1) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{t} e^{-itx} \, dt = \mathcal{F}(f)(x)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(1-ix)} \, dt = \left[\frac{e^{t(1-ix)}}{1-ix} \right]_{-\infty}^{\infty} = \underline{\underline{\infty}}$$

(a) $\int_{0}^{\infty} e^{-t} e^{-itx} \, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t(1+ix)} \, dx = \left[-\frac{e^{-t(1+ix)}}{1+ix} \right]_{0}^{\infty}$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{1+ix}}}$$

(b) $\int_{-a}^{0} (a+t) \, e^{-itx} \, dt = \int_{-a} a e^{-itx} + t e^{-itx} \, dt =$

$$= \left[a \, i \frac{e^{-itx}}{x} + \frac{e^{-itx}(1+itx)}{x^2} \right]_{-a}^{0} =$$

$$= \frac{aix}{x^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{xai}{x^2} e^{+iax} - \frac{e^{+iax}(1 \pm ixa)}{x^2}$$

$$= \frac{aix + 1 - e^{iax}}{\underline{\underline{x^2}}}$$

$x = 0: \int_{-a}^{0} (a+t) = \left[at + \frac{1}{2} t^2 \right]_{-a}^{0} = a^2 - \frac{1}{2} a^2 = \underline{\underline{\frac{a^2}{2}}}$

(g) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \quad e^{-itx}\, dt = \left[\frac{e^{-itx}(-\sin t + ix\cos t)}{x^2-1} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$

$$= \frac{-e^{-i\frac{\pi}{2}x} + (-e^{+i\frac{\pi}{2}x})}{x^2-1} = \underline{\underline{\frac{2\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x^2}}}$$

pro $x = 1$ $\quad \mathcal{F}(f)(1) = \frac{\pi}{2}$

$x = -1$ $\quad \mathcal{F}(f)(-1) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$

(h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-ixt}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2+ixt)}\, dt = e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2+ixt-\frac{x^2}{4})}\, dt$

$$= e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\, ds = e^{-\frac{x^2}{4}} \sqrt{\pi}$$

CHYBA V ZADÁNÍ

Potřebujeme $\displaystyle\frac{1}{ix}\mathcal{F}\big(\underset{t>0}{(at-1)e^{-t}}\big) = \frac{1}{ix}\, a - ix\left[\frac{a}{(a+ix)^2} - \frac{1}{a+ix}\right]$

$$= \underline{\underline{\frac{-1}{(ix+a)^2}}}$$

(c) $$\int_0^{\pi} e^{-itx} \sin t \, dt = \left[\frac{e^{-itx}(\cos t + ix \sin(t))}{x^2-1} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{-e^{-i\pi x} - 1}{x^2-1} \qquad x \neq \pm 1$$

pro $x = 1$ $$\int_0^{\pi} \sin t \quad e^{-it} \, dt = \left[-\frac{it}{2} - \frac{1}{4} e^{-2it} \right]_0^{\pi}$$

$$= +\frac{1}{4} - \frac{i\pi}{2} - \frac{1}{4} e^{-2\pi i} = \frac{1}{4} + \frac{i\pi}{2} - \frac{1}{4}\left(\cos(-2\pi) + i \sin(-2\pi)\right)$$

$$= \frac{-\pi i}{2}$$

$x = -1$ analogicky
$$\int_0^{\pi} \sin t \ e^{+it} dt = \frac{i\pi}{2}$$

(f) $f(t) = e^{-at}(\cos bt + i \sin bt)$ $\qquad t > 0$

$$= e^{-at} e^{ibt}$$

ale $\mathcal{F}(\underset{t>0}{e^{-at}})(x) = \frac{1}{a+ix}$

tedy $\mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{a + i(x-b)}$

Řešení : Daná funkce není spojitá, takže nemůžeme použít pravidlo z př. 2.30. Definiční integrál pro Fourierův obraz funkce $f_4'(t)$ musíme počítat metodou per partes nejprve v intervalu $(-\infty, 0)$ a potom v intervalu $(0, \infty)$. Dostaneme

$$\mathcal{F}[\, f_4'(t)\,] = \int_{-\infty}^{0} f_4'(t)\, e^{-iut}\, dt + \int_{0}^{+\infty} f_4'(t)\, e^{-iut}\, dt =$$

$$= \left[\, f_4(t)\, e^{-iut}\,\right]_{-\infty}^{0} + iu \int_{-\infty}^{0} f_4(t)\, e^{-iut}\, dt +$$

$$+ \left[\, f_4(t)\, e^{-iut}\,\right]_{0}^{+\infty} + iu \int_{0}^{+\infty} f_4(t)\, e^{-iut}\, dt =$$

$$= \lim_{t\to 0-} f_4(t) + iu\, \mathcal{F}[f_2(t)] - \lim_{t\to 0+} f_4(t) + iu\, \mathcal{F}[-f_1(t)] =$$

$$= 1 + \frac{iu}{a-iu} + 1 - \frac{iu}{a+iu} =$$

$$= \frac{a}{a-iu} + \frac{a}{a+iu} = a\, \frac{2a}{a^2+u^2} \quad (\, = a\, \mathcal{F}[\, f_3(t)\,]\,)\ .$$

