6. Řešení lineárních diferenciálních rovnic.

Laplaceovu tramsformaci můžeme použít k řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstatními koeficienty nebo jejich soustav. Pomocí vztahů mezi obrazem funkce a obrazem jejich derivací lze rovnici převést na lineární rovnici nebo soustavu lineárních rovnic pro obraz či obrazy řešení. Obrazem řešení obvykle bývá racionální funkce. Jak se hledá předmět k takové funkci jsme ukázali v odstavci 2. Obecně lze řešení zapsat jako konvoluci „ pravé strany rovnice " a předmětu k racionální funkci.

Budeme hledat řešení diferenciální rovnice

$$(\clubsuit) \qquad x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n x(t) = f(t)$$

v intervalu $t \in (0, \infty)$, které vyhovuje počáteční podmínce

$$(\spadesuit) \qquad x(0) = x_1,\ x'(0) = x_2, \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_n.$$

Jestliže označíme

$$\mathscr{L}\{x(t)\} = X(p),$$

pak

$$\mathscr{L}\{x'(t)\} = pX(p) - x_1,\ \mathscr{L}\{x''(t)\} = p^2X(p) - px_1 - x_2, \ldots,$$
$$\mathscr{L}\{x^{(n)}(t)\} = p^nX(p) - p^{n-1}x_1 - \ldots - x_n.$$

Po dosazení do rovnice $(\clubsuit)$ dostaneme rovnici pro obraz řešení ve tvaru

$$(p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n)X(p) - Q(p) = \mathscr{L}\{f(t)\},$$

kde $Q(p)$ je nějaký polynom stupně nejvýše $(n-1)$. Odtud dostaneme obraz řešení ve tvaru

$$X(p) = \frac{\mathscr{L}\{f(t)\}}{p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n} + \frac{Q(p)}{p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Odtud lze vyjádřit řešení ve tvaru

$$x(t) = f(t) * v(t) + w(t),\ t \geq 0,$$

kde

$$v(t) \triangleq \frac{1}{p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n} \quad \text{a} \quad w(t) \triangleq \frac{Q(p)}{p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n}$$

jsou předměty k uvedeným racionálním funkcím. Je- li předmět $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(p)$ racionální funkcí dostaneme řešení jako předmět k racionální funkci a není třeba využívat jeho vyjádření pomocí konvoluce. Je pak

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{F(p)}{P(p)}\} + \mathscr{L}^{-1}\{\frac{Q(p)}{P(p)}\},$$

kde $P(p) = p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n$.

Poznamenejme, že z rozboru postupu vyplývá, že první člen ve vzorci je řešením rovnice $(\clubsuit)$ za nulových počátečních podmínek a druhý člen je řešením homogenní rovnice příslušné rovnici $(\clubsuit)$, které vyhovuje počátečním podmínkám $(\spadesuit)$.

Stejným způsobem můžeme řešit i rovnici tvaru $(\clubsuit)$, která obsahuje ještě člen tvaru $\int_0^t x(u)\mathrm{d}u$. Zde použijeme vztahu $\mathscr{L}^{-1}\{\int_0^t x(u)\mathrm{d}u\} = \frac{1}{p}X(p)$ a pro obraz řešení $X(p)$ dostaneme analogické vyjádření.

Obdobně můžeme postupovat při řešení soustav diferenciálních rovnic, kde dostaneme soustavu lineárních rovnic pro obrazy řešení. Po jejím vyřešení hledáme řešení soustavy jako předměty k funkcím výše popsaného tvaru.

Postup řešení jednotlivých úloh budeme ilustrovat na příkladech.

Řešené úlohy na diferenciální rovnice.

Nalezněte řešení dané rovnice v intervalu $(0, \infty)$, které vyhovuje uvedeným počátečním podmínkám.

a

1. $x' + 2x = 3, \quad x(0) = 0.$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$pX(p) - 0 + 2X(p) = \frac{3}{p}$.

Odtud vypočteme, že

$X(p) = \frac{3}{p(p+2)}$.

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{3}{p(p+2)} = \frac{3}{2p} - \frac{3}{2(p+2)}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = \frac{3}{2}(1 - e^{-2t}),\ t \geq 0.$$

Použili jsme vztah $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $e^{-2t} \triangleq \frac{1}{p+2}$.

c

2. $x' + 4x = \sin 2t, \quad x(0) = 3.$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$X(p)(p+4) - 3 = \frac{2}{p^2+4}$.

