1a

1. $f(t) = 2 + 3t\mathrm{e}^{-2t} - 4t^2\mathrm{e}^{-3t}$

$F(p) = \frac{2}{p} + \frac{3}{(p+2)^2} - \frac{4.2}{(p+3)^3}$

Použijeme linearitu, vztah $\mathrm{e}^{at}f(t) \triangleq F(p-a)$, $a=-2$, $a=-3$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $t \triangleq \frac{1}{p^2}$, $t^2 \triangleq \frac{2}{p^3}$.

b

2. $f(t) = 3\sin 2t - 5\cos 2t$

$F(p) = \frac{3.2}{p^2+4} - \frac{5p}{p^2+4} = \frac{6-5p}{p^2+4}$

Použijeme linearitu a vzorce $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$, $\cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4}$.

3. $f(t) = 3t - \sin 2t$

$F(p) = \frac{3}{p^2} - \frac{2}{p^2+4}$

Použijeme linearitu transformace a vzorce $t \triangleq \frac{1}{p^2}$, $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$.

c

4. $f(t) = t^2 - 1 + 3\mathrm{e}^{-t} + \cos 2t$

$F(p) = \frac{2}{p^3} - \frac{1}{p} + \frac{3}{p+1} + \frac{p}{p^2+4}$

Použijeme linearitu a vzorce $t^n \triangleq \frac{n!}{p^{n+1}}$, $\mathrm{e}^{-2t} \triangleq \frac{1}{p+2}$, $\cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4}$.

5. $f(t) = 4\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{-3t} + \sin 2t$

$F(p) = \frac{4}{p-1} + \frac{2}{p+3} + \frac{2}{p^2+4}$

Použijeme linearitu, vztah $\mathrm{e}^{at}f(t) \triangleq F(p-a)$, $a=1$, $a=-3$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$.

6. $f(t) = (2t+5)\mathrm{e}^{-2t} + 3\cos t - 2\sin 3t$

$F(p) = \frac{2}{(p+2)^2} + \frac{5}{p+2} + \frac{3p}{p^2+1} - \frac{6}{p^2+9}$

Použijeme linearitu, vztah $\mathrm{e}^{-2t}f(t) \triangleq F(p+2)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $t \triangleq \frac{1}{p^2}$, $\cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}$, $\sin 3t \triangleq \frac{3}{p^2+9}$.

d

7. $f(t) = t(\sin 2t + 4\cos 2t)$

$F(p) = -\left(\frac{2}{p^2+4} + \frac{4p}{p^2+4}\right)' = \frac{4p^2+4p-16}{(p^2+4)^2}$

Použijeme linearitu, vztah $tf(t) \triangleq -F'(p)$ a vzorce $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$, $\cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4}$.

e

8. $f(t) = (t+2)\cos 3t$

$F(p) = -\left(\frac{p}{p^2+9}\right)' + \frac{2p}{p^2+9} = \frac{p^2-9}{(p^2+9)^2} + \frac{2p}{p^2+9} = \frac{2p^3+p^2+18p-9}{(p^2+9)^2}$

Použijeme linearitu, vztah $tf(t) \triangleq -F'(p)$ a vzorec $\cos 3t \triangleq \frac{p}{p^2+9}$.

9. $f(t) = (3t^2 + 2t - 1)\mathrm{e}^{-t} + (t+1)\sin 2t$

$F(p) = \frac{6}{(p+1)^3} + \frac{2}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} - \left(\frac{2}{p^2+4}\right)' + \frac{2}{p^2+4} = \frac{6}{(p+1)^3} + \frac{2}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} + \frac{4p}{(p^2+4)^2} + \frac{2}{p^2+4}$

Použijeme linearitu, vztahy $\mathrm{e}^{-t}f(t) \triangleq F(p+1)$, $tf(t) \triangleq -F'(p)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $t \triangleq \frac{1}{p^2}$, $t^2 \triangleq \frac{2}{p^3}$, $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$.

10. $f(t) = t\mathrm{e}^{-3t} + (t-5)\cos 3t$

$F(p) = \frac{1}{(p+3)^2} - \left(\frac{p}{p^2+9}\right)' - \frac{5p}{p^2+9} = \frac{1}{(p+3)^2} + \frac{p^2-9}{(p^2+9)^2} - \frac{5p}{p^2+9}$

Použijeme linearitu, vztahy $\mathrm{e}^{-3t}f(t) \triangleq F(p+3)$, $tf(t) \triangleq -F'(p)$ a vzorce $t \triangleq \frac{1}{p^2}$, $\cos 3t \triangleq \frac{p}{p^2+9}$.

f

11. $f(t) = 3\sin 3t\cos t$

Je $f(t) = \frac{3}{2}(\sin 4t + \sin 2t)$, tedy

$F(p) = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{p^2+16} + \frac{2}{p^2+4}\right) = \frac{6}{p^2+16} + \frac{3}{p^2+4}$

Použijeme linearitu a vzorce $\sin 4t \triangleq \frac{4}{p^2+16}$, $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$.

12. $f(t) = 2\mathrm{e}^{-3t}\cos 5t$

$F(p) = \frac{2(p+3)}{(p+3)^2+25} = \frac{2p+6}{p^2+6p+34}$

Použijeme vztah $\mathrm{e}^{-3t}f(t) \triangleq F(p+3)$ a vzorec $\cos 5t \triangleq \frac{p}{p^2+25}$.

g

13. $f(t) = \mathrm{e}^{-2t}(3\cos 3t - 4\sin 3t)$

$F(p) = \frac{3(p+2)}{(p+2)^2+9} - \frac{4.3}{(p+2)^2+9} = \frac{3p-6}{p^2+4p+13}$

Použijeme linearitu, vztah $\mathrm{e}^{-2t}f(t) \triangleq F(p+2)$ a vzorce $\cos 3t \triangleq \frac{p}{p^2+9}$, $\sin 3t \triangleq \frac{3}{p^2+9}$.

14. $f(t) = t\mathrm{e}^{-3t} - 2\mathrm{e}^{-2t}\sin 3t + 4$

$F(p) = \frac{1}{(p+3)^2} - \frac{6}{(p+2)^2+9} + \frac{4}{p}$.

Použijeme linearitu, vzorce $t \triangleq \frac{1}{p^2}$, $\sin 3t \triangleq \frac{3}{p^2+9}$, $1 \triangleq \frac{1}{p}$ a vztah $f(t)\mathrm{e}^{-at} \triangleq F(p-a)$, $a=-2$, $a=-3$.

h

15. $f(t) = t\sin 4t + (3t\mathrm{e}^{-2t})'$

$F(p) = -(\frac{4}{p^2+16})' + p\frac{3}{(p+2)^2} - \lim\limits_{t\to 0+}(3t\mathrm{e}^{-2t}) = \frac{8p}{(p^2+16)^2} + \frac{3p}{(p+2)^2}$

Použijeme linearitu, vztahy $tf(t) \triangleq -F'(p)$, $f'(t) \triangleq (pF(p) - f(0+))$ a vzorce $\sin 4t \triangleq \frac{4}{p^2+16}$, $t\mathrm{e}^{-2t} \triangleq \frac{1}{(p+2)^2}$.