(i)

2.37 Jestliže $\mathcal{F}[f(t)] = F(u)$ a $\lim_{t\to-\infty} \int_0^t f(\tau)\, d\tau = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t f(\tau)\, d\tau = 0$, potom dokažte, že platí :

$$\boxed{\mathcal{F}\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right] = \frac{F(u)}{iu}}$$

Řešení : Integrál $\int_0^t f(\tau)\, d\tau$ (jako funkce horní meze) je spojitá funkce a splňuje limitní podmínky z př. 2.30. Obraz jeho derivace $\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)\, d\tau = f(t)$ je podle předpokladu známá funkce.
Proto dostaneme

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right] = \mathcal{F}[f(t)] = iu\, \mathcal{F}\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right]\ .$$

(1)(i)

2.38 Pro $a \in \mathcal{R}^+$ najděte Fourierův obraz funkce $I(t) = \int_0^t (a\tau - 1) f_1(\tau)\, d\tau$ podle předcházejícího pravidla.

Řešení : Daný integrál vzhledem k definici funkce $f_1(t)$ z př. 1.11 má nenulovou hodnotu pouze pro $t > 0$. Jeho hodnotu můžeme vypočítat metodou per partes $I(t) = \int_0^t (a\tau - 1) f_1(\tau)\, d\tau = -te^{-at}$. Je to spojitá funkce a má všechny požadované vlastnosti. Podle pravidla z př. 2.37

$$\mathcal{F}[I(t)] = \frac{1}{iu}\mathcal{F}[atf_1(t) - f_1(t)] = \frac{1}{iu} a - iu\left[\frac{a}{(a+iu)^2} - \frac{1}{a+iu}\right] =$$

$$= \frac{1}{iu}\,\frac{a-a-iu}{(a+iu)^2} = \frac{1}{iu}\,\frac{-iu}{(a+iu)^2} = \frac{-1}{(a+iu)^2} \quad (\, = -\mathcal{F}[t\, f_1(t)]\,)\ .$$

Pro obraz konvolutorního součinu dvou zobrazitelných funkcí, který je definován integrálem $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$, platí

$$\boxed{\mathcal{F}[f(t) * g(t)] = \mathcal{F}[f(t)]\, \mathcal{F}[g(t)]\ .}$$

2.39 Vypočítejte konvolutorní součin $f_3(t) * f_3(t)$ (viz př. 1.13) a najděte jeho Fourierův obraz.

Řešení : Výpočet je třeba rozdělit na několik případů.

Pro $t > 0$ dostaneme

$$f_3(t) * f_3(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\tau|} e^{-a|t-\tau|}\, d\tau =$$

2.28 Najděte Fourierův obraz funkce $f(t) = t\, f_1(t)$ ($f_1(t)$ z př. 1.11).

Výsledek : $\mathcal{F}[\, g(t)\,] = \mathcal{F}[\, t\, f_1(t)\,] = \dfrac{1}{(a+iu)^2}$.

2.29 Najděte Fourierův obraz funkce $g(t) = t\, f_4(t)$ ($f_4(t)$ z př. 1.14).

Výsledek : $\mathcal{F}[\, g(t)\,] = \mathcal{F}[\, t\, f_4(t)\,] = \dfrac{-2(a^2-u^2)}{(a^2+u^2)^2}$.

Poznámka : Všimněte si, že platí rovnost $|t|\, f_3(t) = -t\, f_4(t)$.

2.30 Jestliže a) funkce $f(t)$ je spojitá v R, b) funkce $f(t)$ a $f'(t)$ jsou zobrazitelné ve Fourierově transformaci, c) $\lim_{t\to-\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$, potom dokažte, že platí :

$$\boxed{\mathcal{F}[f'(t)] \;=\; iu\, \mathcal{F}[f(t)]\,.}$$

Řešení : Definiční integrál pro Fourierův obraz funkce $f'(t)$ můžeme vzhledem ke spojitosti funkce $f(t)$ počítat metodou per partes, takže dostaneme

$$\mathcal{F}[f'(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\, e^{-iut}dt = \Big[f(t)\, e^{-iut}\Big]_{-\infty}^{+\infty} + iu \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iut}dt =$$

$$= i\, u\, \mathcal{F}[f(t)]\,.$$

2.31 Použijte pravidlo z př. 2.30 a najděte Fourierův obraz funkce $f_4(t)$ z př. 1.14 pomocí derivace obrazu spojité funkce $f_3(t)$ z př. 1.13.

Řešení : Funkce $f_3(t)$ splňuje všechny předpoklady pro použití pravidla z př. 2.30 a zřejmě platí $f_3'(t) = a\, f_4(t)$. Skutečně podle tohoto pravidla dostaneme

$$\mathcal{F}[\, f_3'(t)\,] = i\, u\, \mathcal{F}[\, f_3(t)\,] = iu\, \frac{2\,a}{a^2+u^2} = a\, \frac{2ui}{a^2+u^2} = a\, \mathcal{F}[\, f_4(t)\,]\,.$$

2.32 Použijte pravidlo z př. 2.30 a najděte Fourierův obraz funkce $h_4(t)$ z př.1.22 pomocí derivace obrazu spojité funkce $g_3(t)$ z př. 1.17.

