9. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ je funkce. Její *Laplaceovou transformací* rozumíme funkci

$$L(f)(x) := \int_0^\infty f(t)e^{-xt}\mathrm{d}t,$$

kde x je reálné číslo. (Lze ji definovat i pro čísla komplexní, čehož budeme občas využívat.)

Věta 2 (Základní věta kalkulu)**.** Nechť f je spojitá reálná funkce definovaná na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Nechť F je její neurčitý integrál na $[a, b]$. Pak

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$

Definice 3. Vezměme pro $a > 0$ funkci

$$f_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}; & 0 \le t \le a; \\ 0; & t > a, \end{cases}$$

Limita $\lim_{a\to 0+} f_a$ se nazývá *Diracova delta funkce* $\delta_0(t)$. Má hodnotu ∞ v 0 a 0 jinde.

$$\mathcal{L}(\delta(x)) = 1.$$

Definice 4. *Konvoluce* na $(0, \infty)$ dvou funkcí f a g je funkce

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(y)g(t - y)\mathrm{d}y.$$

Zřejmě $f * g$ existuje, pokud jsou obě funkce f, g po částech spojité na $(0, \infty)$.

Věta 5. Nechť f a g jsou po částech spojité a exponenciálně omezené na $(0, \infty)$. Pak

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$$

.

Věta 6. Nechť g je holomorfní funkce v $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ a existují $k, p > 0$ tak, že $|g(z)| \le k|z|^{-p}$ pro dostatečně velká $|z|$. Potom

$$\mathcal{L}_{-1}(g(z))(s) = \sum_{i=1}^n \mathrm{res}_{z_i}(g(z)e^{xz}).$$

Definice 7. Skokovou (neboli Heavisidovu) funkci definujeme následovně:

$$u_a(t) = \begin{cases} 0; & t < a; \\ 1; & t > a, \end{cases}$$

v bodě a dodefinujeme libovolně, zpravidla nulou.

Algoritmus

$$
\begin{array}{ccc}
\text{diferenciální rovnice +} & & \text{řešení diferenciální rovnice} \\
\text{+ počáteční podmínky} & & \text{vyhovující počátečním podmínkám} \\
\downarrow & & \uparrow \\
\mathcal{L}-\text{transformace rovnice} & & \mathcal{L}^{-1}-\text{transformace řešení} \\
\downarrow & & \uparrow \\
\text{algebraická rovnice} & \longrightarrow & \text{řešení}
\end{array}
$$

Hint

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$$
$$\mathcal{L}\{f'\} = sF(s) - f(0)$$
$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$
$$\mathcal{L}\{f'''\} = s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

Příklady

1. Spočítejte diferenciální rovnice (na intervalu $(0,\infty)$), funkce je $y(t)$.

   (a) $y' + 2y = 3$, $y(0) = 0$

   (b) $y'' - 9y = 2 - t$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

   (c) $y' - y = f(t)$,
   $$f(t) = \begin{cases} 2-t; & 0 \le t \le 2 \\ 0; & t > 2, \end{cases}$$
   $y(0) = -1$

   (d) $y'' - 2y' + y = 4$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

   (e) $y' + 4y = \sin 2t$, $y(0) = 3$

   (f) $y'' + y = f(t)$,
   $$f(t) = \begin{cases} 1; & 0 \le t \le 1 \\ 0; & t > 1, \end{cases}$$
   $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

   (g) $y' + 2y + 2\int_0^t y(s)\mathrm{d}s = 1$, $y(0) = 0$.

   (h) $y' - y + z = 2$, $y - z' - z = e^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

   (i) $y'' + 3y' + 2y = f(t)$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

   (j) $y' + 2y + 5\int_0^t y(s)\mathrm{d}s = 2$, $y(0) = 1$.

(k) $y' + 2y + 10\int_0^t y(s)\mathrm{d}s = f(t)$ $y(0) = 1$

(l) $y'' + 3y' + 2y = e^t$ $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$

(m) $y'' + 2y' + y = f(t)$,

$$f(t) = \begin{cases} 0; & 0 \le t \le 1 \\ e^{-t}; & t > 1, \end{cases}$$

$y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

(n) $y'' + 4y = 2\cos 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$

(o) $y'' + 4y = f(t)$,

$$f(t) = \begin{cases} 2t; & 0 \le t \le 1 \\ 2(t-2); & 1 \le t \le 2 \\ 0; & t > 2, \end{cases}$$

$y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

2. Spočtěte Laplaceovu transformaci následujících funkcí $f(t)$, nezapomeňte na definiční obor:

(a) 1 (z definice)

(b) e^{at}, $a \in \mathbb{R}$ (z definice)

(c) $u_\tau(t)$, tzv. Heavisidova neboli skoková funkce, (z definice)

(d) $\sin bt$, $b \in \mathbb{R}$ (zapište sinus pomocí komplexní exponenciály a užijte předchozí příklad)

(e) $\sin^3 t$ (dvakrát zderivujte)

(f) $\frac{\sin t}{t}$ (integrujte od x do ∞)

(g) t^n, $n \in \mathbb{N}$ (integrujte od 0 do t)