Odtud vypočteme, že

$X(p) = \frac{3}{p+4} + \frac{2}{(p+4)(p^2+4)}$.

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{3}{p+4} + \frac{2}{(p+4)(p^2+4)} = \frac{3}{p+4} + \frac{\frac{1}{10}}{p+4} + \frac{-\frac{1}{10}p + \frac{2}{5}}{p^2+4}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = \frac{31}{10}e^{-4t} - \frac{1}{10}\cos 2t + \frac{1}{5}\sin 2t,\ t \geq 0.$$

Použili jsme vztah $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$ a vzorce $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$, $\cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4}$, $e^{-4t} \triangleq \frac{1}{p+4}$.

3. $x'' - x' - 6x = 2, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$p^2X(p) - p.1 - 0 - (pX(p) - 1) - 6X(p) = \frac{2}{p}$.

Odtud vypočteme, že

$X(p) = \frac{p^2-p+2}{p(p-3)(p+2)}$.

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{p^2 - p + 2}{p(p-3)(p+2)} = \frac{-\frac{1}{3}}{p} + \frac{\frac{4}{5}}{p+2} + \frac{\frac{8}{15}}{p-3}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = \frac{1}{15}(-5 + 12e^{-2t} + 8e^{3t}),\ t \geq 0.$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $x''(t) \triangleq p^2X(p) - px(0) - x'(0)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $e^{at} \triangleq \frac{1}{p-a}$, $a = -2$, $a = 3$.

4. $x'' - 6x' + 9x = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = -4$.

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$(p^2X(p) - 2p + 4) - 6(pX(p) - 2) + 9X(p) = 0$.

Odtud vypočteme, že

$X(p) = \frac{2p-16}{p^2-6p+9}$.

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{2p-16}{p^2-6p+9} = \frac{2(p-3)+6-16}{(p-3)^2} = \frac{2}{(p-3)} \quad \frac{10}{(p-3)^2}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = (2 - 10t)e^{3t},\ t \geq 0.$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $x''(t) \triangleq p^2X(p) - px(0) - x'(0)$ a vzorce $e^{3t} \triangleq \frac{1}{p-3}$, $te^{3t} \triangleq \frac{1}{(p-3)^2}$.

5. $x'' + 2x' + 2x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$(p^2X(p) - p - 2) + 2(pX(p) - 1) + 2X(p) = 0$.

Odtud vypočteme, že

$X(p) = \frac{p+4}{p^2+2p+2}$.

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{p+4}{p^2+2p+2} = \frac{p+1}{(p^2+1)+1} + \frac{3}{(p^2+1)+1}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = e^{-t}(\cos t + 3\sin t),\ t \geq 0.$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $x''(t) \triangleq p^2X(p) - px(0) - x'(0)$, $e^{at}f(t) \triangleq F(p-a)$, $a = -1$ a vzorce $\cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}$, $\sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1}$.

6 6. $x'' - 9x = 2 - t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$(p^2 - 9)X(p) - 1 = \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2}$.

Odtud vypočteme, že

$X(p) = \frac{p^2+2p-1}{p^2(p-3)(p+3)}$.

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{-\frac{6}{27}}{p} + \frac{\frac{1}{9}}{p^2} + \frac{\frac{7}{27}}{p-3} - \frac{\frac{1}{27}}{p+3}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = \frac{1}{27}(\ 6 + 3t + 7e^{3t} \quad e^{-3t}),\ t \geq 0.$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $x''(t) \triangleq p^2X(p) - px(0) - x'(0)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $t \triangleq \frac{1}{p^2}$, $e^{at} \triangleq \frac{1}{p-a}$, $a = 3$, $a = -3$.

7. $x'' + 4x = 2\cos 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 4$.

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$(p^2 + 4)X(p) - 4 = \frac{2p}{p^2+4}$.

Odtud vypočteme, že

$X(p) = \frac{4}{p^2+4} + \frac{2p}{(p^2+4)^2}$.

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2. Odtud plyne, že

$$x(t) = \frac{1}{2}(4 + t)\sin 2t,\ t \geq 0.$$

Použili jsme vztahy $x''(t) \triangleq p^2X(p) - px(0) - x'(0)$ a vzorce $t\sin 2t \triangleq \frac{4p}{(p^2+4)^2}$, $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$.