Návod : Ověřte, že platí $g_3'(t) = -h_4(t)$.

2.33 Najděte Fourierův obraz funkce $f(t) = \dfrac{t}{(t^2+a^2)^2}$.

Řešení : Danou funkci můžeme dostat pomocí derivace funkce $\dfrac{1}{t^2+a^2}$, protože $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{t^2+a^2}\right) = \dfrac{-2t}{(t^2+a^2)^2}$. Podle pravidla z př. 2.30 a výsledku př. 1.6 dostaneme $\mathcal{F}[\, f(t)\,] = -\dfrac{1}{2}\, i\, u\, \mathcal{F}\left[\dfrac{1}{t^2+a^2}\right] = \dfrac{-iu\, e^{-a|u|}}{2a}$.

2.34 Najděte Fourierův obraz derivace funkce $f_2(t)$ z př. 1.12.

Řešení : Daná funkce není spojitá, takže nemůžeme použít pravidlo z př. 2.30. Definiční integrál pro Fourierův obraz funkce $f_2'(t)$ musíme počítat metodou per partes v intervalu $(-\infty, 0)$ a dostaneme

$$\mathcal{F}[f_2'(t)] = \int_{-\infty}^{0} f_2'(t) e^{-iut}dt = \Big[f_2(t)\, e^{-iut}\Big]_{-\infty}^{0} + iu \int_{-\infty}^{0} f_2(t)\, e^{-iut}dt =$$

$$= \lim_{t\to 0-} f_2(t) + iu\, \mathcal{F}[f_2(t)] = 1 + \frac{iu}{a-iu} = \frac{a-iu+iu}{a-iu} \quad (= a\, \mathcal{F}[f_2(t)])\,.$$

2.35 Najděte Fourierův obraz derivace funkce $f_1(t)$ z př. 1.11.

Návod : Daná funkce není spojitá, takže se nedá použít pravidlo z př. 2.30, ale je třeba integrovat v intervalu $(0, \infty)$. Pro kontrolu výsledku použijte toho, že platí $f_1'(t) = -a\, f_1(t)$.

2.36 Najděte Fourierův obraz derivace funkce $f_4(t)$ z př. 1.14.

2. Vlastnosti Fourierovy transformace

Složitější obrazy již nebudeme určovat podle definice, ale na základě vlastností, které budou v této kapitole odvozeny ve formě řešených úloh. V ostatních úlohách se potom tyto vlastnosti používají k nalezení dalších obrazů.

5a

2.1 Dokažte, že pro $a > 0$ platí : Jestliže $\mathcal{F}[f(t)] = F(u)$, potom

$$\boxed{\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a}\, F\left(\frac{u}{a}\right).}$$

Řešení : Funkce $f(at)$ musí také splňovat Dirichletovy podmínky, protože je splňuje funkce $f(t)$. V definičním integrálu provedeme substituci $at = \tau$, $a\,dt = d\tau$. Přitom se nezmění meze (vzhledem k tomu, že $a > 0$) a nemůže se změnit konvergence integrálu. Dostaneme tedy

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)\, e^{-iut} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-i\frac{u}{a}\tau} \frac{d\tau}{a} = \frac{1}{a} F\left(\frac{u}{a}\right) .$$

2.2 Pro $a > 0$ najděte Fourierův obraz funkce $f(t) = e^{-a^2t^2}$. **Řešení** : V př. 1.10 jsme našli Fourierův obraz $\mathcal{F}[e^{-t^2}] = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{u^2}{4}}$, takže $\mathcal{F}[e^{-(at)^2}] = \frac{1}{a}\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{u^2}{4a^2}}$.

5b

2.3 Dokažte, že platí : Jestliže $\mathcal{F}[f(t)] = F(u)$, potom

$$\boxed{\mathcal{F}[f(-t)] = F(-u) .}$$

Řešení : Funkce $f(-t)$ musí být zřejmě také zobrazitelná funkce. V definičním integrálu provedeme substituci $-t = \tau$, $-dt = d\tau$, takže dostaneme

$$\mathcal{F}[f(-t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)\, e^{-iut} dt = \int_{+\infty}^{-\infty} f(\tau)\, e^{-i(-u)\tau}(-d\tau) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-i(-u)\tau} d\tau = F(-u) .$$

5c

2.4 Dokažte, že Fourierovým obrazem sudé funkce je sudá funkce a Fourierovým obrazem liché funkce je lichá funkce.

Návod : Tvrzení je přímým důsledkem předcházejícího výsledku a definice sudé a liché funkce.

Ověřte toto tvrzení pro funkce $f_3(t)$, $f_4(t)$, $g_3(t)$, $g_4(t)$, $h_3(t)$, $h_4(t)$, $k_3(t)$, $k_4(t)$ z kapitoly 1.