16. $f(t) = e^{-3t}(1 - 2\sin 3t) + \int_0^t \mathrm{e}^{3u}\cos 3u\,\mathrm{d}u$

$F(p) = \frac{1}{p+3} - \frac{6}{(p+3)^2+9} + \frac{1}{p}\frac{p-3}{(p-3)^2+9}$

Použijeme linearitu, vztahy $f(t)\mathrm{e}^{at} \triangleq F(p-a)$, $a=3$, $a=-3$ a $\int_0^t f(u)\mathrm{d}u \triangleq \frac{1}{p}F(p)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $\sin 3t \triangleq \frac{3}{p^2+9}$, $\cos 3t \triangleq \frac{p}{p^2+9}$.

17. $f(t) = t\sinh 2t - 2\cos^2 3t + 5$

Je $f(t) = t\sinh 2t - 1 - \cos 6t + 5$, tedy $F(p) = -\left(\frac{2}{p^2-4}\right)' + \frac{-1+5}{p} - \frac{p}{p^2+36} = \frac{4p}{(p^2-4)^2} + \frac{4}{p} - \frac{p}{p^2+36}$.

Použijeme linearitu, vztah $tf(t) \triangleq -F'(p)$ a vzorce $\sinh 2t \triangleq \frac{2}{p^2-4}$, $1 \triangleq \frac{1}{p}$ a $\cos 3t \triangleq \frac{p}{p^2+9}$.

18. $f(t) = 4t\sin t\cos t + (2\mathrm{e}^{2t}\cosh^2 t - 4)'$

Je $2\sin t\cos t = \sin 2t$ a $2\cosh^2 t = 1 + \cosh 2t$, tudíž

$f(t) = 2t\sin 2t + (\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{2t}\cosh 2t - 4)'$.

Odtud plyne $F(p) = -2\left(\frac{2}{p^2+4}\right)' + p(\frac{1}{p-2} + \frac{2(p-2)}{(p-2)^2-4} - \frac{4}{p}) - \lim\limits_{t\to 0+}(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{2t}\cosh 2t - 4) =$

$\frac{8p}{(p^2+4)^2} + \frac{p}{p-2} + \frac{2(p-2)}{p-4} - 2.$

Použijeme linearitu, vztahy $tf(t) \triangleq -F'(p)$, $f'(t) \triangleq pF(p) - f(0+)$, $e^{2t}f(t) \triangleq F(p-2)$ a vzorce $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$, $\cosh 2t \triangleq \frac{p}{p^2-4}$, $1 \triangleq \frac{1}{p}$.

11

19. $f(t) = e^{-3t}\cos(2t + \frac{\pi}{2}) + \sin 3(t-\pi)$

Je $\cos(2t + \frac{\pi}{2}) = \cos 2t \cos\frac{\pi}{2} - \sin 2t \sin\frac{\pi}{2} = -\sin 2t$

a $\sin 3(t-\pi) = \sin 3t \cos 3\pi + \cos 3t \sin 3\pi = -\sin 3t$.

Je $f(t) = -e^{-3t}\sin 2t - \sin 3t$ tedy $F(p) = \frac{-2}{(p+3)^2+4} - \frac{3}{p^2+9}$.

Použijeme linearitu, vztah $e^{-3t}f(t) \triangleq F(p+3)$ a vzorce

$\sin\omega t \triangleq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\omega = 3$, $\omega = 2$.

j

20. $f(t) = 5.2^{-t} - 4t3^t$

Je $f(t) = 5e^{-t\ln 2} - 4te^{t\ln 3}$, tudíž $F(p) = \frac{5}{p+\ln 2} - \frac{4}{(p-\ln 3)^2}$.

Použijeme linearitu, vztah $e^{at}f(t) \triangleq F(p-a)$, $a = -\ln 2$, $a = \ln 3$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $t \triangleq \frac{1}{p^2}$.

21. $f(t) = \int_0^t (2 + 4e^u \sinh 3u)\mathrm{d}u - (3^t - t\sinh 5t)'$

Je $F(p) = \frac{1}{p}\left(\frac{2}{p} + \frac{4.3}{(p-1)^2-9}\right) - p\left[\frac{1}{p-\ln 3} + \left(\frac{5}{p^2-25}\right)'\right] - \lim\limits_{t\to 0+}(3^t - t\sinh 5t) =$

$\frac{2}{p^2} + \frac{12}{p(p^2-2p-8)} - \frac{p}{p-\ln 3} - \frac{10p^2}{(p^2-25)^2} - 1.$

Použijeme linearitu, vztahy $\int_0^t f(u)\mathrm{d}u \triangleq \frac{1}{p}F(p)$, $e^{at}f(t) \triangleq F(p-a)$, $a = 1$, $a = \ln 3$, $f'(t) \triangleq pF(p) - f(0+)$, $tf(t) \triangleq -F'(p)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $\sinh\omega t \triangleq \frac{\omega}{p^2-\omega^2}$, $\omega = 3$, $\omega = 5$.

22. $f(t) = 6\sin t \sinh 3t - 4t^3 - 2\cos t \cosh t$

Je $f(t) = 3\sin t(e^{3t} - e^{-3t}) - 4t^3 - \cos t(e^t + e^{-t})$, tedy

$F(p) = \frac{3}{(p-3)^2+1} + \frac{3}{(p+3)^2+1} - 4\frac{3!}{p^4} - \frac{p-1}{(p-1)^2+1} - \frac{p+1}{(p+1)^2+1} =$

$\frac{3}{p^2-6p+10} + \frac{3}{p^2+6p+10} - \frac{24}{p^4} - \frac{p-1}{p^2-2p+2} - \frac{p+1}{p^2+2p+2}.$

Použijeme linearitu, vztah $e^{at}f(t) \triangleq F(p-a)$, $a = 3$, $a = -3$, $a - 1$, $a = -1$ a vzorce $t^3 \triangleq \frac{3!}{p^4}$, $\sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1}$, $\cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}$.