8. $x' + \int_0^t x(\tau)\,d\tau = 1$, $x(0) = 1$.

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace a obrazem integrálu, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$(p + \frac{1}{p})X(p) - 1 = \frac{1}{p}$.

Odtud vypočteme, že

$X(p) = \frac{p+1}{p^2+1}$.

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2.

$$X(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = \sin t + \cos t,\ t \geq 0.$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $\int_0^t x(\tau)\,d\tau \triangleq \frac{1}{p}X(p)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $\sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1}$, $\cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}$.

9. $x' + 2x + 2\int_0^t x(\tau)\,d\tau = 3e^{-t}, \quad x(0) = 2.$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace a obrazem integrálu, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$(p + 2 + \frac{2}{p})X(p) - 2 = \frac{3}{p+1}.$

Odtud vypočteme, že

$X(p) = \frac{2p^2+5p}{(p+1)(p^2+2p+2)}.$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{2p^2 + 5p}{(p+1)(p^2+2p+2)} = \frac{-3}{p+1} + \frac{5p+6}{p^2+2p+2}.$$

Úpravou dostaneme vyjádření

$$X(p) = \frac{-3}{p+1} + \frac{5(p+1)}{(p+1)^2+1} + \frac{1}{(p+1)^2+1}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = -3e^{-t} + e^{-t}(5\cos t + \sin t), \ t \geq 0.$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $\int_0^t x(\tau)\,d\tau \triangleq \frac{1}{p}X(p)$, $e^{-t}f(t) \triangleq F(p+1)$ a vzorce $e^{-t} \triangleq \frac{1}{p+1}$, $\sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1}$, $\cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}$.

• 10. $x' - x = f(t), \quad x(0) = -1,$ kde $f(t) = \begin{cases} 2-t, & 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$

c

Poznamenejme, že $f(t) = (2-t)[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-2)]$ a postupem z odstavce 3 dostaneme

$$f(t) \triangleq \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2}(1 - e^{-2p}).$$

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p-1)X(p) + 1 = \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2}(1 - e^{-2p}).$$

Odtud vypočteme, že

$$X(p) = \frac{-p^2+2p-1}{p^2(p-1)} + \frac{1}{p^2(p-1)}e^{-2p}.$$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavci 2. Funkce rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \left(\frac{-1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-1}\right)e^{-2p}.$$

Použijeme postupů, které jsme probrali v úlohách v odstavcích 2 a 4 a dostaneme pro řešení vzorec

$$x(t) = (t-1)\mathbf{1}(t) + (-1 - (t-2) + e^{(t-2)})\mathbf{1}(t-2), \ t \geq 0.$$

Řešení lze také zapsat pomocí vzorce

$$x(t) = \begin{cases} t-1, & 0 \leq t \leq 2, \\ e^{t-2}, & t > 2. \end{cases}$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, větu o translaci z odstavce 3 a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $t \triangleq \frac{1}{p^2}$, $e^t \triangleq \frac{1}{p-1}$.

11. $x'' + x = f(t), \quad x(0) = 1, \ x'(0) = -1,$ kde $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$

Poznamenejme, že $f(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)$, tedy $\mathscr{L}f(t) = \frac{1}{p}(1 - e^{-p})$, kde obraz k funkci $f(t)$ získáme pomocí věty o translaci. Postup jsme ukázali v úlohách v odstavci 3.

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$(p^2 + 1)X(p) - p + 1 = \frac{1}{p}(1 - e^{-p}).$

Dále vypočteme, že

$X(p) = \frac{p^2-p+1-e^{-p}}{p(p^2+1)}.$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavcích 2 a 4. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2+1} - \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right)e^{-p}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = (1 - \sin t)\mathbf{1}(t) - (1 - \cos(t-1))\mathbf{1}(t-1), \ t \geq 0.$$

Řešení lze také zapsat pomocí vzorce

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \sin t, & 0 \leq t \leq 1, \\ \sin t(\sin 1 \quad 1) + \cos t \cos 1, & t > 1. \end{cases}$$

Použili jsme vztahy $x''(t) \triangleq p^2X(p) - px(0) - x'(0)$, větu o translaci z odstavce 3 a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $\sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1}$, $\cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}$.