2.5 Dokažte, že pro $a \in \mathcal{R}$ platí : Jestliže $\mathcal{F}[f(t)] = F(u)$, potom

$$\boxed{\mathcal{F}[e^{iat} f(t)] = F(u-a) .}$$

Řešení : V těchto případech zobrazujeme komplexní funkci reálné proměnné. Dirichletovy podmínky pro reálnou část ($f(t)\cos at$) a také pro imaginární část ($f(t)\sin at$) funkce $e^{iat}f(t)$ jsou splněny a vzhledem k podmínce $|e^{iat}| = 1$ se nemůže změnit absolutní konvergence integrálu. Fourierův obraz funkce $e^{iat}f(t)$ tedy existuje a vypočítá se podle definice

$$\mathcal{F}[e^{iat} f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{iat}e^{-iut} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i(u-a)t} dt = F(u-a).$$

1 f

2.6 Pro $a \in \mathcal{R}^+$ a $b \in \mathcal{R}$ najděte Fourierův obraz

$$p_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 0 \\ e^{-at}(\cos bt + i \sin bt) & \text{pro } t > 0 \end{cases}$$

Řešení : Pro $t > 0$ můžeme zapsat funkci $p_1(t)$ v exponenciálním tvaru $p_1(t) = e^{ibt}e^{-at}$. Protože podle př. 1.11 je $\mathcal{F}[f_1(t)] = \frac{1}{a+iu}$, dostaneme podle vlastnosti z př. 2.5 $\mathcal{F}[p_1(t)] = \mathcal{F}[e^{ibt} f_2(t)] = \frac{1}{a+i(u-b)}$.

2.7 Pro $a \in \mathcal{R}^+$ a $b \in \mathcal{R}$ najděte Fourierův obraz

$$p_2(t) = \begin{cases} e^{at}e^{ibt} & \text{pro } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 0 \\ 0 & \text{pro } t > 0 \end{cases}$$

Výsledek : $\mathcal{F}[\, p_2(t)\,] = \mathcal{F}[e^{ibt} f_1(t)] = \dfrac{1}{a - i(u-b)}$.

2.8 Pro $a \in \mathcal{R}^+$ a $b \in \mathcal{R}$ najděte Fourierův obraz

$$p_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 0 \\ e^{-at}(\cos bt - i \sin bt) & \text{pro } t > 0 \end{cases}$$

Řešení : Pro $t > 0$ můžeme zapsat funkci $p_3(t)$ v exponenciálním tvaru $g_3(t) = e^{-ibt}e^{-at}$. Protože podle př. 1.11 je $\mathcal{F}[f_1(t)] = \dfrac{1}{a+iu}$, dostaneme podle vlastnosti z př.2.5 $\mathcal{F}[p_3(t)] = \mathcal{F}[e^{-ibt} f_1(t)] = \dfrac{1}{a + i(u+b)}$.

2.9 Pro $a \in \mathcal{R}^+$ a $b \in \mathcal{R}$ najděte Fourierův obraz

$$p_4(t) = \begin{cases} e^{at}e^{-ibt} & \text{pro } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 0 \\ 0 & \text{pro } t > 0 \end{cases}$$

Výsledek : $\mathcal{F}[\, p_4(t)\,] = \mathcal{F}[\, e^{-ibt} f_2(t)\,] = \dfrac{1}{a - i(u+b)}$.

2.10 Použijte pravidlo z př. 2.5 a najděte Fourierův obraz funkce (z př.1.27)

$$r_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \le 0 \lor t \ge \pi \\ \sin t & \text{pro } t \in (0, \pi) \end{cases}$$

Řešení : Danou funkci můžeme chápat jako součin funkce $\sin t$ a funkce $h_1(t)$ z př. 1.19 (pro $a = \pi$).

Ze znalosti obrazu $\mathcal{F}[\, h_1(t)\,] = \dfrac{1 - e^{-i\pi u}}{iu}$ dostaneme

$$\mathcal{F}[\, r_1(t)\,] = \mathcal{F}[\, h_1(t) \sin t\,] = \mathcal{F}\left[h_1(t)\, \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1 - e^{-i\pi(u-1)}}{u-1} - \frac{1 - e^{-i\pi(u+1)}}{u+1}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1 - e^{-i\pi u}e^{i\pi}}{u-1} + \frac{e^{-i\pi u}e^{-i\pi} - 1}{u+1}\right] =$$

$$= -\frac{1 - iue^{-i\pi u}\sin\pi - e^{-i\pi u}\cos\pi}{u^2-1} = -\frac{1 + e^{-i\pi u}}{u^2 - 1} = \frac{1 + e^{-i\pi u}}{1 - u^2}.$$

Výsledek musí souhlasit s výsledkem př. 1.27.

2.11 Použijte pravidlo z př. 2.5 a najděte Fourierův obraz funkce (viz př. 1.28)

$$r_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } |t| \ge \pi \\ \sin t & \text{pro } |t| < \pi \end{cases}$$

Návod : Danou funkci můžete chápat jako součin $\sin t$ a funkce $h_3(t)$ z př. 1.21 pro $a = \pi$.

Výsledek : $\mathcal{F}[\, r_2(t)\,] = \dfrac{2i\, \sin \pi u}{u^2 - 1}$.

1g

2.12 Použijte pravidlo z př. 2.5 a najděte Fourierův obraz funkce (viz př.1. 29)

$$s_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } |t| \ge \frac{\pi}{2} \\ \cos t & \text{pro } |t| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Řešení : Danou funkci můžeme chápat jako součin funkce $\cos t$ a funkce $h_3(t)$ z př. 1.21 (pro $a = \frac{\pi}{2}$).