23. $f(t) = (e^t\sinh t + t^3e^{2t} - 6)' + 3\int_0^t (u^4 - u\cos 2u)\,\mathrm{d}u$

Je $F(p) = p\left[\frac{1}{(p-1)^2-1} + \frac{3!}{(p-2)^4} - \frac{6}{p}\right] - \lim\limits_{t\to 0+}(e^t\sinh t + t^3e^{2t} - 6) + \frac{3}{p}\left[\frac{4!}{p^5} + \left(\frac{p}{p^2+4}\right)'\right] =$

$\frac{p}{p^2-2p} + \frac{6p}{(p-2)^4} - 6 + 6 + \frac{72}{p^6} + \frac{3}{p}\frac{p^2+4-2p^2}{p^2+4} = \frac{1}{p-2} + \frac{6p}{(p-2)^4} + \frac{72}{p^6} + \frac{3(4-p^2)}{p(p^2+4)}.$

Použijeme linearitu, vztahy $f'(t) \triangleq (pF(p) - f(0+))$, $\int_0^t f(u)\mathrm{d}u \triangleq \frac{1}{p}F(p)$, $tf(t) \triangleq -F'(p)$, $e^{at}f(t) \triangleq F(p-a)$, $a = 1$, $a = 2$ a vzorce $t^3 \triangleq \frac{6}{p^4}$, $t^4 \triangleq \frac{4!}{p^5}$, $\sinh t \triangleq \frac{1}{p^2-1}$, $\cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4}$.

24. $f(t) = 3 - 4\int_0^t \sinh(t-u)\cos u\,\mathrm{d}u$

$F(p) = \frac{3}{p} - 4\left(\frac{1}{p^2-1}\frac{p}{p^2+1}\right) = \frac{3}{p} - \frac{4p}{(p^2-1)(p^2+1)}$

Použijeme linearitu, větu o obrazu konvoluce $(f * g)(t) \triangleq F(p)G(p)$ a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $\sinh t \triangleq \frac{1}{p^2-1}$, $\cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}$.

25. $f(t) = \int_0^t e^{u-t}(t-u)\sin 3u\,\mathrm{d}u$

Je $f(t) = \int_0^t e^{-(t-u)}(t-u)\sin 3u\,\mathrm{d}u = te^{-t} * \sin 3t$ a tedy

$F(p) = \frac{1}{(p+1)^2}\frac{3}{p^2+9}$,

když použijeme vztah pro obraz konvoluce na funkce te^{-t} a $\sin 3t$ a vzorce $te^{-t} \triangleq \frac{1}{(p+1)^2}$, $\sin 3t \triangleq \frac{3}{p^2+9}$.

Neřešené úlohy na přímou Laplaceovu transformaci.

K dané funkci $f(t)$ nalezněte obraz $F(p)$.

	$f(t)$	$F(p)$
1.	$f(t) = 3t^2 - 5t + 1$	$[F(p) = \frac{6}{p^3} - \frac{5}{p^2} + \frac{1}{p}]$
2.	$f(t) = 2e^t - 3e^{-2t} + 5e^{-t}$	$[F(p) = \frac{2}{p-1} - \frac{3}{p+2} + \frac{5}{p+1}]$
3.	$f(t) = te^{-2t} + t^2e^{-3t}$	$[F(p) = \frac{1}{(p+2)^2} + \frac{2}{(p+3)^3}]$
4.	$f(t) = 6te^{-2t} + 2e^{-t} + t^3e^{-4t}$	$[F(p) = \frac{6}{(p+2)^2} + \frac{2}{(p+1)} + \frac{6}{(p+4)^4}]$
5.	$f(t) = 2\sin t - 3\cos t$	$[F(p) = \frac{2-3p}{p^2+1}]$
6.	$f(t) = 3\sin 2t + 4\cos 2t$	$[F(p) = \frac{6+4p}{p^2+4}]$
7.	$f(t) = 8t^2e^{-2t} + 3\sin t$	$[F(p) = \frac{16}{(p+2)^3} + \frac{3}{p^2+1}]$
8.	$f(t) = t\sin 2t$	$[F(p) = \frac{4p}{(p^2+4)^2}]$
9.	$f(t) = t\cos 5t$	$[F(p) = \frac{p^2-25}{(p^2+25)^2}]$
10.	$f(t) = e^{-3t}\sin 2t$	$[F(p) = \frac{2}{p^2+6p+13}]$
11.	$f(t) = e^{-2t}\cos 2t$	$[F(p) = \frac{p+2}{p^2+4p+8}]$
12.	$f(t) = (3t-1)e^{-2t}$	$[F(p) = \frac{1-p}{(p+2)^2}]$
13.	$f(t) = (3+2t)\cos t$	$[F(p) = \frac{3p^3+2p^2+3p-2}{(p^2+1)^2}]$
14.	$f(t) = (1-t)\sin 5t$	$[F(p) = \frac{5p^2-10p+125}{(p^2+25)^2}]$
15.	$f(t) = te^{3t}\sin 2t$	$[F(p) = \frac{4(p-3)}{(p^2-6p+13)^2}]$
16.	$f(t) = (2t-3)e^{-2t}\cos 4t$	$[F(p) = \frac{-3p^3-16p^2-76p-144}{(p^2+4p+20)^2}]$
17.	$f(t) = (1-2t)e^{3t}\sin t$	$[F(p) = \frac{p^2-10p+22}{(p^2-6p+10)^2}]$
18.	$f(t) = t^2\sin 2t$	$[F(p) = \frac{12p^2-16}{(p^2+4)^3}]$
19.	$f(t) = t^2\cos 3t$	$[F(p) = \frac{2p^3-54p}{(p^2+9)^3}]$
20.	$f(t) = 4\sin^2 3t + te^{3t}\cos 2t$	$[F(p) = \frac{72}{p(p^2+36)} + \frac{p^2-6p+5}{(p^2-6p+13)^2}]$
21.	$f(t) = \sin 3t\cosh 2t - \cos 3t\sinh 2t$	$[F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{5-p}{p^2-4p+13} + \frac{5+p}{p^2+4p+13}\right)]$
22.	$f(t) = 2 + e^{-3t}\cos t\cos 3t$	$[F(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{2}\left(\frac{p+3}{p^2+6p+25} + \frac{p+3}{p^2+6p+13}\right)]$
23.	$f(t) = (e^{-t}\sinh t + t^4e^{2t} - 2\cosh 3t)'$	$[F(p) = p\left(\frac{1}{p^2+2p} + \frac{24}{(p-2)^5} - \frac{2p}{p^2-9}\right) + 2]$
24.	$f(t) = (3^t - 2\sin t\sinh 2t + 4)'$	$[F(p) = p\left(\frac{1}{p-\ln 3} - \frac{1}{p^2-4p+5} + \frac{4}{p} + \frac{1}{p^2+4p+5}\right) - 7]$
25.	$f(t) = \int_0^t (4 - 6u\cos^2 3u + 8\sin 2u\cos 2u)\mathrm{d}u$	$[F(p) = \frac{1}{p}\left(\frac{4}{p} - \frac{3}{p^2} + \frac{3(36-p^2)}{(p^2+36)^2} + \frac{16}{p^2+16}\right)]$
26.	$f(t) = 4e^{-t} + 3e^{-3t} + 5\sin 2t$	$[F(p) = \frac{4}{p+1} + \frac{2}{p+3} + \frac{10}{p^2+4}]$
27.	$f(t) = (1+3t)e^{-2t} + 4\cos 2t - 2\sin 2t$	$[F(p) = \frac{3}{(p+2)^2} + \frac{1}{p+2} + \frac{4p}{p^2+4} - \frac{4}{p^2+4}]$
28.	$f(t) = \sin 2t\sin 3t$	$[F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+25}\right)]$
29.	$f(t) = ta^t,\ a > 0$	$[F(p) = \frac{1}{(p-\ln a)^2},\ a^t = e^{t\ln a}]$
30.	$f(t) = 3\cos^2 2t$	$[F(p) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+16}\right)]$