12. $x'' + 4x' + 3x = f(t), \quad x(0) = 0, \ x'(0) = 0,$ kde $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 0. \end{cases}$

Poznamenejme, že $f(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)$, tedy $\mathscr{L}f(t) = (1 - e^{-p})\frac{1}{p}$, kde obraz k funkci $f(t)$ získáme pomocí věty o translaci. Postup jsme ukázali v úlohách v odstavci 3.

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$X(p)(p^2 + 4p + 3) = (1 - e^{-p})\frac{1}{p}.$

Dále vypočteme, že

$X(p) = \frac{1-e^{-p}}{p(p^2+4p+3)}.$

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavcích 2 a 4. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \left(\frac{1}{3p} - \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{6(p+3)}\right)(1 - e^{-p}).$$

Odtud plyne, že

$$x(t)=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-3t}\right)\mathbf{1}(t)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}e^{-(t-1)}+\frac{1}{6}e^{-3(t-1)}\right)\mathbf{1}(t-1),\ t>0.$$

Řešení lze také zapsat pomocí vzorce

$$x(t)=\begin{cases}\frac{1}{3}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-3t}, & 0\le t\le 1,\\ \frac{1}{2}(e-1)e^{-t}+\frac{1}{6}(1-e^{3})e^{-3t}, & t>1.\end{cases}$$

Použili jsme vztahy $x'(t)\triangleq X(p)-x(0)$, $x''(t)\triangleq p^2X(p)-px(0)-x'(0)$, větu o translaci z odstavce 3 a vzorce $1\triangleq\frac{1}{p}$, $e^{at}\triangleq\frac{1}{p-a}$, $a=-1$, $a=-3$.

13. $x''+x=f(t)$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$, kde $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 1,\\ -1, & 1<t\le 2,\\ 0, & t>2.\end{cases}$

Poznamenejme, že $f(t)=\mathbf{1}(t)-2\mathbf{1}(t-1)+\mathbf{1}(t-2)$, tedy $\mathscr{L}f(t)=\frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}$, kde obraz k funkci $f(t)$ získáme pomocí věty o translaci. Postup jsme ukázali v úlohách v odstavcích 3.

Označme $X(p)\triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$(p^2+1)X(p)=\frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}$.

Dále vypočteme, že

$X(p)=\frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p(p^2+1)}$.

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavcích 5, 6 a 12. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p)=\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}\right)(1-2e^{-p}+e^{-2p}).$$

Odtud plyne, že

$$x(t)=(1-\cos t)\mathbf{1}(t)-2(1-\cos(t-1))\mathbf{1}(t-1)+(1-\cos(t-2))\mathbf{1}(t-2),\ t\ge 0.$$

Řešení lze také zapsat pomocí vzorce

$$x(t)=\begin{cases}1-\cos t, & 0\le t\le 1,\\ -1+(2\cos 1-1)\cos t+2\sin 1\sin t, & 1<t\le 2,\\ \cos t(2\cos 1-1-\cos 2)-(\sin 2-2\sin 1)\sin t, & t>2.\end{cases}$$

Použili jsme vztahy $x'(t)\triangleq X(p)-x(0)$, $x''(t)\triangleq p^2X(p)-px(0)-x'(0)$, větu o translaci z odstavce 8 a vzorce $1\triangleq\frac{1}{p}$, $\sin t\triangleq\frac{1}{p^2+1}$, $\cos t\triangleq\frac{p}{p^2+1}$.

(m) • 14. $x''+2x'+2x=f(t)$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$, kde $f(t)=\begin{cases}0, & 0<t<1,\\ e^{-t}, & t>1.\end{cases}$

Poznamenejme, že $f(t)=e^{-t}\mathbf{1}(t-1)=e^{-1}e^{-(t-1)}\mathbf{1}(t-1)$, tedy $\mathscr{L}f(t)=\frac{e^{-1}e^{-p}}{p+1}$, kde obraz k funkci $f(t)$ získáme pomocí věty o translaci. Postup jsme ukázali v úlohách v odstavci 3.

Označme $X(p)\triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$(p^2+2p+2)X(p)=\frac{e^{-1}e^{-p}}{p+1}$.

Dále vypočteme, že

$X(p)=\frac{e^{-1}e^{-p}}{(p+1)(p^2+2p+2)}$.