Ze znalosti obrazu $\mathcal{F}[\, h_3(t)\,] = \dfrac{2\, \sin\frac{\pi}{2}\, u}{u}$ dostaneme

$$\mathcal{F}[\, s_1(t)\,] = \mathcal{F}[\, h_3(t) \cos t\,] = \mathcal{F}\left[h_3(t)\, \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right] =$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{2}(u-1)}{u-1} - \frac{\sin\pi 2(u+1)}{u+1} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}u - \frac{\pi}{2})}{u-1} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2}u + \frac{\pi}{2})}{u+1} =$$

$$= \frac{-\cos\pi 2u}{u-1} + \frac{\cos\pi 2u}{u+1} = \cos\frac{\pi}{2}\, u\frac{-u-1+u-1}{u^2-1} = -\frac{2\cos\frac{\pi}{2}u}{u^2-1} .$$

Výsledek musí souhlasit s výsledkem př.1.29.

2.13 Najděte Fourierův obraz funkce

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } |t| \geq \pi \\ \sin & \text{pro } |t| < \pi \end{cases}$$

Návod : Danou funkci můžete chápat jako součin funkce $\cos\frac{t}{2}$ a funkce $h_3(t)$ z př. 1.21 (pro $a = \pi$).
Výsledek musí souhlasit s výsledkem př. 1.30.

2.14 Najděte Fourierův obraz funkce $f(t) = e^{-|t|}\cos t$.

Řešení : Protože podle př. 1.13 (pro $a = 1$) známe obraz $\mathcal{F}[\, f_3(t)\,] = \mathcal{F}[\, e^{-|t|}\,] = \frac{2}{1+u^2}$, dostaneme

$$\mathcal{F}[\, f(t)\,] = \mathcal{F}[\, f_3(t)\cos t\,] = \mathcal{F}\left[\, f_3(t)\, \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\,\right] =$$

$$= \frac{1}{1+(u-1)^2} + \frac{1}{1+(u+1)^2} = \frac{1}{u^2-2u+2} + \frac{1}{u^2+2u+2} =$$

$$= \frac{u^2-2u+2+u^2+2u+2}{(u^2+2-2u)(u^2+2+2u)} = \frac{2\,(u^2+2)}{u^4+4} .$$

2.15 Najděte Fourierův obraz funkce $f(t) = e^{-|t|}\sin t$.

Výsledek : $\mathcal{F}[\, e^{-|t|}\sin t\,] = \frac{4u}{i(u^4+4)}$.

2.16 Pro $a \in \mathcal{R}^+$ a $b \in \mathcal{R}$ najděte Fourierův obraz $f(t) = \frac{\cos bt}{t^2+a^2}$.

Návod : Použijte výsledek př. 1.6 a př. 2.5. **Výsledek :** $\mathcal{F}[\, f(t)\,] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{t^2+a^2}\cos bt\right] = \frac{\pi(e^{-a|u-b|}+e^{-a|u+b|})}{2a}$.

2.17 Pro $a \in \mathcal{R}^+$ a $b \in \mathcal{R}$ najděte Fourierův obraz $f(t) = \frac{\sin bt}{t^2+a^2}$.

Výsledek : $\mathcal{F}\left[\frac{\sin bt}{t^2+a^2}\right] = \frac{\pi(e^{-a|u-b|}-e^{-a|u+b|})}{2ai}$.

50

2.18 Dokažte, že pro $a \in \mathcal{R}$ platí : Jestliže $\mathcal{F}[f(t)] = F(u)$, potom

$$\boxed{\mathcal{F}[f(t-a)] \;=\; e^{-iau}F(u) .}$$

Řešení : Funkce $f(t-a)$ znamená pouze posunutí a tím se nemohou změnit podmínky zobrazitelnosti funkce. V definičním integrálu provedeme substituci $t - a = \tau, dt = d\tau$

$$\mathcal{F}[f(t-a)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)\, e^{-iut}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-iu(a+\tau)}d\tau =$$

$$= e^{-iau}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-iu\tau}d\,\tau = e^{-iau}F(u) .$$

2.19 Použijte pravidlo z př. 2.18 a najděte Fourierův obraz funkce (z př.1.29)

$$s_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } |t| \geq \frac{\pi}{2} \\ \cos t & \text{pro } |t| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Řešení : Danou funkci můžeme chápat jako posunutí funkce $r_1(t)$ z př. 2.11, protože platí $\cos t = \sin(t+\frac{\pi}{2})$. Podle pravidla z př. 2.18

3. Použití Fourierovy transformace

Dohoda o označení : V této kapitole budeme označovat proměnnou v zobrazované funkci písmenem x , protože v aplikacích často znamená polohovou souřadnici.

Použití Fourierovy transformace při řešení obyčejných diferenciálních rovnic je založeno na vlastnosti obrazu derivace, která byla odvozena v př. 2.30. Podle této vlastnosti zobrazená rovnice již neobsahuje derivace a obraz hledané funkce můžeme vyjádřit. Problémem ovšem je nalezení originálu.

