Zůstaňme ještě chvíli u funkce f a křivky C z obrázku 5.2(b) a předpokládejme navíc, že f je holomorfní v celé komplexní rovině mimo bod 0. Pro rozvoj v nekonečnu tedy máme

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

zatímco pro rozvoj v bodě 0 platí

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n.$$

Díky jednoznačnosti Laurentova rozvoje dostáváme

$$b_n = a_{-n} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Speciálně je tedy

$$\operatorname{res}_0 f(z) + \operatorname{res}_\infty f(z) = b_{-1} - a_1 = a_1 - a_1 = 0.$$

Celkový součet reziduí v obou singularitách je tedy nula. To vysvětluje výhodnost záporného znaménka u koeficientu odpovídacího mocnině z^{-1} při definici rezidua v nekonečnu.

Příklad 6.7. (a) Vypočteme $\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{z^3}$. Laurentův rozvoj má tvar

$$\frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \cdots,$$

a tedy

$$\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{z^3} = a_{-1} = 0.$$

1e

(b) Vypočtěme $\operatorname{res}_\infty z^2 e^{\frac{1}{z}}$. Laurentův rozvoj v nekonečnu je (viz Příklad 5.3)

$$z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 + z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \cdot \frac{1}{z^n}.$$

Vidíme tedy, že

$$\operatorname{res}_\infty z^2 e^{\frac{1}{z}} = -a_1 = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}.$$

Pro stanovení rezidua funkce je možno jako univerzální metody použít rozvoje v Laurentovu řadu. V případě podstatné singularity žádný jiný způsob k dispozici nemáme. V případě odstranitelné singularity ve vlastním bodě je reziduum vždy nulové. Zbývá pól. V tomto případě existuje několik pravidel pro výpočet rezidua, které si probereme.

Tvrzení 6.5. *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je k-násobný pól funkce f. Pak*

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \left((z - z_0)^k f(z) \right). \tag{6.5}$$

Speciálně, pro jednonásobný pól z_0 máme

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \tag{6.6}$$

Limitním přechodem je konečně

$$\lim_{z \to \infty} z^2 f'(z) = -a_1 = \operatorname{res}_\infty f(z).$$

(ii) Odvození pravidla pro reziduum ve vícenásobném pólu sleduje stejnou myšlenku jako při odvozování vzorce pro pól ve vlastním bodě. Na základě Tvrzení 6.4 víme, že Laurentův rozvoj je tvaru

$$f(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_1 z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots.$$

Hlavní část řady je polynom stupně k, který eliminujeme, budeme-li předchozí rovnost $k+1$ krát derivovat. Máme tak

$$f^{(k+1)}(z) = (k+1)! \frac{(-1)^{k+1} a_1}{z^{k+2}} + (k+2)! \frac{(-1)^k a_2}{z^{k+3}} + \cdots$$

Vynásobením z^{k+2} a limitou $z \to \infty$ získáme

$$\lim_{z \to \infty} z^{k+2} f^{(k+1)}(z) = (-1)^{k+1} (k+1)!\, a_1.$$

Odtud konečně

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = -a_1 = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \lim_{z \to \infty} \left(z^{k+2} \frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}z^{k+1}} f(z) \right).$$

□

1a

Příklad 6.11 (a) Stanovme reziduum funkce $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ v nekonečnu. V tomto případě se jedná o odstranitelnou singularitu s $f(\infty) = 1$. Vyzkoušíme si výpočet podle obou pravidel uvedených v Tvrzení 6.8.

!

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = \lim_{z \to \infty} z \left(1 - e^{\frac{1}{z}}\right) = \lim_{u \to 0} \frac{1 - e^u}{u} = -1.$$

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = \lim_{z \to \infty} z^2 \left(e^{\frac{1}{z}}\right)' = \lim_{z \to \infty} z^2 e^{\frac{1}{z}} \cdot -\frac{1}{z^2} = -1.$$

1b

(b) Spočítejme $\operatorname{res}_\infty z e^{\frac{1}{z}}$.
Nevlastní bod je pólem prvního řádu.

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{-1}{2!} z^3 \left(z e^{\frac{1}{z}}\right)'' = -\lim_{z \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Postup založený na vzorci (6.13) může někdy vést ke zdlouhavému výpočtu. I v našem případě je snažší získat požadované reziduum z Laurentova rozvoje:

$$z e^{\frac{1}{z}} = z \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \cdots \right) = z + 1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{3! z^2} + \cdots.$$

Vidíme tedy, že $a_1 = \frac{1}{2}$, což dá ihned $\operatorname{res}_\infty f(z) = -\frac{1}{2}$.

