10. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Hint

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} \mathrm{d}s = \sqrt{\pi}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\mathcal{F}(\frac{e^{-a|t|}}{2a}), \qquad a > 0$$

Příklady

1. Určete Fourierovu transformaci následujících funkcí a určete, čemu se rovná $\mathcal{F}\mathcal{F}_{-1}(f)$:

   (a)
   $$f_1(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ \frac{1}{2}; & t = 0; \\ e^{-t}; & t > 0, \end{cases}$$

   (b)
   $$f(t) = \begin{cases} a + t; & t \in (-a, 0) \\ 0; & jinak \end{cases}$$
   $a > 0$

   (c)
   $$f(t) = \begin{cases} \sin t; & t \in (0, \pi) \\ 0; & jinak \end{cases}$$

   (d) $f(t) = e^t$

   (e) $a > 0$
   $$f(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ e^{-at}; & jinak \end{cases}$$

   (f) $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$
   $$f(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ e^{-at}(\cos bt + i \sin bt); & jinak \end{cases}$$
   (použijte nějakou vlastnost)

   (g)
   $$f(t) = \begin{cases} 0; & |t| \geq \frac{\pi}{2} \\ \cos t; & |t| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

   (h) $f(t) = e^{-t^2}$

(i) $g(t) = \int_0^t (as-1) f_2(s)\mathrm{d}s$
kde

$$f_2(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ \frac{1}{2}; & t = 0; \\ e^{-at}; & t > 0, \end{cases}$$

$a > 0$

2. Najděte vzor funkce

   (a) $F(x) = \frac{\cos 2x}{x^2+a^2}$, $a > 0$
   (rozklad na parc. zlomky a pak posunutí)

   (b) $F(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, $a, b > 0$, $a \neq b$
   (oarc. zlomky + hint)

   (c) $F(x) = e^{-b^2x^2}$, $b > 0$ (nějaký předchozí příklad)

3. Řešte diferenciální rovnici (analogicky jako Laplace)

   (a) $y^{(4)} + 4a^4y = f(t)$,

$$f(t) = \begin{cases} 1; & |t| \leq a \\ 0; & |t| > a \end{cases}$$

   $a > 0$

   (b) $y^{(4)} + 4a^4y = e^{-a|t|}$, $a > 0$

4. Ukažte, že Fourierova transformace neexistuje:

$$f(t) = \frac{t}{t^2+1}$$

5. Nechť $\mathcal{F}[f(x)] = F(x)$. Dokažte, že:

   (a) $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{x}{a}\right)$, $a > 0$

   (b) $\mathcal{F}[f(-t)] = F(-x)$

   (c) Dokažte, že obrazem sudé funkce je sudá a obrazem liché funkce lichá funkce.

   (d) $\mathcal{F}[f(t-a)] = e^{-iau}F(u)$