Při řešení parciálních diferenciálních rovnic je možné najít Fourierův obraz vzhledem k jedné proměnné a druhou proměnnou chápat jako parametr. Pro obraz derivace funkce $f(x,s)$ podle parametru s platí

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial f(x,s)}{\partial s}\right] = \frac{\partial F(u,s)}{\partial s} .$$

Po zobrazení parciální diferenciální rovnice dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici pro proměnnou s , kde naopak proměnnou u chápeme jako parametr.

Bohužel podmínky zobrazitelnosti (předpoklady věty na str. 5, především požadavek absolutní konvergence integrálu) značně omezují použitelnost Fourierovy transformace.

2a

3.1 Najděte originál k funkci $F(u) = \dfrac{\cos 2u}{u^2+a^2}$, $a \in \mathcal{R}^+$.

Řešení : Nejprve rozložíme racionální lomenou funkci na parciální zlomky a upravíme

$$\frac{1}{u^2+a^2} = \frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{u-ai} - \frac{1}{u+ai}\right) = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+iu} - \frac{1}{a-ui}\right) .$$

K těmto jednoduchým funkcím najdeme originály na základě známých obrazů (viz př. 1.11 a 1.12)

$$f^*(x) = \frac{1}{2a}[f_1(x) + f_2(x)] = \frac{1}{2a}\, e^{-a|x|} .$$

Daný obraz je však ještě vynásobený funkcí $\cos 2u = \frac{1}{2}(e^{2ui} + e^{-2ui})$, takže podle př. 2.18 dostaneme ve výsledku posunuté funkce

$$f(x) = \frac{1}{4a}\left(e^{-a|x+2|} + e^{-a|x-2|}\right) .$$

2b

3.2 Pro $a \in \mathcal{R}^+$, $b \in \mathcal{R}^+$, $a \neq b$ najděte originál k funkci $F(u) = \dfrac{1}{(u^2+a^2)(u^2+b^2)}$.

Řešení : Můžeme využít znalost obrazu z př. 1.13 a rozložit daný zlomek na rozdíl zlomků

$$\frac{1}{(u^2+a^2)(u^2+b^2)} = \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{u^2+a^2} - \frac{1}{u^2+b^2}\right) .$$

K oběma zlomkům najdeme snadno podle př. 1.13 originály, takže

$$f(x) = \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{e^{-a|x|}}{2a} - \frac{e^{-b|x|}}{2b}\right) .$$

2c

3.3 Pro $b \in \mathcal{R}^+$ najděte originál k funkci $F(u) = e^{-b^2u^2}$.

Řešení : Můžeme využít znalost obrazu z př. 2.2 , kde položíme $b^2 = \dfrac{1}{4a^2}$ neboli $a = \dfrac{1}{2b}$. Platí tedy

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{t^2}{4b^2}}\right] = 2b\sqrt{\pi}\, e^{-b^2u^2} \quad \Rightarrow \quad e^{-b^2u^2} = \frac{1}{2b\sqrt{\pi}}\, \mathcal{F}\left[e^{-\frac{t^2}{4b^2}}\right] .$$

Odtud již dostaneme výsledek

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-b^2u^2}] = \frac{1}{2b\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{4b^2}} .$$

3a

3.5 Pomocí Fourierovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$y^{(4)} + 4\,a^4 y = f_3(x)\ ,\ a \in \mathcal{R}^+\ ,$$

která popisuje jako v předcházejícím příkladě průhyb nekonečného nosníku na pružném podkladě při zatížení, které je popsáno funkcí typu $f_3(x)$ (viz př 1.13 s dosazenou konstantou $a = 1$).

Řešení : Danou diferenciální rovnici zobrazíme ve Fourierově transformaci a dostaneme podobně jako v minulém příkladě

$$(u^4 + 4a^4)\ Y(u) = \frac{2}{u^2+1} \quad \Rightarrow \quad Y(u) = \frac{2}{(u^2+1)(u^4+4a^4)}\ .$$

Nejprve rozložíme funkci $Y(u) = \dfrac{2}{(u^2+1)(u^4+4a^4)}$ na parciální zlomky.

Kořeny jmenovatele označíme $u_1 = a + ia,\ u_2 = a - ia,\ u_3 = -a + ia,\ u_4 = -a - ia, u_5 = i,\ u_6 = -i$ a odpovídající koeficienty v rozkladu můžeme vypočítat pomocí reziduí a použitím l'Hospitalova pravidla

$$c_k = \lim_{u \to u_k} \frac{2(u-u_k)}{(u^2+1)(u^4+4a^4)} = \lim_{u \to u_k} \frac{2}{6\,u^5 + 4u^3 + 8a^4 u} = \frac{2u_k}{6\,u_k^6 + 4u_k^4 + 8a^4 u_k^2}\ .$$