Example 6.11 *Find all zeros and poles in* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *of*

$$(a)\quad \frac{(z-1)^2(z+2)^3}{z}, \qquad (b)\quad \frac{1}{(z-1)^3}.$$

(a) The zeros are

$$1, \quad 1, \quad -2, \quad -2, \quad -2,$$

and the poles are

$$0, \quad \infty, \quad \infty, \quad \infty, \quad \infty.$$

Here, 1 is a double zero, and -2 is a triple zero. Furthermore, 0 is a simple pole, and ∞ is a fourfold pole.

(b) It follows by inspection that ∞ is a triple zero, and that 1 is a triple pole.

1d

Example 6.12 *Given the function*

$$f(z) = z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right).$$

1) Find in the domain $|z| > 0$ *the Laurent series*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{z^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

of the function f.
Indicate the coefficients a_n *and* b_n.

2) Indicate the isolated singularities of f *in* $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *and their type.*

3) Find the value of the integral

$$\oint_{|z|=1} f(z)\, dz,$$

and the residuum of f *at* ∞.

1) We get by insertion into the series of $\cos w$,

$$f(z) = z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right) = z^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n} = z^3 - \frac{1}{2}z + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+4)!}\,\frac{1}{z^{2n+1}} \qquad \text{for } |z| > 0.$$

It follows that

$$a_1 = -\frac{1}{2}, \qquad a_3 = 1, \qquad a_n = 0 \text{ for } n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1, 3\},$$

and

$$b_{2n} = 0 \text{ for } n \in \mathbb{N}_0, \qquad b_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+4)!} \text{ for } n \in \mathbb{N}_0.$$

2) The isolated singularities in $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ are an essential singularity at 0, and because $\cos\left(\frac{1}{z}\right) = \cos 0 = 1$ for $z \to \infty$, a pole of order 3 at ∞.

3) Then by Cauchy's residue theorem,

$$\oint_{|z|=1} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{res}(f; 0) = 2\pi i \cdot a_{-1} = \frac{2\pi i}{4!} = \frac{\pi i}{12} = -2\pi i \operatorname{res}(f; \infty),$$

so

$$\operatorname{res}(f; \infty) = -\operatorname{res}(f; 0) = -\frac{1}{4!} = -\frac{1}{24}.$$

1e **Úloha**: Nalezněte reziduum funkce $f(z) = (z+1)e^{\frac{z-1}{z}}$ v bodech (a) $z_0 = 0$, (b) $z_0 = \infty$.

Řešení: (a) Bod $z_0 = 0$ je podstatnou singularitou (ověřte!), a proto jediný způsob jak nalézt reziduum je stanovit Laurentův rozvoj v bodě 0. Využitím standardního rozvoje pro exponenciální funkci a algebraických úprav máme

$$f(z) = (z+1)e^{\frac{z-1}{z}} = zee^{\frac{-1}{z}} + ee^{\frac{-1}{z}} =$$
$$= e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n-1}n!} + e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n n!}.$$

Sečtením koeficientů u mocniny $1/z$ v obou řadách máme

$$\operatorname{res}_0 f(z) = e\frac{(-1)^2}{2!} + e\frac{(-1)}{1} = -\frac{1}{2}e.$$

(b) Reziduum v nekonečnu můžeme rychle získat z bodu (a). Vzhledem k tomu, že f nemá jiné singularity než 0 a ∞ je Laurentova řada v nekonečnu současně Laurentovou řadou v bodě nula. Reziduum v nekonečnu je pak záporně vzatým koeficientem u $1/z$. Proto

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = -\operatorname{res}_0 f(z) = \frac{1}{2}e.$$

V další kapitole ukážeme obecnější pravidlo říkající, že součet všech reziduuí funkce s konečně mnoha singularity je nulový. Konečně poznamenejme, že bod ∞ je jednonásobným pólem funkce f, neboť

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = e.$$

K výpočtu rezidua tedy můžeme použít i vztahu (6.13). Tento postup však vede k delšímu derivování.

Úloha: Vypočtěte $\operatorname{res}_0 \frac{1-\cos z}{z^3}$.

Řešení: Bod 0 je pól násobnosti jedna funkce $\frac{1-\cos z}{z^3}$ (ověřte!) Podle vztahu (6.6) je

$$\operatorname{res}_0 \frac{1-\cos z}{z^3} = \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{2z} = \frac{1}{2}.$$

(Při výpočtu jsme použili l'Hospitalova pravidla.)

