorce pro reziduum ve dvojnásobném pólu: f násobíme výrazem z^2, jednou zderivujeme, podělíme 1! a dosadíme $z = 0$:

$$\mathrm{Res}_0 f(z) \;=\; \left(\frac{z^4-2z^2+1}{z^2+4z+1}\right)'\Bigg|_{z=0} = \frac{(4z^3-4z)(\ldots)-(\ldots+1)(2z+4)}{(\ldots+1)^2}\Bigg|_{z=0} = -4\,.$$

Reziduum v $2-\sqrt{3}$ spočteme dosazením do holomorfní části a do derivace neholomorfní části jmenovatele:

$$\mathrm{Res}_{-2+\sqrt{3}} f(z) \;=\; \frac{(\sqrt{3}-2)^4-2(\sqrt{3}-2)^2+1}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^2} = \frac{84-48\sqrt{3}}{2\sqrt{3}(7-4\sqrt{3})} = 2\sqrt{3}\,,$$

což ovšem dá trošku počítání (rozšiřte poslední zlomek výrazem $(7+4\sqrt{3})$.
Celkově je tedy výsledek

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}\, dx = 4\pi - 2\pi\sqrt{3}\,.$$

25

3. [11b] Spočtěte integrál
$$\int_0^\infty \frac{x \sin ax}{x^2+b^2}\,dx\,, \qquad a>0\,,\ b>0\,.$$

Řešení:
Integrovaná funkce je sudá, proto je $\int_0^\infty \ldots = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty$, dále budeme integrovat funkci $\frac{xe^{iax}}{x^2+b^2}$ a z výsledku vezmeme imaginární část. Budeme integrovat přes „obvod horního půlkruhu o poloměru R" a pošleme R do nekonečna, pro integrál přes horní půloblouk použijeme Jordanovo lemma: integrovaná funkce je tvaru $f(z)\exp(iaz)$, kde $a>0$ a $f(z)$ je racionální funkce, přičemž stupeň jmenovatele je větší než stupeň čitatele. Když to všecko dáme dohromady, dostaneme:
$$\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{xe^{iax}}{x^2+b^2}\,dx = \mathrm{Im}\left(\pi i\ \mathrm{Res}_{bi}\,\frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}\right)\,.$$

Reziduum spočteme dosazením do čitatele a do derivace jmenovatele, tj. jako $\left.\frac{ze^{iaz}}{2z}\right|_{z=bi} = \frac{1}{2}e^{-ab}$, a tedy celkově je
$$\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-ab}\,.$$

26

3. [14b] Spočtěte integrál
$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+3}\,dx\,.$$
Návod: nejprve se pomocí per partes zbavte arkustangenty. U obdrženého standardního typu integrace nezapomeňte ověřit všechny předpoklady, za kterých se dá počítat pomocí reziduové věty. Specifikujte přes jakou křivku a jakou funkci integrujete.

Řešení: Provedeme doporučenou integraci per partes:
$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+3}\,dx \overset{\text{p.p.}}{=} \underbrace{\left[\ln x\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+3}\right]_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty \ln x\cdot\frac{1}{1+\frac{4x^2}{(x^2+3)^2}}\cdot\frac{2x^2+6-4x^2}{(x^2+3)^2}\,dx =$$
$$= \int_0^\infty \frac{(2x^2-6)\ln x}{x^4+10x^2+9}\,dx\,,$$
to, že hraniční člen je nulový, je ovšem potřeba pořádně spočítat, nejsou to úplně samozřejmé limity. Budeme potřebovat všechny 4 kořeny jmenovatele: jde o bikvadratickou rovnici, tj. píšeme-li $y=x^2$, je $y_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{100-36}}{2}=-5\pm4$, tj. $y_1=-9$, $y_2=-1$ a ony 4 kořeny jmenovatele jsou odmocniny z těchto čísel, tedy $\pm3i$, $\pm i$. Dále můžeme pokračovat dvěma způsoby.