Dosazením dostaneme

$$c_1 = \frac{2a(1+i)}{-24a^6 2i - 16a^4 + 8a^6 2i} = -\frac{1+i}{8a^3(1+2a^2 i)} = -\frac{1+2a^2+i(1-2a^2)}{8a^3(1+4a^4)}\ ,$$

$$c_2 = \frac{2a(1-i)}{24a^6 2i - 16a^4 - 8a^6 2i} = -\frac{1-i}{8a^3(1-2a^2 i)} = -\frac{1+2a^2-i(1-2a^2)}{8a^3(1+4a^4)}\ ,$$

$$c_3 = \frac{2a(-1+i)}{24a^6 2i - 16a^4 - 8a^6 2i} = \frac{1+i}{8a^3(1-2a^2 i)} = \frac{1+2a^2-i(1-2a^2)}{8a^3(1+4a^4)}\ ,$$

$$c_4 = \frac{-2a(1+i)}{-24a^6 2i - 16a^4 + 8a^6 2i} = \frac{1+i}{8a^3(1+2a^2 i)} = \frac{1+2a^2+i(1-2a^2)}{8a^3(1+4a^4)}\ ,$$

$$c_5 = \frac{2i}{-6+4-8a^4} = \frac{-i}{1+4a^4}\ , \qquad c_6 = \frac{-2i}{-6+4-8a^4} = \frac{i}{1+4a^4}\ .$$

Pro první čtyři zlomky najdeme originály jako v předcházejícím příkladě a zbývající dva podle výsledku př. 1.13

$$\begin{aligned} y(x) = \frac{1}{8a^3}\frac{1}{1+4a^4}\Big\{ &[-(1+2a^2) - i(1-2a^2)]i\ e^{iat} f_1(x) + \\ &+[(1+2a^2) - i(1-2a^2)](-i)\ e^{iat} f_2(x) + \\ &+[(1+2a^2) - i(1-2a^2)]i\ e^{-iat} f_1(x) + \\ &+[-(1+2a^2) - i(1-2a^2)](-i)\ e^{-iat} f_2(x) + 8a^3 e^{-|x|} \Big\} = \\ = \frac{1}{8a^3}\frac{1}{1+4a^4}\Big\{ &[(1-2a^2) - i(1+2a^2)]\ e^{iat} f_1(x) + \\ &+[(1-2a^2) + i(1+2a^2)]\ e^{iat} f_2(x) + \\ &+[(1-2a^2) + i(1+2a^2)]\ e^{-iat} f_1(x) + \\ &+[(1-2a^2) - i(1+2a^2)]\ e^{-iat} f_2(x) + 8a^3 e^{-|x|} \Big\}\ . \end{aligned}$$

Spojením 1. a 3. části a 2. a 4. části dostaneme

$$\begin{aligned} y(x) = \frac{1}{4a^3}\frac{1}{1+4a^4}\Big\{ &(1-2a^2)\cos ax\ [f_1(x) + f_2(x)] + \\ &+(1+2a^2)\sin ax\ [f_1(x) - f_2(x)] + 4a^3 e^{-|x|} \Big\} = \\ = \frac{1}{1+4a^4}\Big\{ &\frac{e^{-a|x|}}{4a^3}\Big[(1-2a^2)\cos ax\ + (1+2a^2)\sin a|x|\Big] + e^{-|x|}\Big\}\ . \end{aligned}$$

3b

3.6 Pomocí Fourierovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$y^{(4)} + 4\,a^4 y = f(x)\ ,\ a \in \mathcal{R}^+\ ,$$

která popisuje jako v př. 3.4 průhyb nekonečného nosníku na pružném podkladě při zatížení, které je popsáno zobrazitelnou funkcí $f(x)$.

Řešení : Po zobrazení ve Fourierově transformaci dostaneme

$$(u^4 + 4a^4)\ Y(u) = F(u) \quad \Rightarrow \quad Y(u) = \frac{F(u)}{u^4+4a^4}\ ,\quad F(u) = \mathcal{F}[f(x)]\ .$$

Jestliže je tedy funkce F Fourierovým obrazem funkce f, potom se nazývá funkce f **originál (vzor) funkce** F **ve Fourierově transformaci** a pro výpočet originálu platí

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(u)] = \frac{1}{2\pi}\text{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{iut}du.$$

Jestliže integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\ du$ absolutně konverguje, potom (vzhledem k rovnosti $|\ e^{iut}\ | = 1$) není třeba při výpočtu originálu používat hlavní hodnotu integrálu, integrál stejnoměrně konverguje v $\mathcal{R}$ vzhledem k parametru t a originál $f(t)$ musí být spojitá funkce parametru t.

V příkladech 1.1 - 1.10 rozhodněte, zda jsou dané funkce zobrazitelné ve Fourierově transformaci (ve smyslu naší definice). V kladném případě stanovte podle definice jejich Fourierův obraz .

1a

1.1.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0\,, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 0\,, \\ e^{-t} & \text{pro } t > 0\,. \end{cases}$$

Řešení : Funkce a její derivace mají jediný bod nespojitosti $t = 0$, ve kterém existují limity zprava a zleva. Funkce tedy splňuje první dvě Dirichletovy podmínky. Protože $\lim_{t\to 0-} f(t) = 0$ a $\lim_{t\to 0+} f(t) = 1$, je splněna i třetí podmínka.

Výpočtem zjistíme, že $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\ dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ dt$ konverguje.

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iut}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}e^{-iut}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(1+iu)t}dt = \frac{1}{1+iu}.$$

1.2.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \vee t > 1\,, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 0 \vee t = 1\,, \\ 1 & \text{pro } t \in (0,1)\,. \end{cases}$$

Řešení : Daná funkce splňuje stejně jako v předcházejícím případě Dirichletovy podmínky. Protože funkce je nenulová pouze v konečném intervalu, nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ se redukuje na určitý integrál, který má konečnou hodnotu (rovná se 1).