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavcích 2 a 4. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p)=e^{-1}\left(\frac{1}{p}-\frac{p+1}{(p+1)^2+1}\right)e^{-p}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t)=e^{-1}(1-e^{-(t-1)}\cos(t-1))\mathbf{1}(t-1),\ t\ge 0.$$

Řešení lze také zapsat pomocí vzorce

$$x(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le 1,\\ e^{-1}-e^{-t}(\cos 1\cos t+\sin 1\sin t), & t>1.\end{cases}$$

Použili jsme vztahy $x'(t)\triangleq X(p)-x(0)$, $x''(t)\triangleq p^2X(p)-px(0)-x'(0)$, větu o translaci z odstavce 3 a vzorce $\cos t\triangleq\frac{p}{p^2+1}$, $e^{-t}\triangleq\frac{1}{p+1}$ a vztah $f(t)e^{-t}\triangleq F(p+1)$.

(o) • 15. $x''+4x=f(t)$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$, kde $f(t)=\begin{cases}2t, & 0\le t\le 1,\\ 2(t-2), & 1<t\le 2,\\ 0, & t>2.\end{cases}$

Poznamenejme, že $f(t)=2t(\mathbf{1}(t)-\mathbf{1}(t-1))+2(t-2)(\mathbf{1}(t-1)-\mathbf{1}(t-2))=2t\mathbf{1}(t)-4(t-1)\mathbf{1}(t-1)+2(t-2)\mathbf{1}(t-2)$, tedy $\mathscr{L}f(t)=(1-2e^{-p}+e^{-2p})\frac{2}{p^2}$, kde obraz k funkci $f(t)$ získáme pomocí věty o translaci. Postup jsme ukázali v úlohách v odstavci 3.

Označme $X(p)\triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$(p^2+4)X(p)=(1-2e^{-p}+e^{-2p})\frac{2}{p^2}$.

Dále vypočteme, že

$X(p)=(1-2e^{-p}+e^{-2p})\frac{2}{p^2(p^2+4)}$.

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavcích 2 a 4. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p)=\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+4}\right)\frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{2}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\mathbf{1}(t)-\left[(t-1)-\frac{1}{2}\sin 2(t-1)\right]\mathbf{1}(t-1)+$$
$$\frac{1}{2}\left[(t-2)-\frac{1}{2}\sin 2(t-2)\right]\mathbf{1}(t-2),\ t\ge 0.$$

Řešení lze také zapsat pomocí vzorce

$$x(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t, & 0\le t\le 1,\\ 1-\frac{1}{2}t+\sin 2t(\frac{1}{2}\cos 2-\frac{1}{4})-\frac{1}{2}\sin 2\cos 2t, & 1<t\le 2,\\ \sin 2t(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2-\frac{1}{4}\cos 4)+(\frac{1}{4}\sin 4-\frac{1}{2}\sin 2)\cos 2t, & t>2.\end{cases}$$

(e)

$$y' + 4y = \sin 2t \qquad y(0) = 3$$

$$sY(s) - y(0) + 4Y(s) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$Y(s) = \frac{3}{s+4} + \frac{2}{(p+4)(p^2+4)}$$

$$= \frac{3}{s+4} + \frac{1/10}{s+4} + \frac{-\frac{1}{10}s + \frac{2}{5}}{s^2+4}$$

$$y(t) = \underline{\underline{\frac{31}{10} e^{-4t} + -\frac{1}{10}\cos 2t +}} \frac{1}{5}\sin 2t$$

(b)

$$y'' - 9y = 2 - t \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 9Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s)(s^2 - 9) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} + 1$$

$$Y(s) = \frac{-1 + 2s + s^2}{s^2(s-3)(s+3)}$$

$$= -\frac{6}{27}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{7/27}{p-3} - \frac{1/27}{p+3}$$

Pak $y(t) = \frac{1}{27}\left(-6 + 3t + 7e^{3t} - e^{-3t}\right) \qquad t \geq 0$