Metoda I. Integrál je tvaru $\int_0^\infty f(x)\ln x\,dx$, kde f je **sudá** funkce, která nemá póly na reálné ose. Navíc je podílem dvou polynomů, přičemž stupeň jmenovatele je o dvě větší než stupeň čitatele. Tyto všechny tři podmínky jsou předpokladem pro výpočet založený na integrování funkce typu $f(z)\ln z$ přes křivku v komplexní rovině, sestávající ze čtyř částí: úsečky na reálné ose od bodu $-R$ do $-\varepsilon$, z oblouku půlkružnice o středu 0 a poloměru ε (který leží v horní polorovině a je obíhaný po směru hodinových ručiček), úsečky na reálné ose od bodu ε do R, a konečně z oblouku půlkružnice o středu 0 a poloměru R (který leží v horní polorovině a je obíhaný proti směru hodinových ručiček). Pak víme (viz Kopáčkova skripta nebo poznámky z cvičení), že za uvedených předpokladů je
$$\int_0^\infty f(x)\ln x\,dx = \operatorname{Re}\Big(\pi i\sum_{\operatorname{Im} z>0}\operatorname{Res} f(z)\ln z\Big) = -\pi\operatorname{Im}\Big(\sum_{\operatorname{Im} z>0}\operatorname{Res} f(z)\ln z\Big)\,. \tag{8}$$
Proto spočítáme rezidua v bodech i a $3i$. Obecně je dobré si uvědomit, že všechny singularity jsou jednonásobnými kořeny jmenovatele, že je jich víc než jedna, a že tedy je dobré si nejprve udělat výpočet obecně: je-li z_0 jednonásobný kořen jmenovatele, máme
$$\operatorname{Res}_{z_0}\frac{\ln z(2z^2-6)}{z^4+10z^2+9} = \frac{2\ln z(z^2-3)}{4z^3+20z}\bigg|_{z=z_0} = \ln z_0\,\frac{z_0^2-3}{2z_0(z_0^2+5)}\,. \tag{9}$$
Počítáme rezidua v bodech i a $3i$ podle vzorce (9), zároveň však podle vzorce (8) však bereme do úvahy jen jejich imaginární části:
$$\begin{aligned} R_1 &:= \operatorname{Im}\Big(\operatorname{Res}_i f(z)\ln z\Big) = \operatorname{Im}\Big(\ln i\,\frac{i^2-3}{2i(i^2+5)}\Big) = \operatorname{Im}\Big(\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{-1-3}{2i(-1+5)}\Big) = 0\,,\\ R_2 &:= \operatorname{Im}\Big(\operatorname{Res}_{3i} f(z)\ln z\Big) = \operatorname{Im}\Big(\ln(3i)\,\frac{-9-3}{6i(-9+5)}\Big) = \operatorname{Im}\Big(\big(\ln 3+\frac{\pi i}{2}\big)\cdot\frac{-12}{6i\cdot(-4)}\Big) =\\ &= \operatorname{Im}\Big(\ln 3\cdot\frac{12i}{6\cdot(-4)}\Big) = -\frac{1}{2}\ln 3\,. \end{aligned}$$
Celkově tedy podle (8):
$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+3}\,dx = \int_0^\infty \frac{(2x^2-6)\ln x}{x^4+10x^2+9}\,dx = -\pi\Big(0-\frac{1}{2}\ln 3\Big) = \frac{\pi}{2}\ln 3\,. \tag{10}$$

Na následující straně je uvedena ještě jedna metoda výpočtu tohoto integrálu.

27

2. [10b] Spočtěte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\sin x)^2}\,dx$$

pomocí reziduové věty. Výpočet okomentujte (odůvodněte) s odvoláním na tuto větu.

Řešení:

Jde o standardní typ integrace „racionální funkce v sinech a kosinech přes interval délky 2π". Integrál se převede na křivkový komplexní integrál přes obvod jednotkového kruhu z funkce (při úpravě násobíme uvnitř závorky ve jmenovateli výrazem $-2iz$, tedy v čitateli $(-2iz)^2$):

$$\frac{1}{iz}\cdot\frac{1}{\left(5-\frac{3}{2i}(z-\frac{1}{z})\right)^2} = \frac{1}{i}\cdot\frac{-4z}{\left(3z^2-10iz-3\right)^2}.$$

Podle reziduové věty

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\sin x)^2}\,dx = 2\pi\sum_{|z_0|<1}\operatorname{Res}_{z_0}\frac{-4z}{\left(3z^2-10iz-3\right)^2},$$

protože funkce $f(z) := \frac{-4z}{\left(3z^2-10iz-3\right)^2}$ je holomorfní v celé komplexní rovině s výjimkou dvou izolovaných singularit, z nichž žádná neleží na obvodu jednotkového kruhu. Kořeny kvadratického polynomu ve jmenovateli jsou totiž $\frac{10i\pm\sqrt{-100+36}}{6}$, tj. $\frac{i}{3}$ a $3i$, z nich pak leží uvnitř jednotkového kruhu pouze $\frac{i}{3}$. Počítáme tedy reziduum v tomto bodě (je tam dvojnásobný pól f).

Reziduum v $\frac{i}{3}$ spočteme podle vzorce pro reziduum ve dvojnásobném pólu: f násobíme výrazem $(z-\frac{i}{3})^2$, jednou zderivujeme, podělíme 1! a dosadíme $\frac{i}{3}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{\frac{i}{3}} f(z) &= \left(\frac{(-4z)(z-\frac{i}{3})^2}{\left[3(z-\frac{i}{3})(z-3i)\right]^2}\right)'\Bigg|_{z=\frac{i}{3}} = -\frac{4}{9}\left(\frac{z}{(z-3i)^2}\right)'\Bigg|_{z=\frac{i}{3}} = \\ &= -\frac{4}{9}\,\frac{(z-3i)^2-2z(z-3i)}{(z-3i)^4}\Bigg|_{z=\frac{i}{3}} = -\frac{4}{9}\,\frac{(\frac{i}{3}-3i)^2-2\frac{i}{3}(\frac{i}{3}-3i)}{(\frac{i}{3}-3i)^4} = \frac{5}{64}.\end{aligned}$$

Celkově je tedy výsledek

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\sin x)^2}\,dx = 2\pi\frac{5}{64} = \frac{5\pi}{32}.$$

28

3. [12b] Spočtěte integrál
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x \operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{(x^2+1)^3}\, dx\,.$$

Návod: Nejprve se pomocí integrace per partes zbavte arkustangenty. Výpočet okomentujte (odůvodněte) s odvoláním na věty a postupy z přednášky.