Úloha: Předpokládejme, že z_0 je izolovaný singulární bod funkcí f_1 a f_2. Ukažte, že

$$\operatorname{res}_{z_0}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \operatorname{res}_{z_0} f_1 + \beta \operatorname{res}_{z_0} f_2 \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Řešení: Linearita v chování rezidua jako zobrazení na prostoru funkcí vyplývá bezprostředně z jeho definice. Je-li totiž

$$f_1(z) = \sum_{n-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{a} \quad f_2(z) = \sum_{n-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n,$$

Příklad 5.2.6. *Vypočtěte následující integrály pomocí reziduí*

2a *a)* $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)^2}$, *kde* $\Gamma : |z| = \frac{1}{2}$ *je kladně orientovaná kružnice*

2f *b)* $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^z}{z(z^2+1)}\,\mathrm{d}z$, *kde* $\Gamma : |z+1+\mathrm{j}\,| = 2$ *je kladně orientovaná kružnice*

c) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^z}{z(z^2+1)}\,\mathrm{d}z$, *kde* $\Gamma : |z| = \frac{1}{2}$ *je kladně orientovaná kružnice*

d) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)^2}$, *kde* $\Gamma : |z| = 2$ *je kladně orientovaná kružnice*

e) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z^2+z+1}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z$, *kde* $\Gamma : |z| = 2$ *je kladně orientovaná kružnice*

Řešení: a) Funkce $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)^2}$ má v bodě $z_1 = 0$ pól prvního řádu a v bodě $z_2 = 1$ pól druhého řádu.

Z obou pólů leží uvnitř křivky Γ pouze pól $z_1 = 0$ a $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 1$.

Podle reziduové věty $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j}\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 2\pi\mathrm{j}$.

b) Funkce $f(z) = \dfrac{e^z}{z(z^2+1)}$ má v bodech $z_1 = 0$, $z_2 = \mathrm{j}$ a $z_3 = -\mathrm{j}$ póly prvního řádu. Uvnitř křivky Γ leží pouze póly $z_1 = 0$ a $z_3 = -\mathrm{j}$.

Dále $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 1$ a $\operatorname*{res}_{z=-\mathrm{j}} f(z) = -\frac{e^{-\mathrm{j}}}{2}$.

$$\int_\Gamma \frac{e^z}{z(z^2+1)}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j}\,(\operatorname*{res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-\mathrm{j}} f(z)) = 2\pi\mathrm{j}\,(1 - \frac{e^{-\mathrm{j}}}{2}) =$$

$$= -\pi\sin 1 + \mathrm{j}\,(2\pi - \pi\cos 1).$$

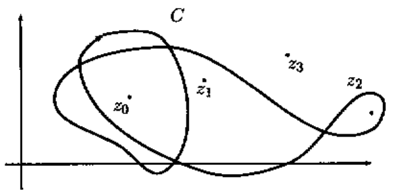
c) $2\pi\mathrm{j}$; d) 0; e) $2\pi\mathrm{j}$.

Definice 7.1. *Nechť f je funkce holomorfní na otevřené množině G, nechť C je uzavřená křivka ležící v G a $z_0 \in G \setminus C$. Číslo*

$$\operatorname{Ind}_C z_0 = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{1}{z - z_0}\, dz$$

se nazývá ***index*** *bodu z_0 ke křivce C.*

Index je tedy definován pro každý bod, který neleží na křivce C. Nevinně vyhlížející integrál nás však překvapí svými vlastnostmi: Jeho hodnota je vždy *celé* číslo! Navíc, jeho význam je velmi geometrický. Udává kolikrát křivka C oběhla bod z_0 v kladném smyslu. Na obr. 7.2 je zachycena typická situace.



Obr. 7.2.

$$\operatorname{Ind}_C z_0 = 2, \quad \operatorname{Ind}_C z_1 = 1, \quad \operatorname{Ind}_C z_2 = -1, \quad \operatorname{Ind}_C z_3 = 0.$$

Pomocí indexu můžeme reziduovou větu zformulovat do elegantnější verze.

Reziduová věta (Obecný tvar) *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a nechť f je holomorfní na G až na konečnou množinu $M \subset G$ singulárních bodů. Pak pro každou uzavřenou křivku $C \subset G \setminus M$ platí*

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi j \sum_{z \in M} \operatorname{Ind}_C z \cdot \operatorname{res}_z f.$$

Při takové formulaci převzal pojem index zodpovědnost jak za orientaci křivky C, tak i za rozlišení, která rezidua a kolikrát přispívají k hodnotě integrálu.