(d) $y'' - 2y' + y = 4 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$

$$s^2Y(s) - s\cancel{y(0)} - s'(0) - 2sY(s) - 2\cancel{y(0)} + Y(s) = \frac{4}{s}$$

$$Y(s)(s^2 - 2s + 1) - 1 = \frac{4}{s}$$

$$Y(s) = \frac{4 + s}{s(s-1)^2}$$

$$\frac{4}{s} - \frac{4}{s-1} + \frac{5}{(s-1)^2}$$

$$y(t) = \underline{\underline{4 - 4e^t + 5te^t}}$$

(h) $y'' + 4y = 2\cos 2t \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 4$

$$s^2Y(s) - s\cancel{y(0)} - y'(0) + 4Y(s) = 2\frac{s}{s^2+4}$$

$$Y(s)(s^2+4) - 4 = \frac{2s}{s^2+4}$$

$$Y(s) = \frac{2s}{(s^2+4)^2} + \frac{4}{s^2+4}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2s}{(s^2+4)^2} + \frac{2 \cdot 2}{s^2+4}$$

$$y(t) = \underline{\underline{\frac{1}{2}t\sin 2t \quad + 2\sin 2t}}$$

(f) $y'' + y = f(t)$ $\qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = -1$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

$$f(t) = u_0(t) - u_1(t)$$

$$s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{s} - e^{-s}\frac{1}{s}$$

$$Y(s)(s^2+1) - s + 1 = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$$

$$Y(s) = -e^{-s}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right) + \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1}$$

$$\underline{\underline{y(t) = -u_1(t) + u_1 \cos t + 1 - \sin t}}$$

(e) $y'' + 3y' + 2y = e^t$ $\qquad y(1) = 1 \qquad y'(1) = 1$

$$s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

pak $Y(s)(s^2 + 3s + 2) = \frac{1}{s-1} + s\,y(0) + y'(0) + 3y(0)$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)(s+1)} + \frac{s\,y(0)}{(s+2)(s+1)} + \frac{y'(0)}{(s+2)(s+1)} + \frac{3y(0)}{(s+2)(s+1)}$$

$$= \frac{-(y'(0)+3y(0))}{s+2} + \frac{y'(0)+3y(0)}{s+1} + \frac{2y(0)}{(s+2)} + \frac{-1\cdot y(0)}{(s+1)}$$

$$+ \frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{6}\frac{1}{(s-1)}$$

pak $y(t)$: $\quad e^{-t}\left[-\frac{1}{2} - y(0) + y'(0) + 3y(0)\right] + \frac{1}{6}e^t + e^{-2t}\left[\frac{1}{3} + 2y(0) - y'(0) + 3y(0)\right]$

$y(1) = 1$:

$$1 = \frac{1}{e}\left[-\frac{1}{2} + 2y(0) + y'(0)\right] + \frac{1}{6}e + e^{-2}\left[\frac{1}{3} - y(0) - y'(0)\right]$$

$y'(1) = 1$

$$1 = -e^{-1}\left[-\frac{1}{2} + 2y(0) + y'(0)\right] + \frac{1}{6}e - 2e^{-2}\left[\frac{1}{3} - y(0) - y'(0)\right]$$

sečt

$$2 = \frac{1}{3}e - e^{-2}\left[\frac{1}{3} - y(0) - y'(0)\right]$$

$$\rightarrow -e^{2}\left(2 - \frac{1}{3}e\right) - \frac{1}{3} + y(0) = -y'(0)$$

dosadíme

$$1 = \frac{1}{e}\left[-\frac{1}{2} + 2y(0) + e^{2}\left(2 - \frac{1}{3}e\right) + \frac{1}{3} - y(0)\right] + \frac{1}{6}e + \frac{1}{3}e - 2$$

$$3e = \frac{1}{2}e^{2} + y(0) - \frac{1}{2} + 2e^{2} - \frac{1}{3}e^{3} + \frac{1}{3}$$

$$\boxed{3e - \frac{5}{2}e^{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{3} = y(0)}$$

$$2e^{2} - \frac{1}{3}e^{3} + \frac{1}{3} - 3e = y'(0)$$
$$+ \frac{5}{2}e^{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}e^{3}$$

$$\boxed{\frac{9}{2}e^{2} - \frac{2}{3}e^{3} - 3e + \frac{1}{6} = y'(0)}$$

a dosadíme ...