tudíž

$f(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}, \ t \geq 0.$

Použijeme linearitu zpětné transformace, vztah $F(p+2) \triangleq e^{-2t}f(t)$ a vzorce $\frac{1}{p} \triangleq 1$, $\frac{1}{p^2} \triangleq t$.

Úlohu můžeme řešit také jinak, jestliže použijeme vztah $\frac{1}{p}F(p) \triangleq \int_0^t f(u)\mathrm{d}u$.

Je $\frac{1}{(p+2)^2} \triangleq te^{-2t}$ a tedy

$\frac{1}{p}\frac{1}{(p+2)^2} \triangleq \int_0^t ue^{-2u}\mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{2}ue^{-2u} - \frac{1}{4}e^{-2u}\right]_0^t = -\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}, \ t \geq 0.$

10. $F(p) = \frac{p^2}{(p-2)^3}$

Danou funkci nejprve vyjádříme jako součet parciálních zlomků. Zde můžeme rozklad získat jednoduchou úpravou. Je

$\frac{p^2}{(p-2)^3} = \frac{(p^2-4p+4)+4p-4}{(p-2)^3} = \frac{(p-2)^2+4(p-2)+4}{(p-2)^3} = \frac{1}{p-2} + \frac{4}{(p-2)^2} + \frac{4}{(p-2)^3},$

tudíž

$f(t) = e^{2t}(1+4t+2t^2), \ t \geq 0.$

Použijeme linearitu zpětné transformace, vztah $F(p-2) \triangleq e^{2t}f(t)$ a vzorce $\frac{1}{p} \triangleq 1$, $\frac{1}{p^2} \triangleq t$, $\frac{2}{p^3} \triangleq t^2$.

11. $F(p) = \frac{p-5}{p^2+2p+10}$

Polynom ve jmenovateli nemá reálné kořeny a proto danou funkci upravíme takto:

$\frac{p-5}{p^2+2p+10} = \frac{p-5}{(p^2+2p+1)+9} = \frac{(p+1)-6}{(p+1)^2+9} = \frac{p+1}{(p+1)^2+9} - 2\frac{3}{(p+1)^2+9}.$

Je pak

$f(t) = e^{-t}(\cos 3t - 2\sin 3t), \ t \geq 0,$

jestliže použijeme vztah $F(p+1) \triangleq e^{-t}f(t)$ a vzorce $\frac{p}{p^2+9} \triangleq \cos 3t$, $\frac{3}{p^2+9} \triangleq \sin 3t$.

12. $F(p) = \frac{p+3}{p(p^2+1)} + \frac{1}{(p-2)^3}$

První ze dvou zlomků rozdělíme na součet a získáme:

$\frac{p+3}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p}\frac{3}{p^2+1} + \frac{1}{(p-2)^3}.$

Odtud plyne, že

$f(t) = \sin t + 3\int_0^t \sin u\mathrm{d}u + \frac{1}{2}t^2e^{2t} = \sin t + 3 - 3\cos t + \frac{1}{2}t^2e^{2t}, \ t \geq 0.$

Použijeme linearitu transformace a vzorce $\frac{1}{p^2+1} \triangleq \sin t$, $\frac{1}{(p-2)^3} \triangleq \frac{1}{2}t^2e^{2t}$.

Neřešené úlohy na zpětnou Laplaceovu transformaci.

Určete předmět $f(t)$ k racionální funkci $F(p)$.

1. $F(p) = \frac{p^2+1}{p^3+3p^2+2p}$ $[f(t) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}e^{-2t} - 2e^{-t}, \ t \geq 0]$
2. $F(p) = \frac{1}{p(p+3)^2}$ $[f(t) = \frac{1}{9} - \frac{1}{3}te^{-3t} - \frac{1}{9}e^{-3t}, \ t \geq 0]$
3. $F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p+2)}$ $[f(t) = \frac{1}{3}te^t - \frac{1}{9}e^t + \frac{1}{9}e^{-2t}, \ t \geq 0]$
4. $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)}$ $[f(t) = t - \sin t, \ t \geq 0]$
5. $F(p) = \frac{1}{(p+1)^3}$ $[f(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t}, \ t \geq 0]$
6. $F(p) = \frac{1}{p^2+4p+5}$ $[f(t) = e^{-2t}\sin t, \ t \geq 0]$
7. $F(p) = \frac{4p-3}{p^2-2p+5}$ $[f(t) = e^t(4\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t), \ t \geq 0]$