Řešení: Integrace per partes s $u' = \frac{2x}{(x^2+1)^3} \Rightarrow u = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+1)^2}$, $v = \operatorname{arctg}\frac{x}{2} \Rightarrow v' = \frac{\frac{1}{2}}{1+(\frac{x}{2})^2}$ dává

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x \operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{(x^2+1)^3}\, dx = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+1)^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\frac{\frac{1}{2}}{1+(\frac{x}{2})^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,,$$

hraniční členy vypadnou, protože arctg je v nekonečnu omezená a $\frac{1}{(x^2+1)^2}$ tam má nulovou limitu. Dostali jsme integrál z racionální funkce, která nemá póly na reálné ose, přes celou reálnou osu. Protože stupeň jmenovatele je alespoň o dva větší než stupeň čitatele, jde integrál přes oblouk kružnice o poloměru R v horní polorovině k nule (při $R \to +\infty$), podle modifikovaného Jordanova lemmatu, a tedy podle reziduové věty aplikované na obvod „horního půlkruhu" o poloměru R:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)} = 2\pi i\,(\operatorname{Res}_i + \operatorname{Res}_{2i})\,\frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\,.$$

Reziduum v $2i$ je reziduum v jednoduchém pólu, tedy dosazujeme do holomorfní části a do derivace neholomorfní části ve jmenovateli:

$$\operatorname{Res}_{2i}\frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)} = \frac{1}{(-3)^2\cdot 2\cdot 2i} = \frac{1}{36i}\,.$$

Reziduum v i je reziduum ve dvojnásobném pólu, tedy násobíme $(z-i)^2$, jednou derivujeme, dělíme 1! a dosadíme i:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_i\frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)} &= \left(\frac{1}{(z+i)^2(z^2+4)}\right)'\Bigg|_{z=i} = \frac{-2(z+i)(z^2+4)-2z(z+i)^2}{(z+i)^4(z^2+4)^2}\Bigg|_{z=i} = \\ &= \frac{(-4i)\cdot 3+4\cdot 2i}{16\cdot 9} = \frac{-i}{36} = \frac{1}{36i}\,.\end{aligned}$$

Celkově tedy
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x \operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{(x^2+1)^3}\, dx = 2\pi i\left(\frac{1}{36i}+\frac{1}{36i}\right) = \frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{9}\,.$$

Z1

Řešení početní části zkouškové písemky z 26.5.2006

MA pro F, 3. semestr

---

1. [8b] Rozviňte funkci

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

do Laurentovy řady

a) v prstencovém okolí bodu i (specifikujte přesně v jakém),

b) v okolí nekonečna (specifikujte přesně v jakém).

Řešení:

a) Prvním krokem je úprava výrazu $f(z)$ tak,[1] aby obsahoval členy $(z-i)$:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{2i+z-i} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}.$$

Poslední složený zlomek je součtem geometrické řady s kvocientem $\left(-\frac{z-i}{2i}\right)$, pokud je tento v absolutní hodnotě menší než jedna, tj. pro $\left|\frac{z-i}{2i}\right| < 1$ neboli $|z-i| < 2$. Pro tato z je

$$\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n,$$

a tedy celkově (díky faktoru $\frac{1}{z-i}$ musí být $z \neq i$, tj. $|z-i| > 0$):

$$f(z) = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}} (z-i)^{n-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2i)^{n+2}} (z-i)^n, \quad 0 < |z-i| < 2.$$

b) Podobný trik jako výše: musíme však zlomek upravit tak, aby součet geometrické řady platil pro kvocient, který má z ve jmenovateli, sledujte proč:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} = \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \cdots\right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+2}},$$

třetí rovnost je součet geometrické řady s kvocientem $\left(-\frac{1}{z^2}\right)$, a tedy platí pro $\left|\frac{1}{z^2}\right| < 1$, tj. pro $|z| > 1$, což přesně chceme.

---

[1] Komu se nelíbí čarování s geometrickými řadami, může Laurentovy koeficienty počítat pomocí vzorce pro ně: pokud je γ uzavřená jednoduchá křivka, která oběhne z_0 v kladném smyslu (a žádnou jinou singularitu f neoběhne), je $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$, který v našem případě dá

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{(z^2+1)(z-i)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}_i \frac{1}{(z^2+1)(z-i)^{n+1}} = \operatorname{Res}_i \frac{1}{(z+i)(z-i)^{n+2}},$$

druhá rovnost je reziduová věta. Zkuste to dopočíst, mělo by vyjít totéž.

Z2

Řešení početní části zkouškové písemky z 18.09.2006

MA pro F, 3. semestr

1. [6b] Rozviňte funkci

$$z^2 \sin \frac{1}{z-1}$$

do Laurentovy řady o středu 1.

Řešení:
Ze znalosti známé Taylorovy řady pro sinus ($\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots$) odvozujeme, že pro všechna $x = \frac{1}{z-1}$, tedy pro $z \neq 1$, platí

$$\sin \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!\,(z-1)^3} + \frac{1}{5!\,(z-1)^5} \mp \cdots . \tag{1}$$

Zbývá jen faktor z^2 převést do „řady" o středu jedna:

$$z^2 = (z-1+1)^2 = (z-1)^2 + 2(z-1) + 1 \tag{2}$$

a obě řady (1), (2) vynásobit. Násobíme tedy řadu (1) postupně třemi faktory z (2) a vzniklé tři řady sečteme. To vše je možné uvnitř mezikruží konvergence Laurentovy řady, jak praví jisté věty z analýzy. Jediné omezení je $z \neq 1$, tedy pro $0 < |z-1| < \infty$ platí:

$$\begin{aligned}
z^2 \sin \frac{1}{z-1} &= (z-1) - \frac{1}{3!(z-1)} + \frac{1}{5!\,(1-z)^3} \mp \cdots + \\
&+ 2 - \frac{2}{3!(z-1)^2} + \frac{2}{5!\,(1-z)^4} \mp \cdots + \\
&+ \frac{1}{1-z} - \frac{1}{3!\,(1-z)^3} + \frac{1}{5!\,(1-z)^5} \mp \cdots = \\
&= (z-1) + 2 + \left(1 - \frac{1}{3!}\right) \frac{1}{(z-1)} - \frac{2}{3!(z-1)^2} - \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}\right) \frac{1}{(z-1)^3} \cdots .
\end{aligned}$$

