11. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ je funkce. Její *Laplaceovou transformací* rozumíme funkci

$$L(f)(x) := \int_0^\infty f(t)e^{-xt} \mathrm{d}t,$$

kde x je reálné číslo. (Lze ji definovat i pro čísla komplexní, čehož budeme občas využívat.)

Věta 2. Nechť f je po částech hladká komplexní funkce reálné proměnné, která je rovna 0 pro $x < 0$ a $|f(x)| \leq ke^{bx}$ pro nějaká reálná čísla k, b a pro $x > 0$. Potom pro libovolné $c > b$ jest

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \mathcal{L}(f)(z) e^{zw} \, \mathrm{d}z.$$

Definice 3. Vezměme pro $a > 0$ funkci

$$f_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}; & 0 \leq t \leq a; \\ 0; & t > a, \end{cases}$$

Limita $\lim_{a \to 0+} f_a$ se nazývá *Diracova delta funkce* $\delta_0(t)$. Má hodnotu ∞ v 0 a 0 jinde.

$$\mathcal{L}(\delta(x)) = 1.$$

Definice 4. *Konvoluce* na $(0, \infty)$ dvou funkcí f a g je funkce

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(y) g(t - y) \mathrm{d}y.$$

Zřejmě $f * g$ existuje, pokud jsou obě funkce f, g po částech spojité na $(0, \infty)$.

Věta 5. Nechť f a g jsou po částech spojité a exponenciálně omezené na $(0, \infty)$. Pak

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$$

.

Věta 6. Nechť g je holomorfní funkce v $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ a existují $k, p > 0$ tak, že $|g(z)| \leq k|z|^{-p}$ pro dostatečně velká $|z|$. Potom

$$\mathcal{L}_{-1}(g(z))(s) = \sum_{i=1}^n \mathrm{res}_{z_i}(g(z)e^{xz}).$$

Definice 7. Skokovou (neboli Heavisidovu) funkci definujeme následovně:

$$u_a(t) = \begin{cases} 0; & t < a; \\ 1; & t > a, \end{cases}$$

v bodě a dodefinujeme libovolně, zpravidla nulou.

Hint

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$$
$$\mathcal{L}\{f'\} = sF(s) - f(0)$$
$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$
$$\mathcal{L}\{f'''\} = s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

Příklady

1. Udělejte zpětnou Laplaceovu transformaci

   (a)
   $$\frac{a}{p}$$
   $a \in \mathbb{R}$

   (b)
   $$\frac{1}{p+2}$$

   (c)
   $$\frac{1}{p - \ln a}$$
   $a > 0$

   (d)
   $$\frac{p+2}{p^2 - 4p + 3}$$

   (e)
   $$\frac{p^2 + p - 1}{(p-2)(p-5)(p+4)}$$

   (f)
   $$\frac{p^2 + 1}{(p+1)^2(p-1)}$$

   (g)
   $$\frac{p-1}{p^2 + 2p + 2}$$

   (h)
   $$\frac{p}{(p+2)^3}$$

   (i)
   $$\frac{1}{(p+1)^n}$$
   $n \in \mathbb{N}$

   (j)
   $$\frac{Mp + N}{p^2 + 2ap + b^2}$$
   $a, b > 0,\ a^2 - b^2 < 0,\ M, N \in \mathbb{R}$

2. Spočítejte diferenciální rovnice (na intervalu $(0, \infty)$), funkce je $y(t)$.

   (a) $y'' + 3y' + 2y = f(t)\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

   (b) $y' + 2y + 5\int_0^t y(s)\mathrm{d}s = 2,\ y(0) = 1.$

   (c) $y' + 2y + 10\int_0^t y(s)\mathrm{d}s = f(t)\ y(0) = 1$

   (d) $y'' + 3y' + 2y = e^t\ y(1) = 1,\ y'(1) = 1$

   (e) $y'' + 2y' + y = f(t),$
   $$f(t) = \begin{cases} 0; & 0 \le t \le 1 \\ e^{-t}; & t > 1, \end{cases}$$
   $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

(f) $y'' + 4y = 2\cos 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$

(g) $y'' + 4y = f(t)$,

$$f(t) = \begin{cases} 2t; & 0 \le t \le 1 \\ 2(t-2); & 1 \le t \le 2 \\ 0; & t > 2, \end{cases}$$

$y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

Opakování

1. Řešte v $\mathbb{C}$: $iz^2 - 3z + 4i = 0$
2. Vyjádřete v algebraickém tvaru
   (a) i^π
   (b) $\ln(1+i)$
   (c) $\cos(\pi - i)$
3. Najděte v algebraickém tvaru všechna řešení rovnice $\cos w = \frac{3}{4}i$.
4. Napište definici souvislé a jednoduše souvislé množiny. Uveďte příklady (stačí obrázek) množiny souvislé, nesouvislé, jednoduše souvislé, souvislé ale ne jednoduše souvislé, jednoduše souvislé ale ne souvislé.
5. Určete, pro která z existuje derivace a pro která z je holomorfní funkce $|z|^2$.
6. Najděte holomorfní funkci $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, jestliže víte, že $u(x,y) = x^2 - 2xy$ a $f(0) = 0$.
7. Zakreslete množinu $\Re\frac{z+1}{z-1} < 0$, $z \neq 1$.
8. Spočtěte $\int_C |z|^2 \,\mathrm{d}z$, kde C je oblouk křivky $y = x^2$ z počátku do bodu $1+i$.
9. $\int_C \frac{z\cos z}{(z-1)^2} \,\mathrm{d}z$ přes C: $|z| = 2$.
10. Rozviňte do Laurentovy řady na mezikruží $P(0;1,2)$ funkci $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$.
11. Klasifikujte singularitu v 0 funkce $\frac{\sin z}{z^2}$.
12. Určete reziduum $\operatorname{res}_0 \frac{1-\cos z}{z^3}$.
13. Spočtěte integrály (reziduová věta a spol.)
    (a) $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4+5x^2+4}$
    (b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x^2-2x+5} \,\mathrm{d}x$
    (c) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{5+3\cos x}$
    (d) $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)^2}$, C je $|z| = \frac{1}{2}$