8. $F(p) = \frac{2p+3}{p^2+4}$ $[f(t) = 2\cos 2t + \frac{3}{2}\sin 2t, \ t \geq 0]$
9. $F(p) = \frac{3p+4}{p^2+2p+10}$ $[f(t) = e^{-t}(3\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t), \ t \geq 0]$
10. $F(p) = \frac{3p-5}{p^2+2p+5}$ $[f(t) = e^{-t}(3\cos 2t - 4\sin 2t), \ t \geq 0]$
11. $F(p) = \frac{6p+3}{p^3+5p^2+9p+5}$ $[f(t) = -\frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}(\cos t + 5\sin t), \ t \geq 0]$
12. $F(p) = \frac{4p-3}{p^2(p+1)^2(p+2)}$ $[f(t) = -\frac{3}{2}t + \frac{23}{4} - 7te^{-t} - 3e^{-t} - \frac{11}{4}e^{-2t}, \ t \geq 0]$
13. $F(p) = \frac{2p+3}{(p^2+4)^2}$ $[f(t) = -\frac{3}{8}t\cos 2t + \frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{3}{16}\sin 2t, \ t \geq 0]$
14. $F(p) = \frac{2p^2-4p+5}{p^3+7p^2+9p+8}$ $[f(t) = \frac{11}{3}e^{-t} - \frac{21}{2}e^{-2t} + \frac{43}{6}e^{-4t}, \ t \geq 0]$
15. $F(p) = \frac{4p+5}{p^2+6p+13}$ $[f(t) = e^{-3t}(4\cos 2t - \frac{7}{2}\sin 2t, \ t \geq 0]$
16. $F(p) = \frac{3p^2-6p+2}{(p+1)^3(p+3)}$ $[f(t) = \frac{11}{2}t^2e^{-t} - \frac{35}{4}te^{-t} + \frac{47}{8}e^{-t} - \frac{47}{8}e^{-3t}, \ t \geq 0]$
17. $F(p) = \frac{2p^2-3p+5}{p(p+1)(p+3)}$ $[f(t) = \frac{5}{3} - 5e^{-t} + \frac{16}{3}e^{-3t}, \ t \geq 0]$
18. $F(p) = \frac{4p+6}{p^3+7p^2+10p}$ $[f(t) = \frac{3}{5} + \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{14}{15}e^{-5t}, \ t \geq 0]$
19. $F(p) = \frac{5p-2}{p^2+4p+5}$ $[f(t) = e^{-2t}(5\cos t - 12\sin t), \ t \geq 0]$
20. $F(p) = \frac{2p+3}{(p+1)^3}$ $[f(t) = (\frac{1}{2}t^2 + 2t)e^{-t}, \ t \geq 0]$
21. $F(p) = \frac{p+3}{p^2(p^2+1)}$ $[f(t) = 3t + 1 - \cos t - 3\sin t, \ t \geq 0]$
22. $F(p) = \frac{5p^2+10}{p(p^2-2p+5)}$ $[f(t) = 2 + e^t(3\cos 2t + \frac{7}{2}\sin 2t), \ t \geq 0]$
23. $F(p) = \frac{p^2+p-4}{(p+4)^2}$ $[f(t) = \frac{1}{2}t\sin 2t + t\cos 2t, \ t \geq 0]$
24. $F(p) = \frac{1}{p^2+4p+3}$ $[f(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}, \ t \geq 0]$

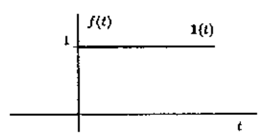
3. Laplaceova transformace impulsu.

Při hledání obrazu funkce $f(t)$, která je definována na omezeném intervalu nebo je dána několika vzorci na různých intervalech ze svého definičního oboru používáme při výpočtu přímo vzorec pro obraz a nebo používáme tvrzení o obrazu posunuté funkce. Toto tvrzení se nazývá *věta o translaci*.

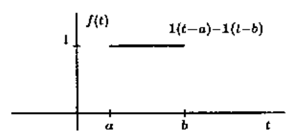
Označíme symbolem $\mathbf{1}(t)$ funkci jednotkový skok, která je definována předpisem

$$\mathbf{1}(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 0, & \text{pro } t < 0, \\ 1, & \text{pro } t \geq 0 \end{array} \right.$$

a jejíž průběh je znázorněn na obrázku 1.



Obr.1. Jednotkový skok



Obr. 2. Impuls

Věta o translaci. Je-li $f(t) \triangleq F(p)$, pak $f(t-a)\mathbf{1}(t-a) \triangleq e^{-ap}F(p)$ pro $a > 0$.

Ukážeme na příkladech výpočet obrazu funkcí popsaného typu. Připomeňme, že stále předpokládáme, že uvažované předměty jsou definovány pouze pro nezápornou hodnotu argumentu.

Řešené příklady na obraz impulsu.

2a

1. $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 1, & 0 \le t \le 2, \\ 0, & t > 2. \end{array} \right.$

Podle definice je

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^2 1.\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \left[-\tfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}\right]_0^2 = \tfrac{1}{p}(1 - \mathrm{e}^{-2p}).$$

Pomocí věty o translaci a známých vzorců můžeme tento obraz nalézt pomocí následujícího postupu.

Je $f(t) = 2.[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-2)] \triangleq \frac{2}{p}(1 - \mathrm{e}^{-2p})$,

když použijeme vzorec $1 \triangleq \frac{1}{p}$ a vztah $f(t-2)\mathbf{1}(t-2) \triangleq F(p)\mathrm{e}^{-2p}$.

b

2. $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} t, & 0 \le t \le 3, \\ 0, & t > 3. \end{array} \right.$

Podle definice je

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \int_0^3 t\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \left[-t\tfrac{\mathrm{e}^{-pt}}{p} - \tfrac{\mathrm{e}^{-pt}}{p^2}\right]_0^3 =$$
$$\tfrac{1}{p^2} - \tfrac{3}{p}\mathrm{e}^{-3p} - \tfrac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-3p},$$

když použijeme integraci per-partes.

Pomocí věty o translaci a vzorce pro obraz $t \triangleq \frac{1}{p^2}$ můžeme počítat takto.

Je

$$f(t) = t[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-3)] = t\mathbf{1}(t) - [(t-3)+3]\mathbf{1}(t-3) = t\mathbf{1}(t) - (t-3)\mathbf{1}(t-3) - 3\mathbf{1}(t-3).$$

Odtud plyne, že

$F(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-3p} - \frac{3}{p}\mathrm{e}^{-3p}$,

když použijeme vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $t \triangleq \frac{1}{p^2}$ a vztah $f(t-3)\mathbf{1}(t-3) \triangleq F(p)\mathrm{e}^{-3p}$.

V dalších úlohách budeme hledat obraz impulsu pomocí věty o translaci. Přímý výpočet z definice využívá integračních metod, které byly probírany v předchozím kursu matematiky.

c

3. $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 0, & 0 \le t \le 1, \\ \mathrm{e}^{-t}, & 1 < t \le 2, \\ 0, & t > 2. \end{array} \right.$

Je

$$f(t) = \mathrm{e}^{-t}[\mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t-2)] = \mathrm{e}^{-(t-1)-1}\mathbf{1}(t-1) - \mathrm{e}^{-(t-2)-2}\mathbf{1}(t-2) =$$
$$\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-(t-1)}\mathbf{1}(t-1) - \mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{-(t-2)}\mathbf{1}(t-2).$$

Podle věty o translaci je

$F(p) = (\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-p} - \mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{-2p})\frac{1}{p+1}$,

když použijeme vzorec $e^{-t} \triangleq \frac{1}{p+1}$.

d

4. $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} \cos t, & 0 \le t \le \frac{\pi}{2}, \\ 1, & t > \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$

Je

$f(t) = \cos t[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2})] + \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2})$.

Nejprve upravíme výraz

$\cos t\mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2}) = \cos[(t - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}]\mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2}) =$

$\mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2})\left(\cos(t - \frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2}) - \sin(t - \frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{2})\right) = -\sin(t - \frac{\pi}{2})\mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2})$.

Pro funkci $f(t)$ máme celkové vyjádření

$f(t) = \cos t\mathbf{1}(t) + \sin(t - \frac{\pi}{2})\mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2}) + \mathbf{1}(t - \frac{\pi}{2})$.