Vzorec pro obecný koeficient a_n můžou zájemci najít v Kopáčkovi (Příklady č. 4), neboť z těchto skript příklad pochází. Ostatně, vyskytl se přesně v tomto znění už v písemce dne 27.6.2006.

Z3

Řešení početní části zkouškové písemky z 11.09.2006

MA pro F, 3. semestr

1. [8b] Rozviňte funkci

$$\frac{6z^2-10z+2}{z(z^2-3z+2)}$$

do Laurentovy řady o středu 2 tak, aby číslo $\frac{1}{2}$ patřilo do oboru konvergence řady.

Řešení:
Nejprve rozložíme na parciální zlomky:

$$\frac{6z^2-10z+2}{z(z^2-3z+2)} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z-1} + \frac{3}{z-2}.$$

Ze zadání úlohy plyne, že hledáme Laurentovu řadu, konvergující v mezikruží $1 < |z-2| < 2$. Zlomek $\frac{3}{z-2}$ z rozkladu výše už tedy je členem této řady. Pro zbylé dva zlomky použijeme rozpis pomocí geometrické řady, jako již v několika dřívějších písemkách:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2+z-2} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{z-2}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{2}\right)^n,$$

tato řada konverguje pro $|z-2| < 2$, a dále

$$\frac{2}{z-1} = \frac{2}{1+z-2} = \frac{\frac{2}{z-2}}{\frac{1}{z-2}+1} = \frac{2}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z-2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(z-2)^n},$$

všimněte si, jak jsme přechodem proměnné do jmenovatele složeného zlomku obdrželi kvocient geometrické řady rovný $\frac{1}{z-2}$, a tedy řada konverguje pro $\left|\frac{1}{z-2}\right| < 1$, tj. pro $|z-2| > 1$, jak jsme chtěli.
Celkově

$$\frac{6z^2-10z+2}{z(z^2-3z+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{(z-2)^n} + \frac{3}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{2^{n+1}}.$$

Z4

Řešení početní části zkouškové písemky z 27.6.2006

MA pro F, 3. semestr

1. [6b]

a) Rozviňte funkci

$$z^2 \sin \frac{1}{z-1}$$

do Laurentovy řady v okolí bodu 1.

b) Určete typ singularity v bodě $z = 1$ a reziduum v tomto bodě.

c) Jakou hodnotu má koeficient a_{-3} u členu $\frac{1}{(z-1)^3}$?

Řešení:

a) Ze znalosti známé Taylorovy řady pro sinus ($\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots$) odvozujeme, že pro všechna $x = \frac{1}{z-1}$, tedy pro $z \neq 1$, platí

$$\sin \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!\,(z-1)^3} + \frac{1}{5!\,(z-1)^5} \mp \cdots . \tag{1}$$

Zbývá jen faktor z^2 převést do „řady" o středu jedna:

$$z^2 = (z-1+1)^2 = (z-1)^2 + 2(z-1) + 1 \tag{2}$$

a obě řady (1), (2) vynásobit. Násobíme tedy řadu (1) postupně třemi faktory z (2) a vzniklé tři řady sečteme. Jediné omezení je $z \neq 1$, tedy pro $0 < |z-1| < \infty$ platí:

$$\begin{aligned} z^2 \sin \frac{1}{z-1} &= (z-1) - \frac{1}{3!(z-1)} + \frac{1}{5!\,(1-z)^3} \mp \cdots + \\ &+ 2 - \frac{2}{3!(z-1)^2} + \frac{2}{5!\,(1-z)^4} \mp \cdots + \\ &+ \frac{1}{1-z} - \frac{1}{3!\,(1-z)^3} + \frac{1}{5!\,(1-z)^5} \mp \cdots = \\ &= (z-1) + 2 + \left(1 - \frac{1}{3!}\right) \frac{1}{(z-1)} - \frac{2}{3!(z-1)^2} - \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}\right) \frac{1}{(z-1)^3} \cdots . \end{aligned}$$

Vzorec pro obecný koeficient a_n můžou zájemci najít v Kopáčkovi (Příklady č. 4), neboť z těchto skript příklad pochází.

b) Z řady, kterou jsem obdrželi v bodu a) plyne, že v $z = 1$ je podstatná singularita dané funkce. Reziduum si přečteme jako koeficient u členu $\frac{1}{z-1}$, tedy $\mathrm{Res}_1\, z^2 \sin \frac{1}{z-1} = 1 - \frac{1}{3!} = \frac{5}{6}$.

c) Z bodu a) plyne, že koeficient u členu $\frac{1}{(z-1)^3}$ v uvedené řadě má hodnotu $\frac{1}{5!} - \frac{1}{3!} = -\frac{19}{120}$.

