# 8a. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

## Teorie

**Definice 1.** Nechť $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ je funkce. Její *Laplaceovou transformací* rozumíme funkci

$$L(f)(x) := \int_0^\infty f(t)e^{-xt}\mathrm{d}t,$$

kde $x$ je reálné číslo. (Lze ji definovat i pro čísla komplexní, čehož budeme občas využívat.)

**Definice 2.** Skokovou (neboli Heavisidovu) funkci definujeme následovně:

$$u_a(t) = \begin{cases} 0; & t < a; \\ 1; & t > a, \end{cases}$$

v bodě $a$ dodefinujeme libovolně, zpravidla nulou.

## Hint

$$\sin 3t \cos t = \frac{1}{2}(\sin 4t + \sin 2t)$$

## Příklady

1. Spočtěte Laplaceovu transformaci

   (a) $2 + 3te^{-2t} - 4t^2e^{-3t}$

   (b) $3\sin 2t - 5\cos 2t$

   (c) $t^2 - 1 + 3e^{-t} + \cos 2t$

   (d) $t(\sin 2t + 4\cos 2t)$

   (e) $(t + 2)\cos 3t$

   (f) $3\sin 3t \cos t$

   (g) $e^{-2t}(3\cos 3t - 4\sin 3t)$

   (h) $t\sin 4t + (3te^{-2t})'$

   (i) $e^{-3t}\cos(2t + \frac{\pi}{2}) + \sin 3(t - \pi)$

   (j) $5 \cdot 2^{-t} - 4t3^t$

2. Spočtěte Laplaceovu transformaci

   (a)
   $$f(t) = \begin{cases} 1; & 0 \le t \le 2 \\ 0; & t > 2, \end{cases}$$

   (b)
   $$f(t) = \begin{cases} t; & 0 \le t \le 3 \\ 0; & t > 3, \end{cases}$$

   (c)
   $$f(t) = \begin{cases} 0; & 0 \le t \le 1 \\ e^{-t}; & 1 \le t \le 2 \\ ,0; & t > 2 \end{cases}$$

(d)

$$f(t) = \begin{cases} \cos t; & 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ 1; & t > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

(e)

$$f(t) = \begin{cases} 1; & 0 \le t \le \pi/4 \\ \sin 2t; & \pi/4 < t \le \frac{\pi}{2}, \\ 0; & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(f)

$$f(t) = \begin{cases} t; & 0 \le t \le 1 \\ 2 - t; & 1 < t \le 2, \\ 0; & t > 2 \end{cases}$$

(g)

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \cos t; & 0 \le t \le \pi \\ 0; & t > \pi. \end{cases}$$

3. Spočtěte Laplaceovu transformaci periodické funkce

(a)

$$f(t) = \begin{cases} 1; & 0 \le t \le 1 \\ -1; & 1 < t < 2. \end{cases}$$

(b)

$$f(t) = \begin{cases} \sin t; & 0 \le t \le \pi \\ 0; & \pi < t < 2\pi. \end{cases}$$

(c)

$$f(t) = \begin{cases} t; & 0 \le t \le 1 \\ 2 - t; & 1 < t \le 2 \\ 0; & 2 < t < 3. \end{cases}$$