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ e^{-iut}dt = \int_0^1 e^{-iut}dt = -\frac{1}{iu}(e^{-iu} - e^0) = \frac{1-e^{-iu}}{iu}.$$

1.3. $f(t) = e^t$ pro $t \in \mathcal{R}$.

Řešení : Při výpočtu $\int_{-\infty}^{+\infty} e^t\ dt = \lim_{t\to+\infty} e^t - \lim_{t\to-\infty} e^t$ je první limita nevlastní. Nevlastní integrál tedy nekonverguje a daná funkce není zobrazitelná funkce.

1.4.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < a \vee t > b \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = a \vee t = b \quad (a < b) \\ 1 & \text{pro } t \in (a,b) \end{cases}$$

Výsledek : Daná funkce je zobrazitelná a platí

$$F(u) = \frac{e^{-iau} - e^{-ibu}}{iu}.$$

1.5. $f(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$ pro $t \in \mathcal{R}$.

Řešení : Daná funkce není zobrazitelná, protože $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+1}\ dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ nekonverguje.

1.6. $f(t) = \dfrac{1}{t^2 + a^2}$ pro $t \in \mathcal{R}$, $a \in \mathcal{R}^+$.

Řešení : Daná funkce i její derivace jsou spojité funkce pro všechna $t \in \mathcal{R}$, takže Dirichletovy podmínky jsou splněny.
Snadným výpočtem se dá zjistit, že nevlastní integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + a^2}\, dt$ konverguje, takže funkce je zobrazitelná a její obraz se dá určit pro $u = 0$ přímým výpočtem $F(0) = \dfrac{\pi}{a}$.
Pro $u < 0$ pomocí reziduové věty (viz [4] - podobně jako v př. 11.48) vyjde $F(u) = \dfrac{\pi\, e^{-au}}{a}$.
Pro $u > 0$ se nevlastní integrál počítá také pomocí reziduové věty, ale pro funkci $\dfrac{e^{-iuz}}{z^2 + a^2}$ po záporně orientované křivce (viz [4],př. 11.39) a vyjde $F(u) = \dfrac{\pi\, e^{au}}{a}$. Výsledek se dá také stručněji zapsat ve tvaru

$$F(u) = \frac{\pi\, e^{-a|u|}}{a} \,.$$

1.7. $f(t) = \dfrac{1}{t^2 + 2t + 2}$ pro $t \in \mathcal{R}$.

Řešení : Daná funkce i její derivace jsou spojité funkce pro všechna $t \in \mathcal{R}$, takže Dirichletovy podmínky jsou splněny. Nevlastní integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 2t + 2}\, dt$ konverguje, takže funkce je zobrazitelná a její obraz se dá vypočítat pomocí reziduí (viz [4] př. 11.44).

$$F(u) = \pi\, e^{-u}(\cos u + i \sin u) \text{ pro } u \geq 0 \,;$$

$$F(u) = \pi\, e^{u}(\cos u + i \sin u) \text{ pro } u < 0 \,.$$

1.8. $f(t) = \dfrac{1}{(t^2 + a^2)^2}$ pro $t \in \mathcal{R}$, $a \in \mathcal{R}^+$.

Řešení : Daná funkce i její derivace jsou spojité funkce pro všechna $t \in \mathcal{R}$, takže Dirichletovy podmínky jsou splněny. Nevlastní integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + a^2)^2}\, dt$ konverguje, takže funkce je zobrazitelná a její obraz se dá vypočítat pomocí reziduí (viz [4] př. 1.55)

$$F(u) = \frac{\pi\, e^{-au}(1 + au)}{2\, a^3} \text{ pro } u \geq 0 \,;\; F(u) = \frac{\pi\, e^{au}(1 + au)}{2\, a^3} \text{ pro } u < 0 \,.$$

1.9. $f(t) = \cos t$ pro $t \in \mathcal{R}$.

Řešení : Daná funkce není zobrazitelná, protože $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\cos t|\, dt$ nekonverguje.

1.10. $f(t) = e^{-t^2}$ pro $t \in \mathcal{R}$.

1h

Řešení : Daná funkce i její derivace jsou spojité funkce pro všechna $t \in \mathcal{R}$, takže Dirichletovy podmínky jsou splněny. Nevlastní integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ konverguje (má hodnotu $\sqrt{\pi}$), takže funkce je zobrazitelná.

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, e^{-iut} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2 + iut)} dt = e^{-\frac{u^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2 + iut - \frac{u^2}{4})} dt =$$

$$= e^{-\frac{u^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2}\, d\tau = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{u^2}{4}} \left(\text{po substituci } \tau = t + \frac{iu}{2}\right).$$

V příkladech 1.11 - 1.30 vypočítejte Fourierův obraz daných funkcí a prověřte spojitost obrazu $F(u)$ a souvislost spojitosti originálu s absolutní konvergencí integrálu $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\, du$.

1.11 Pro $a \in \mathcal{R}^+$

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } t = 0 \\ e^{-at} & \text{pro } t > 0 \end{cases}$$