25

Řešení početní části zkouškové písemky z 13.6.2006

MA pro F, 3. semestr

1. [6b] Rozviňte funkci

$$f(z) = \frac{7z-2}{z(z+1)(z-2)}$$

do Laurentovy řady o středu (-1) tak, aby tato řada konvergovala v bodě $z = -\frac{1}{2}$.

Řešení: V zadání je naznačeno, že chceme, aby Laurentova řada konvergovala na množině $0 < |z+1| < 1$, neboť ze všech možných (maximálních) mezikruží o středu (-1) jedině toto obsahuje bod $z = -\frac{1}{2}$. Dalším (standardním) krokem je úprava výrazu $f(z)$ pomocí rozkladu na parciální zlomky a tyto pak dále tak,[1] aby obsahovaly členy $(z+1)$:

$$f(z) = \frac{7z-2}{z(z+1)(z-2)} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z-2} - \frac{3}{z+1} = \frac{-1}{1-(z+1)} + \frac{-\frac{2}{3}}{1-\frac{z+1}{3}} - \frac{3}{z+1}.$$

První zlomek je součtem geometrické řady s kvocientem $(z+1)$, která tedy konverguje pro $|z+1| < 1$, druhý zlomek je součtem geometrické řady s kvocientem $\frac{z+1}{3}$, která tedy konverguje pro $|z+1| < 3$:

$$\frac{-1}{1-(z+1)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{-\frac{2}{3}}{1-\frac{z+1}{3}} = \left(-\frac{2}{3}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{3}\right)^n.$$

Třetí zlomek už je Laurentova řada na množině $0 < |z+1|$, celkově tedy pro $0 < |z+1| < 1$ máme:

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n - \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{3}\right)^n - \frac{3}{z+1} = -\frac{3}{z+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}+2}{3^{n+1}}(z+1)^n.$$

[1] Platí ovšem stejný footnote jako v předchozích písemkách. ☺

25

Řešení početní části zkouškové písemky z 5.6.2006

MA pro F, 3. semestr

---

1. [8b] Rozviňte funkci

$$f(z) = \frac{3z-5}{z^2-3z+2}$$

do Laurentovy řady o středu (-1) v mezikruží $2 < |z+1| < 3$.

Řešení: Prvním krokem je úprava výrazu $f(z)$ pomocí rozkladu na parciální zlomky a tyto pak dále tak,[1] aby obsahovaly členy $(z+1)$:

$$f(z) = \frac{3z-5}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-2} + \frac{2}{z-1} = \frac{1}{-3+z+1} + \frac{2}{-2+z+1} = \frac{-\frac{1}{3}}{1-\frac{z+1}{3}} + \frac{\frac{2}{z+1}}{1-\frac{2}{z+1}}.$$

Všimněte si, že zatímco první zlomek jsme upravili tak, aby byl součtem geometrické řady s kvocientem $\frac{z+1}{3}$, která tedy konverguje pro $|z+1| < 3$, ve druhém zlomku jsme dbali na to, aby $|z+1| > 2$, což nás vede ke kvocientu $\frac{2}{z+1}$.
S využitím součtů oněch geometrických řad máme tedy pro $|z+1| < 3$ resp. pro $|z+1| > 2$:

$$\frac{-\frac{1}{3}}{1-\frac{z+1}{3}} = \left(-\frac{1}{3}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{3}\right)^n, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{\frac{2}{z+1}}{1-\frac{2}{z+1}} = \frac{2}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z+1}\right)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n,$$

a tedy celkově pro $2 < |z+1| < 3$:

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{3}\right)^n.$$

---

[1] Komu se nelíbí čarování s geometrickými řadami, může Laurentovy koeficienty počítat pomocí vzorce pro ně: pokud je γ uzavřená jednoduchá křivka, která oběhne bod -1 v kladném smyslu, a přitom leží celá v uvažovaném mezikruží (tj. oběhne i singularitu funkce v bodě 1), je $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z+1)^{n+1}}\,dz$, který v našem případě dá

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{3z-5}{(z^2-3z+2)(z+1)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i \sum_{z=-1,1} \operatorname{Res}_z \frac{3z-5}{(z-1)(z-2)(z+1)^{n+1}} = \sum_{z=-1,1} \operatorname{Res}_z \frac{3z-5}{(z-1)(z-2)(z+1)^{n+1}},$$

druhá rovnost je reziduová věta. Zkuste to dopočíst, mělo by vyjít totéž.

EL 1

3. [7b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu

$$\Phi(y) := \int_1^2 \left(xy'^4 - 2yy'^3\right) dx,$$

který je definován na prostoru $X := \{y \in C^1(\langle 1,2\rangle), y(1) = 0, y(2) = 1\}$. Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru.

Řešení:
Označíme-li $L(x,y,y') = xy'^4 - 2yy'^3$, máme $\frac{\partial L}{\partial y} = -2y'^3$ a $\frac{\partial L}{\partial y'} = 4xy'^3 - 6yy'^2$. Euler-Lagrangeova rovnice má obecně tvar

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y},$$

tedy v našem případě

$$(4xy'^3 - 6yy'^2)' = -2y'^3.$$

Po proderivování a úpravě dostaneme

$$0 = y''y'(xy' - y) \quad \Rightarrow \quad y'' = 0 \quad \text{nebo} \quad y' = 0 \quad \text{nebo} \quad xy' - y = 0.$$