(g) $y' + 2y + 2\int_0^t y(s)\,ds = 1 \qquad y(0) = 0$

$$sF(s) - f(0) + 2F(s) + \frac{2F(s)}{s} = \frac{1}{s}$$

$$sY(s) + 2Y(s) + \frac{2}{s}Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s)\left(s + 2 + \frac{2}{s}\right) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s\left(s+2+\frac{2}{s}\right)}$$

$$= \frac{1}{s^2+2s+2} = \boxed{\frac{1}{(s+1)^2+1}}$$

pak $\underline{y(t) = e^{-t}\sin t}$

(j) $y' + 2y + 5\int_0^t y(s)\,ds = 2 \qquad y(0) = 1$

$$sY(s) - 1 + 2Y(s) + \frac{5}{s}Y(s) = \frac{2}{s}$$

$$Y(s)\left(s + 2 + \frac{5}{s}\right) = \frac{2}{s} + 1$$

$$Y(s) = \frac{2+s}{s\left(s+2+\frac{5}{s}\right)}$$

$$\frac{2+s}{s^2+2s+5} = \frac{s+1+1}{(s+1)^2+4}$$

$$= \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{2}\,\frac{2}{(s+1)^2+4}$$

$\underline{y(t) = e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t}$

(h)

?

Soustave

$$y' - y + z = 2 \qquad y(0) = 1$$
$$y - z' - z = e^t \qquad y'(0) = 1$$

$$-Y(s) + sY(s) - y(0) + Z(s) = \frac{2}{s} \qquad y' = 2 - z + y$$
$$-Z(s) + Y(s) - sZ(s) + z(0) = \frac{1}{s-1} \qquad \underset{1}{y'(0)} = 2 - z(0) + \underset{1}{y(0)}$$

$$z(0) = 2$$

$$Y(s)(s-1) + Z(s) = \frac{2+s}{s}$$
$$\cdot(s-1) \,/\quad Y(s) - (s+1)Z(s) = \frac{1}{s-1} - 2 = \frac{-2s+2+1}{s-1} = \frac{-2s+3}{s-1}$$

$$-Y(s)(s-1) - Z(s) = -\frac{2+s}{s}$$
$$Y(s)(s-1) - (s+1)(s-1)\,Z(s) = -2s+3$$
$$-Z(s)\left[s^2 - 1 + 1\right] = -2s + 3 - \frac{2+s}{s}$$
$$-Z(s) = \frac{-2s}{s^2} + \frac{3}{s^2} - \frac{2+s}{s^3}$$
$$-Z(s) = \frac{-2}{s} + \frac{3}{s^2} - \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2}$$

$$z'(t) = -2 + 2t \qquad \underline{\underline{z(t) = +2 + 2t + t^2}}$$

pak $y = e^t + (-2 + 2t) + \cancel{+2} - 2t + t^2$

$$\underline{y = e^t + t^2}$$

$\parallel$ pak $y' = e^t + 2t$

zk: $\cancel{e^t} + \cancel{2t} - \cancel{e^t} - \cancel{t^2} + 2 - \cancel{2t} + \cancel{t^2} = 2$

zk: $e^t + \cancel{t^2} + \cancel{2} - \cancel{2t} - \cancel{2} + \cancel{2t} - \cancel{t^2} = e^t$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq X(p) - x(0)$, $x''(t) \triangleq p^2X(p) - px(0) - x'(0)$, větu o translaci z odstavce 3 a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $t \triangleq \frac{1}{p^2}$, $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$, $\cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4}$.

16. $x' + 5x = f(t)$, $x(0) = 1$, kde $f(t) = \begin{cases} 5\cos 2t, & 0 < t < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Poznamenejme, že

$$f(t) = 5\cos 2t\,[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2})] = 5\cos 2t\,\mathbf{1}(t) + 5\cos 2(t - \frac{\pi}{2})\mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2}),$$

tedy $\mathscr{L}f(t) = \frac{5p}{p^2+4}(1 + e^{-\frac{\pi}{2}p})$, kde obraz k funkci $f(t)$ získáme pomocí věty o translaci. Postup jsme ukázali v úlohách v odstavci 2.

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici $(p+1)X(p) - 1 = \frac{5p}{p^2+4}(1 + e^{-\frac{\pi}{2}p})$.

Dále vypočteme, že $X(p) = \frac{5p}{(p^2+4)(p+1)}(1 + e^{-\frac{\pi}{2}p}) + \frac{1}{p+1}$.

