7.2 Zpětná Laplaceova transformace

Přechod od operátorové funkce $F(p)$ ke vzoru $f(t)$ se nazývá **zpětná Laplaceova transformace** a značí se symbolem $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$.

Ke každému obrazu je předmět určen jednoznačně. Při hledání předmětu užíváme pak slovník Laplaceovy transformace nebo použijeme tzv. Heavisideovu větu o rozkladu.

Věta o rozkladu. Nechť operátorová funkce $F(p)$ má tvar ryze racionální lomené funkce

$$F(p) = \frac{M(p)}{N(p)},$$

kde $M(p)$ a $N(p)$ jsou polynomy a stupeň polynomu $M(p)$ je menší než stupeň polynomu $N(p)$. Označme p_k póly funkce $F(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$. Pak pro zpětnou Laplaceovou transformaci funkce $F(p)$ platí

$$\boxed{f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \sum_{p_k} \operatorname*{res}_{p=p_k} \left[F(p)\, e^{pt}\right], \quad t > 0}$$

Poznámka. Jestliže funkce $F(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$ s reálními koeficienty má komplexní póly $p_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{j}\,\beta$, stačí vypočítat reziduum pouze pro jeden kořen, protože platí:

$$\boxed{\operatorname*{res}_{p=\alpha+\mathrm{j}\beta} \left[F(p)\, e^{pt}\right] + \operatorname*{res}_{p=\alpha-\mathrm{j}\beta} \left[F(p)\, e^{pt}\right] = 2\,\mathrm{Re} \operatorname*{res}_{p=\alpha+\mathrm{j}\beta} \left[F(p)\, e^{pt}\right]}$$

Příklad 7.2.1. *Najděte vzor funkce* $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p-4)}$.

Řešení: 1. Při hledání vzoru pomocí tabulky nejdřív musíme funkci rozložit na parciální zlomky a pak použít vzorce z tabulky na všechny parciální zlomky postupně.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2(p-4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{4p^2} - \frac{1}{16p} + \frac{1}{16(p-4)}\right\} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}t - \frac{1}{16} + \frac{1}{16}e^{4t}}}.$$

2. Při hledání vzoru pomocí věty o rozkladu nejdřív najděme póly funkce. Funkce $F(p) = \frac{1}{p^2(p-4)}$ má v bodě $p_1 = 0$ pól druhého řádu a v bodě $p_2 = 4$ pól prvního řádu. Vypočítáme příslušná rezidua a dosadíme.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2(p-4)}\right\} = \operatorname*{res}_{p=0} F(p)\, e^{pt} + \operatorname*{res}_{p=4} F(p)\, e^{pt} = \lim_{p\to 0}\left(p^2 \frac{e^{pt}}{p^2(p-4)}\right)' +$$

$$+ \lim_{p\to 4}\left((p-4)\frac{e^{pt}}{p^2(p-4)}\right) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{e^{pt}t(p-4) - e^{pt}}{(p-4)^2}\right) + \lim_{p\to 4}\frac{e^{pt}}{p^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}t - \frac{1}{16} + \frac{1}{16}e^{4t}}}.$$

(a) $F(p) = \frac{a}{p}$ $\quad a \in \mathbb{R}$

pól $\cancel{x}$.1, v 0

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \operatorname{res}_0 \frac{a}{p} e^{pt} = \lim_{p \to 0} p \frac{a}{p} e^{pt} = \underline{\underline{a}}$$

(b) $F(p) = \frac{1}{p+2}$ $\quad p_1 = -2$

$$\operatorname{res}_{-2} \frac{1}{p+2} e^{pt} = \lim_{p \to -2} e^{pt} = \underline{\underline{e^{-2t}}}$$

(c) $F(p) = \frac{1}{p - \ln a}$ $\quad a > 0$

$p_1 = \ln a$ $\quad e^{\ln a \cdot t} = e^{\ln a^t} = \underline{\underline{a^t}}$

(d) $F(p) = \frac{p+2}{p^2 - 4p + 3}$ $\quad p_1 = 1$

$p_2 = 3$

$$\operatorname{res}_1 \frac{p+2}{(p-1)(p-3)} e^{pt} + \operatorname{res}_3 e^{pt} \frac{p+2}{(p-1)(p-3)} =$$

$$= \frac{1+2}{1-3} e^{t} + \frac{3+2}{3-1} e^{3t} = \underline{\underline{-\frac{3}{2} e^{t} + \frac{5}{2} e^{3t}}}$$

(e) $F(p) = \frac{p^2 + p - 1}{(p-2)(p-5)(p+4)}$ $\quad p_1 = 2 \quad p_2 = 5 \quad p_3 = -4$

$$\mathcal{L}^{-1}(F) = \frac{4+2-1}{(2-5)(2+4)} e^{2t} + \frac{25+5-1}{(5-2)(5+4)} e^{5t} + \frac{16-4-1}{(-4-2)(-4-5)} e^{-4t}$$

$$= \underline{\underline{\frac{5}{-18} e^{2t} + \frac{29}{27} e^{5t} + \frac{11}{54} e^{-4t}}}$$