Ony tři možnosti vedou postupně k řešením $y = ax + b$ nebo $y = c$ nebo $y = dx$. Okrajovým podmínkám pak vyhoví pouze řešení prvního typu, a dostaneme jediné řešení Euler-Lagrangeovy rovnice:

$$y = x - 1.$$

Dodatečná úvaha za bonusové body:
Zkusíme Jacobiho metodu zjišťování lokálních extrémů. Spočtěme pro $y_0(x) = x - 1$:

$$P(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 12xy_0'^2 - 12yy_0' = 12 > 0 \qquad \text{v } \langle 1,2\rangle.$$

Dále spočteme

$$Q(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0 - \frac{d}{dx}(-6y_0'^2) = 12y_0'y_0'' = 0,$$

pomocná rovnice pro funkci ω se tedy redukuje na

$$\omega''(x) = c \qquad \Rightarrow \qquad \omega(x) = c_1 + c_2 x.$$

Tato funkce má tu vlastnost (rozmyslete si), že pokud je identicky nenulová a přitom $\omega(1) = 0$, pak už $\omega(x) \neq 0$ pro všechna $x \in (1,2\rangle$. Protože navíc $y_0(x) \in C^2(\langle 1,2\rangle)$ (nezapomínejte ani na tuto podmínku - podívejte se na příslušnou větu), je funkce $y_0(x) = x - 1$ lokálním minimem funkcionálu Φ.

EL 2

3. [8b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu

$$\Phi(y) := \int_1^2 \left(4yy' - \frac{8}{3}xy'^6\right) dx\,,$$

který je definován na prostoru $X := \{y \in C^1(\langle 1,2\rangle), y(1) = 1 - \sqrt[5]{16}, y(2) = 0\}$. Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru. Uměli byste (za bonusové body) rozhodnout, která z řešení E-L rovnice jsou lokálními minimy daného funkcionálu?

Řešení:
Označíme-li $L(x,y,y') = 4yy' - \frac{8}{3}xy'^6$, máme $\frac{\partial L}{\partial y} = 4y'$ a $\frac{\partial L}{\partial y'} = 4y - 16xy'^5$. Euler-Lagrangeova rovnice má obecně tvar

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y}\,,$$

tedy v našem případě

$$(4y - 16xy'^5)' = 4y'\,.$$

Vlevo není nutno proderivovat, všimneme si pouze členu $4y'$, který se vyskytuje na obou stranách a který odečteme, načež dostaneme $(-16xy'^5)' = 0$ neboli $xy'^5 = c = \text{const}$. Proto

$$y'^5 = cx^{-1} \quad\Rightarrow\quad y' = cx^{-\frac{1}{5}} \quad\Rightarrow\quad y = c_1 + c_2 x^{\frac{4}{5}}\,.$$

Okrajové podmínky dají $c_1 + c_2 = 1 - \sqrt[5]{16}$, $c_1 + c_2\sqrt[5]{16} = 0$. Odečtením těchto dvou rovnic dostaneme $1 - \sqrt[5]{16} = c_2(1 - \sqrt[5]{16})$, tedy $c_2 = 1$, načež $c_1 = -\sqrt[5]{16} = -\sqrt[5]{2^4}$ a jediné řešení Euler-Lagrangeovy rovnice má tedy tvar

$$y = x^{\frac{4}{5}} - 2^{\frac{4}{5}}\,.$$

Dodatečné úvahy za bonusové body:
1. bonusový bod: Zkusíme Jacobiho metodu zjišťování lokálních extrémů. Spočtěme pro $y_0(x) = x^{\frac{4}{5}} - 2^{\frac{4}{5}}$:

$$P(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) = -5\cdot 16xy_0'^4 = -80\left(\frac{4}{5}\right)^4 x^{1/5} < 0 \qquad \text{v } \langle 1,2\rangle\,,$$

a protože nutnou podmínkou minima je $P(x) > 0$ v $\langle 1,2\rangle$, nemůže být nalezené řešení minimem daného funkcionálu.

2. bonusový bod až dva: Může to však být třeba lokální maximum funkcionálu Φ, což vyšetříme jako minimum funkcionálu $(-\Phi)$. Změna znaménka u Φ a tedy i u L způsobí i změnu znaménka u P, nutná podmínka minima je tedy splněna. Dále spočteme

$$Q(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0\,,$$

pomocná rovnice pro funkci ω se pak redukuje na

$$P(x)\omega'(x) = c \qquad\Rightarrow\qquad \omega(x) = c_1 + c_2 x^{\frac{4}{5}}\,.$$

Tato funkce má tu vlastnost (rozmyslete si), že pokud je identicky nenulová a přitom $\omega(1) = 0$, pak už $\omega(x) \neq 0$ pro všechna $x \in (1,2\rangle$. Protože navíc $y_0(x) \in C^2(\langle 1,2\rangle)$ (nezapomínejte ani na tuto podmínku - podívejte se na příslušnou větu), je funkce $y_0(x) = x^{\frac{4}{5}} - 2^{\frac{4}{5}}$ lokálním minimem funkcionálu $(-\Phi)$ a tedy lokálním maximem funkcionálu Φ.

EL3

3. [6b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu

$$\Phi(y) := \int_0^1 \left(2xy + \frac{1+x^2}{2}y'^2\right) dx\,,$$

který je definován na prostoru $X := \{y \in C^1(\langle 0,1\rangle), y(0) = 0, y(1) = 1\}$. Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru. Uměli byste (za 2 bonusové body) rozhodnout, která z řešení E-L rovnice jsou lokálními minimy daného funkcionálu?