Předmět k funkci $X(p)$ získáme postupem popsaným v odstavcích 2 a 4. Funkci rozložíme na součet parciálních zlomků

$$X(p) = \frac{p+4}{p^2+4} + \left(\frac{p+4}{p^2+4} - \frac{1}{p+1}\right)e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = (\cos 2t + 2\sin 2t)\mathbf{1}(t) + \left(\cos 2(t - \frac{\pi}{2}) + 2\sin 2(t - \frac{\pi}{2}) - e^{-(t-\frac{\pi}{2})}\right)\mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2}),\ t \geq 0.$$

Řešení lze také zapsat pomocí vzorce

$$x(t) = \begin{cases} \cos 2t + 2\sin 2t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ -e^{\frac{\pi}{2}}e^{-t}, & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Použili jsme vztahy $x'(t) \triangleq pX(p) - x(0)$, větu o translaci z odstavce 3 a vzorce $\cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4}$, $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$, $e^{-t} \triangleq \frac{1}{p+1}$.

Řešení rovnice se dá také vyjádřit jako konvoluce. Toto vyjádření můžeme použít ve dvou případech. Buď je funkce na pravé straně rovnice složitá pro hledání obrazu a nebo chceme vyjádřit řešení rovnice pro obecnou pravou stranu. Při výpočtu konkrétního řešení pak zbývá vypočítat integrál, kterým je konvoluce zapsaná. Využijeme vztahu $\mathscr{L}^{-1}\{F(p)G(p)\} = \mathscr{L}^{-1}\{F(p)\} * \mathscr{L}^{-1}\{G(p)\}$. Dostaneme stejné vyjádření řešení, které získáme metodou variace konstant. Postup řešení úlohy budeme ilustrovat na příkladech.

1'

17. $x'' + 3x' + 2x = f(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení a $F(p) \triangleq f(t)$. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p^2 + 3p + 2)X(p) = F(p)$$

a odtud dostaneme pro řešení rovnice vyjádření

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^2 + 3p + 2}.$$

Protože je

$$\frac{1}{p^2+3p+2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} \triangleq (e^{-t} - e^{-2t}),$$

je

$$x(t) = f(t) * (e^{-t} - e^{-2t}) = \int_0^t f(u)(e^{-t+u} - e^{-2t+2u})\,du,\ t \geq 0.$$

18. $x'' + 4x' + 5x = f(t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$,

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení a $F(p) \triangleq f(t)$. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p^2 + 4p + 5)X(p) - p - 4 = F(p)$$

a odtud dostaneme pro řešení rovnice vyjádření

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^2+4p+5} + \frac{p+4}{p^2+4p+5}.$$

Protože je

$$\frac{1}{p^2+4p+5} = \frac{1}{(p+2)^2+1} \triangleq e^{-2t}\sin t$$

a

$$\frac{p+4}{p^2+4p+5} = \frac{p+2}{(p+2)^2+1} + \frac{2}{(p+2)^2+1} \triangleq e^{-2t}(\cos t + 2\sin t)$$

je

$$x(t) = e^{-2t}(\cos t + 2\sin t) + f(t) * e^{-2t}\sin t$$

$$= e^{-2t}(\cos t + 2\sin t) + \int_0^t f(u)e^{-2(t-u)}\sin(t-u)\,du,\ t > 0.$$

2

19. $x' + 2x + 10\int_0^t x(u)du = f(t)$, $x(0) = 1$,

Označme $X(p) \triangleq x(t)$ obraz řešení a $F(p) \triangleq f(t)$. Jestliže využijeme linearitu transformace a vztah mezi obrazem funkce a její derivace a integrálu, tak pro obraz řešení dostaneme rovnici

$$(p + 2 + \frac{10}{p})X(p) - 1 = F(p)$$

a odtud dostaneme pro řešení rovnice vyjádření

$$X(p) = \frac{pF(p)}{p^2+2p+10} + \frac{p}{p^2+2p+10}.$$

Protože je

$$\frac{p}{p^2+2p+10} = \frac{p+1}{(p+1)^2+9} - \frac{1}{(p+1)^2+9} \triangleq e^{-t}(\cos 3t - \frac{1}{3}\sin 3t),$$

je

$$x(t) = e^{-t}(\cos 3t - \frac{1}{3}\sin 3t) + f(t) * e^{-t}(\cos 3t - \frac{1}{3}\sin 3t)$$

$$= e^{-t}(\cos 3t - \frac{1}{3}\sin 3t) + \int_0^t f(u)e^{-t+u}(\cos 3(t-u) - \frac{1}{3}\sin 3(t-u))du,\ t \geq 0.$$