Použijeme větu o translaci a dostaneme obraz

$F(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1}\mathrm{e}^{-p\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-p\frac{\pi}{2}}$.

Při výpočtu jsme použili vzorce $\cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}$, $\sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1}$, $1 \triangleq \frac{1}{p}$.

5. $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 0, & 0 \le t \le \pi, \\ -\sin t, & \pi < t \le 2\pi, \\ 0, & t > 2\pi. \end{array} \right.$

Je

$$f(t) = -\sin t[\mathbf{1}(t-\pi) - \mathbf{1}(t-2\pi)] = -\sin[(t-\pi)+\pi]\mathbf{1}(t-\pi) +$$
$$\sin[(t-2\pi)+2\pi]\mathbf{1}(t-2\pi)] = \sin(t-\pi)\mathbf{1}(t-\pi) + \sin(t-2\pi)\mathbf{1}(t-2\pi).$$

Odtud plyne, že

$F(p) = \frac{1}{p^2+1}(\mathrm{e}^{-p\pi} + \mathrm{e}^{-2p\pi})$,

když použijeme větu o translaci a vzorec $\sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1}$.

e

6. $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 1, & 0 \le t \le \frac{\pi}{4}, \\ \sin 2t, & \frac{\pi}{4} < t \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & t > \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$

Je

$$f(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \tfrac{\pi}{4}) + \sin 2t[\mathbf{1}(t - \tfrac{\pi}{4}) - \mathbf{1}(t - \tfrac{\pi}{2})] =$$
$$\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \tfrac{\pi}{4}) + \sin 2[(t - \tfrac{\pi}{4}) + \tfrac{\pi}{4}]\mathbf{1}(t - \tfrac{\pi}{4}) - \sin 2[(t - \tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{\pi}{2}]\mathbf{1}(t - \tfrac{\pi}{2}) =$$
$$\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \tfrac{\pi}{4}) + \cos 2(t - \tfrac{\pi}{4})\mathbf{1}(t - \tfrac{\pi}{4}) + \sin 2(t - \tfrac{\pi}{2})\mathbf{1}(t - \tfrac{\pi}{2}).$$

Odtud plyne, že obraz

$F(p) = \frac{1}{p}(1 - \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}) + \frac{p}{p^2+4}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{2}{p^2+4}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.

Použijeme větu o translaci a vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $\cos 2t \triangleq \frac{p}{p^2+4}$, $\sin 2t \triangleq \frac{2}{p^2+4}$.

f

7. $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} t, & 0 \le t \le 1, \\ 2-t, & 1 < t \le 2, \\ 0, & t > 2. \end{array} \right.$

Je $f(t) = t[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)] + (2-t)[\mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t-2)] =$

$t\mathbf{1}(t) - [(t-1)+1]\mathbf{1}(t-1) - [(t-1)-1]\mathbf{1}(t-1) + (t-2)\mathbf{1}(t-2) =$

$t\mathbf{1}(t) - 2(t-1)\mathbf{1}(t-1) + (t-2)\mathbf{1}(t-2)$.

Odtud plyne, že obraz

$F(p) = \frac{1}{p^2}(1 - 2\mathrm{e}^{-p} + \mathrm{e}^{-2p})$,

jestliže použijeme větu o translaci a vzorec $t \triangleq \frac{1}{p^2}$.

8. $f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} \sin t, & 0 \le t \le \pi, \\ 0, & t > \pi. \end{array} \right.$

Je $f(t) = \sin t[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-\pi)] = \sin t\mathbf{1}(t) - \sin[(t-\pi)+\pi]\mathbf{1}(t-\pi) =$

$\sin t\mathbf{1}(t) + \sin(t-\pi)\mathbf{1}(t-\pi)$.

4. $F(p) = \frac{3p+2-6e^{-\pi p}}{p^2+4}$.

Jestliže použijeme vzorců $\frac{p}{p^2+4} \triangleq \cos 2t$, $\frac{2}{p^2+4} \triangleq \sin 2t$ dostaneme, že

$f(t) = [3\cos 2t + \sin 2t]\mathbf{1}(t) - 3\sin 2(t-\pi)\mathbf{1}(t-\pi)$.

Funkci $f(t)$ lze také zapsat

$$f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 3\cos 2t + \sin 2t, & 0 \le t \le \pi, \\ 3\cos 2t - 2\sin 2t, & t > \pi. \end{array} \right.$$

5. $F(p) = \frac{p-3e^{-p}+2pe^{-2p}}{p^2+3p+2}$.

Obdobně jako v odstavci 2 provedeme rozklad na parciální zlomky a dostaneme:

$\frac{p}{p^2+3p+2} = \frac{p}{(p+2)(p+1)} = \frac{2}{p+2} + \frac{-1}{p+1} \triangleq 2e^{-2t} - e^{-t}$

a

$\frac{1}{p^2+3p+2} = \frac{1}{(p+2)(p+1)} = \frac{-1}{p+2} + \frac{1}{p+1} \triangleq -e^{-2t} + e^{-t}$.

Odtud vyplývá, že

$f(t) = (2e^{-2t} - e^{-t})\mathbf{1}(t) + 3(e^{-2(t-1)} - e^{-(t-1)})\mathbf{1}(t-1) + (4e^{-2(t-2)} - 2e^{-(t-2)})\mathbf{1}(t-2)$.

Funkci $f(t)$ lze také zapsat vzorcem

$$f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 2e^{-2t} - e^{-t}, & 0 \le t \le 1, \\ (2+3e^2)e^{-2t} - (1+3e)e^{-t}, & 1 < t \le 2, \\ (2+3e^2+4e^4)e^{-2t} - (1+3e+2e^2)e^{-t}, & t > 2. \end{array} \right.$$

Neřešené úlohy na zpětnou transformaci funkcí s faktorem e^{-ap}.

Nalezněte předmět $f(t)$ k obrazu $F(p)$.