Řešení:
Označíme-li $L(x, y, y') = 2xy + \frac{1+x^2}{2}y'^2$, máme $\frac{\partial L}{\partial y} = 2x$ a $\frac{\partial L}{\partial y'} = (1+x^2)y'$. Euler-Lagrangeova rovnice má obecně tvar

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y}\,,$$

tedy v našem případě

$$((1+x^2)y')' = 2x\,.$$

Proderivování vlevo by situaci podstatně zkomplikovalo, lépe je integrovat a obdržet postupně

$$\begin{aligned}(1+x^2)y' &= x^2 + c\,,\\ y' &= \frac{x^2+c}{1+x^2} = 1 + \frac{c-1}{1+x^2}\,,\\ y &= x + (c-1)\operatorname{arctg} x + d\,.\end{aligned}$$

Z podmínky $y(0) = 0$ ovšem plyne $d = 0$, načež z podmínky $y(1) = 1$ plyne $c = 1$. Dostaneme tak jediné řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na prostoru X:

$$y = x\,.$$

Dodatečná úvaha za 2 bonusové body:
Zkusíme Jacobiho metodu zjišťování lokálních extrémů. Spočtěme pro $y_0(x) = x$:

$$P(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) = (1+x^2) > 0 \qquad \text{v } \langle 0,1\rangle\,.$$

Dále spočteme

$$Q(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0\,,$$

pomocná rovnice pro funkci ω se tedy redukuje na

$$(1+x^2)\omega'(x) = c_1 \qquad \Rightarrow \qquad \omega(x) = c_1 \operatorname{arctg} x + c_2\,.$$

Podmínka $\omega(0) = 0$ říká, že $c_2 = 0$ a tedy $\omega(x) = c_1 \operatorname{arctg} x$. Má-li navíc ω <u>nebýt</u> identicky nulová, musí být $c_1 \neq 0$. Pak už ovšem ω nemá žádný nulový bod v $(0,1\rangle$. Protože navíc $y_0(x) \in C^2(\langle 0,1\rangle)$ (nezapomínejte ani na tuto podmínku - podívejte se na příslušnou větu), je funkce $y_0(x) = x$ lokálním minimem funkcionálu Φ.

EL 4

3. [8b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu

$$\Phi(y) := \int_0^1 \left((2-n)xy'^n + nyy'^{(n-1)}\right) dx\,,$$

který je definován na prostoru $X := \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 0,1\rangle), y(0)=3, y(1)=0\}$. Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru s ohledem na parametr úlohy $n \in \mathbb{N}$. Uměli byste (za 2 bonusové body) rozhodnout, která z řešení E-L rovnice jsou lokálními minimy daného funkcionálu?

Řešení:
Označíme-li $L(x,y,y') = \left((2-n)xy'^n + nyy'^{(n-1)}\right)$, máme $\frac{\partial L}{\partial y} = ny'^{(n-1)}$ a $\frac{\partial L}{\partial y'} = (2-n)nxy'^{(n-1)} + n(n-1)yy'^{(n-2)}$. Euler-Lagrangeova rovnice má obecně tvar

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y}\,,$$

tedy v našem případě máme pro $n=1$ „rovnici" $1=1$, které vyhovují všechny funkce z prostoru X. Stejně tak pro $n=2$ dostáváme E-L „rovnici" $2y' = 2y'$, které rovněž vyhovují všechny funkce z prostoru X. Konečně pro $n \geq 3$ máme po proderivování a úpravě E-L rovnici:

$$y''y'^{(n-3)}\left(y - xy'\right) = 0\,,$$

tedy platí buď $y''=0$ nebo $y - xy' = 0$, pro $n > 3$ ještě máme navíc případ $y'=0$. Řešením tedy jsou buď funkce typu $y = ax+b$ nebo $y = cx$. Počátečním podmínkám vyhovuje jediná funkce, a sice $y = 3(1-x)$. Tedy shrnujeme:

$n=1$	$\Rightarrow$	E-L rovnici s okrajovými podmníkami vyhovují všechny funkce prostoru X,
$n=2$	$\Rightarrow$	E-L rovnici s okrajovými podmníkami vyhovují všechny funkce prostoru X,
$n\geq 3$	$\Rightarrow$	$y = 3(1-x)$.

Dodatečná úvaha za 2 bonusové body: Pro $n=1$ i $n=2$ vychází pro libovolnou $y \in X$

$$P(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x, y(x), y'(x)) = 0\,,$$

a proto nebudeme umět rozhodnout touto metodou o lokálním extrému.
Pro $n \geq 3$ je pro $y_0(x) = 3(1-x)$:

$$P(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) = n(n-1)(n-2)(-1)^{n-3}3^{n-2}\,,$$

a

$$Q(x) = 0\,,$$

pomocná rovnice pro funkci ω se tedy redukuje na

$$\omega''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega(x) = c_1 x + c_2\,.$$

Podmínka $\omega(0)=0$ říká, že $c_2 = 0$ a tedy $\omega(x) = c_1 x$. Má-li navíc ω nebýt identicky nulová, musí být $c_1 \neq 0$. Pak už ovšem ω nemá žádný nulový bod v $(0,1\rangle$. Protože navíc $y_0(x) \in \mathcal{C}^2(\langle 0,1\rangle)$ (nezapomínejte ani na tuto podmínku - podívejte se na příslušnou větu), je funkce $y_0(x) = 3(1-x)$ pro lichá $n \geq 3$ lokálním minimem funkcionálu Φ a pro sudá $n > 3$ lokálním maximem tohoto funkcionálu.