(f) $F(p) = \dfrac{p^2+1}{(p+1)^2(p-1)}$ $\quad p_1 = 1$

$p_2 = -1 \quad$ 2-ná's

$$\text{res}_1 = \lim_{p\to 1} \frac{p^2+1}{(p+1)^2(p-1)} e^{pt} \cdot (p-1) = \frac{1^2+1}{(1+1)^2} e^{t} = \frac{1}{2} e^{t}$$

$$\text{res}_{-1} = \lim_{p\to -1} \left(\frac{\cancel{(p+1)^2}(p^2+1)}{\cancel{(p+1)^2}(p-1)} e^{pt} \right)' = \lim_{p\to -1} \frac{(p-1)\left(2p e^{pt} + (p^2+1)e^{pt} t\right) - e^{pt}(p^2+1)}{(p-1)^2}$$

$$= \frac{-2\left(-2e^{-t} + 2e^{-t} t\right) - 2e^{-t}}{4} = \frac{1}{2} e^{-t} - t e^{-t}$$

celkem $\quad \frac{1}{2} e^{t} + \frac{1}{2} e^{-t} - t e^{-t}$

(f') $F(p) = \dfrac{1}{(p+3)(p-2)^2}$ $\quad p_1 = -3$

$p_2 = 2 \quad$ 2-ná's

$$\text{res}_{-3} \frac{1}{(p+3)(p-2)^2} e^{pt} = \lim_{p\to -3} \frac{1}{(p-2)^2} e^{pt} = \frac{1}{(-3-2)^2} e^{-3t} = \frac{e^{-3t}}{25}$$

$$\text{res}_2 = \lim_{p\to 2} \left(\frac{e^{pt}}{p+3} \right)' = \lim_{p\to 2} \frac{t e^{pt}(p+3) - e^{pt}}{(p+3)^2}$$

$$= \frac{t e^{2t} \cdot 5 - e^{2t}}{25}$$

celkem $\quad \frac{1}{25}\left(e^{-3t} + 5t e^{2t} - e^{2t} \right)$

(g) $F(p) = \dfrac{p-1}{p^2+2p+2}$

kořeny $\quad z_{12} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$ $\qquad F(p) = \dfrac{p-1}{(p+1-i)(p+1+1)}$

$$= \frac{-2 \pm 2i}{2}$$

$$= -1 \pm i$$

$\operatorname{res}_{-1+i} \quad = \lim\limits_{p \to -1+i} \dfrac{p-1}{(p+1+i)} e^{pt} = \dfrac{-2+i}{2i} e^{-t} e^{it}$

$\operatorname{res}_{-1-i} \quad = \lim\limits_{p \to -1-i} \dfrac{p-1}{(p+1-i)} e^{pt} = \dfrac{-2-i}{-2i} e^{-t} e^{-it}$

celkem $\quad e^{-t} i \left(\dfrac{+2-i}{2} e^{it} + \dfrac{-2-i}{2} e^{-it} \right) = e^{-t} \frac{1}{2} \big((2-i)(\cos t + i \sin t)$

$$+ (-2-i)(\cos t - i \sin t)\big) =$$

$$= i \frac{e^{-t}}{2} (-2i \cos t + 4i \sin t) = e^{-t}(\cos t - 2 \sin t)$$

(h)

$F(p) = \dfrac{p}{(p+2)^3} \qquad p_1 = -2 \quad$ 3-násob. kořen

$$\lim_{p \to -2} \frac{1}{2!} \left(p\, e^{pt} \right)'' = \lim \frac{1}{2} \left(e^{pt} + p t e^{pt} \right)' =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{p \to -2} t e^{pt} + t e^{pt} + p t^2 e^{pt} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(t e^{-2t} + t e^{-2t} - 2t^2 e^{-2t} \right) = e^{-2t} (t - t^2)$$

(f)

$$F(p) = \frac{Mp + N}{p^2 + 2ap + b^2} \qquad a, b > 0 \qquad a^2 - b^2 < 0$$

$$M, N \in \mathbb{R}$$

$$p_{1,2} = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4b^2}}{2}$$

$$p_{1,2} = -a \pm i\sqrt{b^2 - a^2}$$

$$\operatorname{res}_{p_1} = \lim_{p \to p_1} \frac{Mp + N}{p + a + i\sqrt{\ }} e^{pt} = \frac{-aM + Mi\sqrt{\ } + N}{\cancel{-a} + \cancel{a} + 2i\sqrt{\ }} e^{t(-a + i\sqrt{\ })}$$

$$\operatorname{res}_{p_2} = \lim_{p \to p_2} \frac{Mp + N}{p + a - i\sqrt{\ }} e^{pt} = \frac{-aM - Mi\sqrt{\ } + N}{-2i\sqrt{\ }} e^{t(-a - i\sqrt{\ })}$$

celkem $e^{-at} \frac{1}{2i\sqrt{\ }} \left(\left(-aM + Mi\sqrt{\ } + N\right) e^{ti\sqrt{\ }} + \left(aM + Mi\sqrt{\ } - N\right) e^{-ti\sqrt{\ }} \right)$

$$= e^{-at} \frac{1}{2i\sqrt{\ }} \Big(\left(\cos t\sqrt{\ } + i \sin t\sqrt{\ }\right)\left(-aM + Mi\sqrt{\ } + N\right)$$
$$+ \left(\cos t\sqrt{\ } - i \sin t\sqrt{\ }\right)\left(aM + Mi\sqrt{\ } - N\right) \Big)$$

$$= e^{-at} \frac{1}{2i\sqrt{\ }} \left(M2i\sqrt{\ } \cos t\sqrt{\ } + i(-2aM + 2N) \sin t\sqrt{\ } \right)$$

$$= e^{-at} \left(M \cos t\sqrt{b^2 - a^2} + \frac{N - Ma}{\sqrt{b^2 - a^2}} \sin t\sqrt{b^2 - a^2} \right)$$

(1)

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)^n} \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{p \to -1} \frac{1}{n!} \left(e^{pt}\right)^{(n-1)\text{de}} = \frac{1}{n!}\, t^{n-1}\, e^{-t}$$

$$\left(e^{pt}\right)' = t\, e^{pt}$$

$$\left(e^{pt}\right)'' = t^2\, e^{pt}$$

$$\left(e^{pt}\right)^{k} = t^{k} e^{pt}$$