1. $F(p) = \frac{2}{p^2}e^{-p}$ $\qquad [f(t) = 2(t-1)\mathbf{1}(t-1),\ t \ge 0]$

$$\left[f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 0, & 0 \le t \le 1, \\ 2t-2, & t > 1. \end{array} \right. \right]$$

2. $F(p) = \frac{2}{p^2}(1 - e^{-p} - pe^{-3p})$ $\qquad [f(t) = 2t\mathbf{1}(t) - 2(t-1)\mathbf{1}(t-1) - 2\mathbf{1}(t-3),\ t \ge 0]$

$$\left[f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 2t, & 0 \le t \le 1, \\ 2, & 1 < t \le 3, \\ 0, & t > 3. \end{array} \right. \right]$$

3. $F(p) = \frac{1}{p+1}(e^{-p-1} - e^{-2p-2})$ $\qquad [f(t) = e^{-1}e^{-(t-1)}\mathbf{1}(t-1) - e^{-2}e^{-(t-2)}\mathbf{1}(t-2),\ t \ge 0]$

$$\left[f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 0, & 0 \le t \le 1, \\ e^{-t}, & 1 < t \le 2, \\ 0, & t > 2. \end{array} \right. \right]$$

4. $F(p) = \frac{1}{p^2+9}(3 - 3e^{-\frac{\pi}{2}p} - (3+p)e^{-\frac{\pi}{6}p})$

$[f(t) = \sin 3t\mathbf{1}(t) - (\sin 3(t-\frac{\pi}{6}) + \cos 3(t-\frac{\pi}{6}))\,\mathbf{1}(t-\frac{\pi}{6}) - \sin 3(t-\frac{\pi}{2})\mathbf{1}(t-\frac{\pi}{2}),\ t \ge 0]$

$$\left[f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} \sin 3t, & 0 \le t \le \frac{\pi}{6}, \\ \cos 3t, & \frac{\pi}{6} < t \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & t > \frac{\pi}{2}. \end{array} \right. \right]$$

5. $F(p) = \frac{1}{(p^2+p)(p^2+4)}(1 + e^{-\pi p})$ $\qquad [f(t) = (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t)\mathbf{1}(t) +$

$(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}e^{-t+\pi} - \frac{1}{20}\cos 2(t-\pi) - \frac{1}{10}\sin 2(t-\pi))\mathbf{1}(t-\pi),\ t \ge 0]$

$$\left[f(t) = \left\langle \begin{array}{ll} \frac{1}{4} - \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{1}{10}\sin 2t, & 0 \le t \le \pi, \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{5}e^{-t}(1+e^{\pi}) - \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t, & t > \pi. \end{array} \right. \right]$$

5. Obraz periodické funkce.

Pomocí věty o translaci snadno odvodíme obraz periodické funkce. K jeho určení potřebujeme vypočítat obraz impulsu, který danou periodickou funkci vytváří.

Je-li $f_T : R \to R$ funkce, která je nenulová pouze v intervalu $\langle 0, T)$, pak je její periodické prodloužení definováno vztahem

$$f(t + kT) = f_T(t),\ 0 \le t < T,$$

k je celé číslo.

Vztah lze přepsat ve tvaru

$$f(t) = f_T(t - kT),\ kT \le t < (k+1)T,$$

k je celé číslo.

Periodické pokračování funkce $f(t)$ můžeme zapsat jako součet posunutých impulsů f_T, kdy provádíme posun vždy o jednu periodu. Je tedy

$$f(t)\mathbf{1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_T(t-kT)\mathbf{1}(t-kT),\ t \ge 0.$$

Odtud dostaneme pomocí věty o translaci vyjádření obrazu

$$F(p) = \mathscr{L}\{f(t)\mathbf{1}(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} F_T(p)e^{-pkT} = \frac{F_T(p)}{1 - e^{-pT}},$$

kde $F_T(p) = \mathscr{L}\{f_T(t)\}$ je obraz impulsu $f_T(t)$. Použili jsme skutečnosti $e^{-pkT} = (e^{-pT})^k$ a toho, že součet geometrické řady s kvocientem e^{-pT} je roven $\frac{1}{1-e^{-pT}}$.

Obraz impulsu $F_T(t)$ počítáme buď podle definice ze vztahu

$$F_T(p) = \mathscr{L}\{f_T(t)\} = \int_0^T f(t)e^{-pt}\,dt,$$

nebo z vyjádření

$$f_T(t) = f(t)[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-T)],\ t \ge 0,$$

kde použijeme větu o translaci.

Řešené úlohy na obraz periodické funkce.

Určete obraz $F(p)$ periodické funkce $f(t)$, která je vytvořena impulsem $f_T(t)$, $0 \le t < T$ a má periodu T.

1. $f_T(t) = \left\langle \begin{array}{ll} 1, & 0 \le t \le 1, \\ -1, & 1 < t < 2. \end{array} \right.$

Je $f_T(t) = \mathbf{1}(t) - 2\mathbf{1}(t-1) + \mathbf{1}(t-2)$, $t \ge 0$. Odtud a z věty o translaci plyne

$$F_T(p) = \frac{1}{p}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}),$$

Odtud plyne, že

$F(p) = \frac{1}{p^2+1}(1 + e^{-p\pi})$,

jestliže použijeme větu o translaci a vzorec $\sin t \triangleq \frac{1}{p^2+1}$.

9 $f(t) = \begin{cases} 1-\cos t, & 0 \le t \le \pi, \\ 0, & t > \pi. \end{cases}$

Je $f(t) = (1-\cos t)[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-\pi)] =$

$\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-\pi) - \cos t\,\mathbf{1}(t) + \cos[(t-\pi)+\pi]\mathbf{1}(t-\pi) =$

$\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-\pi) - \cos t\,\mathbf{1}(t) - \cos(t-\pi)\mathbf{1}(t-\pi)$.

Odtud plyne, že

$F(p) = \frac{1}{p}(1 - e^{-p\pi}) - \frac{p}{p^2+1}(1 + e^{-p\pi})$,

jestliže použijeme větu o translaci a vzorec $\cos t \triangleq \frac{p}{p^2+1}$.

Neřešené úlohy na obraz impulsu.

Určete obraz $F(p)$ k danému impulsu $f(t)$.

1. $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & 2 < t. \end{cases}$ $[F(p) = \frac{2}{p}(1 - e^{-p})]$

2. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1, \\ 1, & 1 < t \le 3, \\ 0, & t > 3. \end{cases}$ $[F(p) = \frac{1}{p}(e^{-p} - e^{-3p})]$

3. $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \le t \le 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$ $[F(p) = \frac{1}{p+1}(1 - e^{-2(p+1)})]$

4. $f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le 1, \\ 2, & t > 1. \end{cases}$ $[F(p) = \frac{2}{p^2}(1 - e^{-p})]$

5. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$ $[F(p) = \frac{1}{p^2}(1 - e^{-p}) - \frac{1}{p}e^{-p}]$

6. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ -1, & 1 < t \le 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$ $[F(p) = \frac{1}{p}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p})]$

7. $f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le 1, \\ 3-t, & 1 < t \le 3, \\ 0, & t > 3. \end{cases}$ $[F(p) = \frac{1}{p^2}(2 - 3e^{-p} + e^{-3p})]$

8. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1, \\ 1, & 1 < t \le 2, \\ 3-t, & 2 < t \le 3, \\ 0, & t > 3. \end{cases}$ $[F(p) = \frac{1}{p^2}(1 - e^{-p} - e^{-2p} + e^{-3p})]$

9. $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$ $[F(p) = \frac{1}{p^2+1}(1 - pe^{-p\frac{\pi}{2}})]$

10. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1, \\ 2-t, & 1 < t \le 3, \\ t-4, & 3 < t \le 4, \\ 0, & t > 4. \end{cases}$ $[F(p) = \frac{1}{p^2}(1 - 2e^{-p} + 2e^{-3p} - e^{-4p})]$

4. Zpětná transformace obrazů impulsů.

Při hledání předmětu k funkcím, které obsahují výraz e^{-ap}, $a > 0$, používáme větu o translaci, kterou interpretujeme takto. Rozdělíme danou funkci na součet členů tvaru $F(p)e^{-ap}$, kde k funkci $F(p)$ známe předmět. Je-li $f(t) \triangleq F(p)$, pak hledaný předmět k funkci $F(p)e^{-ap}$ je funkce $f(t-a)\mathbf{1}(t-a)$, $t \ge 0$. Výraz e^{-ap} je pouze návěští, které nás upozorňuje na to, že v získaném předmětu provedeme posunutí. Ukážeme způsob výpočtu na příkladech.