ELS

3. [6b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu

$$\Phi(y) := \int_1^3 5yy'^9 - 4xy'^{10}\,dx\,,$$

který je definován na prostoru $X := \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 1,3\rangle), y(1)=1, y(3)=0\}$. Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru. Uměli byste (za 2 bonusové body) rozhodnout, která z řešení E-L rovnice jsou lokálními minimy daného funkcionálu?

Řešení:
Označíme-li $L(x,y,y') = 5yy'^9 - 4xy'^{10}$, máme $\frac{\partial L}{\partial y} = 5y'^9$ a $\frac{\partial L}{\partial y'} = 45yy'^8 - 40xy'^9$. Euler-Lagrangeova rovnice má obecně tvar

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y}\,,$$

tedy v našem případě

$$(45yy'^8 - 40xy'^9)' = 5y'^9\,.$$

Po proderivování a úpravě dostaneme

$$360y''y'^7(y - xy') = 0\,.$$

Řešením této rovnice vyjde, že všechna řešení mají tvar $y = c_1x + c_2$ a z okrajových podmínek dostaneme jediné řešení Euler-Lagrangeovy rovnice

$$y = \frac{3-x}{2}\,.$$

Toto řešení budeme dále značit $y_0(x)$.

Dodatečné úvahy za bonusové body:
Zkusíme Jacobiho metodu zjišťování lokálních extrémů. Spočtěme pro $y_0(x)$

$$P(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) = \ldots = -\frac{135}{32} < 0 \qquad \text{v } \langle 1,3\rangle\,,$$

a protože nutnou podmínkou minima je $P(x) > 0$ v $\langle 1,3\rangle$, nemůže být nalezené řešení minimem daného funkcionálu. Může to však být třeba lokální maximum funkcionálu Φ, což vyšetříme jako minimum funkcionálu $(-\Phi)$. Změna znaménka u Φ a tedy i u L způsobí i změnu znaménka u P, nutná podmínka minima je tedy splněna. Dále spočteme

$$Q(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0\,,$$

pomocná rovnice pro funkci ω se pak redukuje na

$$\omega''(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega(x) = c_1 + c_2 x\,.$$

Tato funkce má tu vlastnost (rozmyslete si), že pokud je identicky nenulová a přitom $\omega(1) = 0$, pak už $\omega(x) \neq 0$ pro všechna $x \in (1,3\rangle$. Protože navíc $y_0(x) \in \mathcal{C}^2(\langle 1,3\rangle)$ (nezapomínejte ani na tuto podmínku - podívejte se na příslušnou větu), je funkce $y_0(x)$ lokálním minimem funkcionálu $(-\Phi)$ a tedy lokálním maximem funkcionálu Φ.

Písemka z 31.3.2006 – řešení

EL6

3. [6b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu

$$\Phi(y) := \int_0^1 \left(2xy + \frac{1+x^2}{2} y'^2\right) dx\,,$$

který je definován na prostoru $X := \{y \in C^1(\langle 0,1\rangle), y(0) = 0, y(1) = 1\}$. Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru. Uměli byste (za 2 bonusové body) rozhodnout, která z řešení E-L rovnice jsou lokálními minimy daného funkcionálu?

Řešení: Označíme-li $L(x,y,y') = 2xy + \frac{1+x^2}{2}y'^2$, máme $\frac{\partial L}{\partial y} = 2x$ a $\frac{\partial L}{\partial y'} = (1+x^2)y'$. Euler-Lagrangeova rovnice má obecně tvar

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y}\,,$$

tedy v našem případě

$$((1+x^2)y')' = 2x\,.$$

Proderivování vlevo by situaci podstatně zkomplikovalo, lépe je integrovat a obdržet postupně

$$\begin{aligned}(1+x^2)y' &= x^2 + c\,,\\ y' &= \frac{x^2+c}{1+x^2} = 1 + \frac{c-1}{1+x^2}\,,\\ y &= x + (c-1)\operatorname{arctg} x + d\,.\end{aligned}$$

Z podmínky $y(0) = 0$ ovšem plyne $d = 0$, načež z podmínky $y(1) = 1$ plyne $c = 1$. Dostaneme tak jediné řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na prostoru X:

$$y = x\,.$$

Dodatečná úvaha za 2 bonusové body:

Zkusíme Jacobiho metodu zjišťování lokálních extrémů. Spočtěme pro $y_0(x) = x$:

$$P(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) = (1+x^2) > 0 \qquad \text{v } \langle 0,1\rangle\,.$$

Dále spočteme

$$Q(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0\,,$$

pomocná rovnice pro funkci ω se tedy redukuje na

$$(1+x^2)\omega'(x) = c_1 \qquad \Rightarrow \qquad \omega(x) = c_1 \operatorname{arctg} x + c_2\,.$$

Podmínka $\omega(0) = 0$ říká, že $c_2 = 0$ a tedy $\omega(x) = c_1 \operatorname{arctg} x$. Má-li navíc ω nebýt identicky nulová, musí být $c_1 \neq 0$. Pak už ovšem ω nemá žádný nulový bod v $(0,1\rangle$. Protože navíc $y_0(x) \in C^2(\langle 0,1\rangle)$ (nezapomínejte ani na tuto podmínku - podívejte se na příslušnou větu), je funkce $y_0(x) = x$ lokálním minimem funkcionálu Φ.