Řešené úlohy na zpětnou transformaci funkcí s faktorem e^{-ap}.

Nalezněte předmět $f(t)$ k dané funkci $F(p)$.

1. $F(p) = \frac{1}{p^2}e^{-2p} + \frac{1}{p}e^{-3p}$

   Je $\frac{1}{p^2} \triangleq t$ a $\frac{1}{p} \triangleq 1$, tudíž pro předmět k funkci $F(p)$ dostaneme vyjádření

   $f(t) = (t-2)\mathbf{1}(t-2) + \mathbf{1}(t-3)$, $t \ge 0$.

   Funkci $f(t)$ lze také zapsat

   $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 2, \\ t-2, & 2 < t \le 3, \\ t-1, & t > 3. \end{cases}$

2. $F(p) = \frac{2}{p(p-1)}e^{-p}$

   Nejprve funkci $\frac{1}{p(p-1)}$ rozložíme na součet částečných zlomků. Dostaneme (viz odst. 2)

   $\frac{2}{p(p-1)} = \frac{-2}{p} + \frac{2}{p-1}$

   a tedy

   $f(t) = -2\mathbf{1}(t-1) + 2e^{t-1}\mathbf{1}(t-1)$, $t \ge 0$,

   jestliže použijeme vzorce $1 \triangleq \frac{1}{p}$, $e^t \triangleq \frac{1}{p-1}$ a větu o translaci $(a = 1)$.

   Funkci $f(t)$ lze také zapsat $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1, \\ 2(e^{t-1} - 1), & t > 1. \end{cases}$

3. $F(p) = \frac{2p - e^{-\pi p}}{p^2+2p+2}$

   Obdobně jako v odstavci 2 dostaneme:

   $\frac{2p}{p^2+2p+2} = \frac{2(p+1)}{(p+1)^2+1} - \frac{2}{(p+1)^2+1} \triangleq 2e^{-t}(\cos t - \sin t)$;

   $\frac{1}{p^2+2p+2} = \frac{1}{(p+1)^2+1} \triangleq e^{-t}\sin t$.

   Je tedy

   $f(t) = 2e^{-t}(\cos t - \sin t)\mathbf{1}(t) - e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)\mathbf{1}(t-\pi)$.

   Funkci $f(t)$ lze také zapsat

   $f(t) = \begin{cases} 2e^{-t}(\cos t - \sin t), & 0 \le t \le \pi, \\ e^{-t}(2\cos t - (2 - e^{\pi})\sin t) + \sin t, & t > \pi. \end{cases}$

tudíž

$$F(p)=\frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p(1-e^{-2p})}=\frac{(1-e^{-p})^2}{p(1+e^{-p})(1-e^{-p})}=\frac{1-e^{-p}}{p(1+e^{-p})}.$$

Použili jsme vzorce pro obraz periodické funkce, vztahu $\frac{1}{p}\triangleq 1$ a skutečnosti, že perioda dané funkce je $T=2$.

2. $f_T(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\le t\le\pi,\\ 0, & \pi<t<2\pi.\end{cases}$

Je $f(t)=\sin t[\mathbf{1}(t)-\mathbf{1}(t-\pi)]=\sin t\mathbf{1}(t)+\sin(t-\pi)\mathbf{1}(t-\pi)$, tedy

$$F_T(p)=\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1}e^{-\pi p}.$$

Vzhledem k tomu, že perioda funkce $f(t)$ je rovna $T=2\pi$, je

$$F(p)=\frac{1+e^{-\pi p}}{(p^2+1)(1-e^{-2\pi p})}=\frac{1}{(p^2+1)(1-e^{-\pi p})}.$$

Použili jsme vzorec pro obraz periodické funkce a vztahy $\sin t\triangleq\frac{1}{p^2+1}$.

3. $f_T(t)=\begin{cases}t, & 0\le t\le 1,\\ 2-t, & 1<t\le 2,\\ 0, & 2<t<3.\end{cases}$

Je $f_T(t)=t[\mathbf{1}(t)-\mathbf{1}(t-1)]+(2-t)[\mathbf{1}(t-1)-\mathbf{1}(t-2)]=$
$t\mathbf{1}(t)-[(t-1)+1]\mathbf{1}(t-1)+[1+(1-t)]\mathbf{1}(t-1)+(t-2)\mathbf{1}(t-2)=$
$t\mathbf{1}(t)-2(t-1)+1\mathbf{1}(t-1)+(t-2)\mathbf{1}(t-2)$.

Odtud dostaneme obraz $F_T(p)=\frac{1}{p^2}(1-2e^{-p}+e^{-2p})$ a tedy obraz funkce $f(t)$ je

$$F(p)=\frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2(1-e^{-3p})}.$$

Použili jsme vzorce pro obraz periodické funkce s periodou $T=3$ a vztah $1\triangleq\frac{1}{p}$.

Neřešené úlohy na obraz periodické funkce.

Určete obraz $F(p)$ periodické funkce $f(t)$, která je vytvořena impulsem $f_T(t)$ a má periodu T.

1. $f_T(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 1,\\ 0, & 1<t<2,\quad T=2.\end{cases}$ $\qquad [F(p)=\frac{1}{(1+e^{-p})}]$

2. $f_T(t)=\sin t,\quad 0\le t<\pi,\quad T=\pi$ $\qquad [F(p)=\frac{1+e^{-\pi p}}{(p^2+1)(1-e^{-\pi p})}]$

3. $f_T(t)=\begin{cases}t, & 0\le t\le 1,\\ 2-t, & 1<t\le 3,\\ t-4, & 3<t<4,\quad T=4.\end{cases}$ $\qquad [F(p)=\frac{1-2e^{-p}+2e^{-3p}-e^{-4p}}{p^2(1-e^{-4p})}]$

4. $f_T(t)=1-t,\quad 0\le t<1,\quad T=1.$ $\qquad [F(p)=\frac{1}{p(1-e^{-p})}-\frac{1}{p^2}]$