2c

Příklad 7.1. Vypočtěme pomocí reziduové věty integrál $\int_C \frac{1}{(z^2-1)(z-3)^2}\, dz$, kde C je uzavřená křivka obsahující body 1 a -1 ve svém vnitřku a bod 3 ve vnějšku. Reziduová věta převede výpočet zadaného integrálu okamžitě na výpočet reziduí v 1 a -1 (póly násobnosti jedna).

$$\operatorname{res}_1 \frac{1}{(z^2-1)(z-3)^2} = \frac{1}{2 \cdot (-2)^2} = \frac{1}{8}.$$

$$\operatorname{res}_{-1} \frac{1}{(z^2-1)(z-3)^2} = \frac{1}{(-2)\cdot(-4)^2} = -\frac{1}{32}.$$

Dostáváme tak

$$\int_C \frac{1}{(z^2-1)(z-3)^2}\, dz = 2\pi j \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{32}\right) = \frac{3\pi}{16} j.$$

Reziduová věta má jeden důležitý důsledek pro funkce holomorfní v $\mathbb{C}$ s výjimkou konečné množiny.

Důsledek 7.1. *Nechť funkce $f(z)$ je funkce holomorfní v $\mathbb{C}$ vyjma konečně mnoha singularit $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$. Pak*

(7.1) $$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} f + \operatorname{res}_\infty f = 0.$$

(Součet reziduí ve všech singularitách je nulový.)

Důkaz. Zvolme jednoduchou uzavřenou kladně orientovanou křivku C obsahující body $z_1, z_2, \ldots, z_k$ ve své vnitřní oblasti. Pak

(7.2) $$\int_C f(z)\, dz = 2\pi j \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} f.$$

Na druhé straně, podle vzorce (6.4) s uvážením, že v (6.4) je křivka záporně orientována, máme

$$-\int_C f(z)\, dz = 2\pi j \operatorname{res}_\infty f.$$

Sečtením těchto identit dostaneme dokazovanou rovnost. □

2b

Příklad 7.2. Stanovme $\int_C \frac{dz}{1+z^{100}}$, kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z| = 2$. Tento příklad je typickou ukázkou použití identity (7.1). Uvnitř křivky C leží totiž celkem sto singularit $z_1, z_2, \ldots, z_{100}$. (Tvoří vrcholy pravidelného stoúhelníka na jednotkové kružnici.) Pro aplikaci reziduové věty potřebujeme znát pouze součet těchto reziduí a nikoliv jejich individuální hodnoty. Vně křivky C leží ovšem podstatně méně singularit, pouze ∞. Podle (7.1) je

$$\sum_{i=1}^{100} \operatorname{res}_{z_i} f(z) = -\operatorname{res}_\infty f(z).$$

Protože f má v ∞ odstranitelnou singularitu, použijeme z Tvrzení 6.8 vzorec (6.11) pro výpočet rezidua v nekonečnu. Dostaneme, že $\operatorname{res}_\infty f(z) = 0$, a tedy

$$\int_C \frac{1}{1+z^{100}}\, dz = 0.$$

2g

Úloha: Vypočtěte $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-3)(z^{10}-1)}\,dz$, kde C je kladně orientovaná kružnice se středem v bodě 0 a poloměrem 2.

Řešení: Uvnitř kružnice se nachází deset jednoduchých pólů funkce $f(z)$. Z početního hlediska je však výhodnější vypočítat rezidua v singularitách, které leží ve vnější oblasti křivky C, tj. v bodech 3 a ∞. Podle (7.1) totiž platí

$$\sum_{\{z|z^{10}=1\}} \operatorname{res}_z f(z) = -\operatorname{res}_3 f(z) - \operatorname{res}_\infty f(z).$$

Přitom $\operatorname{res}_\infty f(z) = 0$ podle výsledku (6.15) a $\operatorname{res}_3 f(z) = \dfrac{1}{3^{10}-1}$. Závěrem tedy získáváme

$$\int_C \frac{1}{(z-3)(z^{10}-1)}\,dz = -2\pi j\frac{1}{3^{10}-1}.$$

2d

Úloha: Vypočtěte $\displaystyle\int_C \frac{z}{\sin z(1-\cos z)}\,dz$ kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z|=1$.

Řešení: Uvnitř křivky C má daná funkce pouze singularitu v bodě 0 a to pól druhého řádu. Reziduum v tomto bodě je vhodnější počítat technikou rozvoje v Laurentovu řadu. Jelikož

$$\sin z(1-\cos z) = \frac{z^3}{2} - \frac{z^5}{8} + \cdots,$$

získáme několik prvních členů Laurentova rozvoje algoritmem dělení

$$\begin{array}{l} z \quad : \left(\dfrac{z^3}{2} - \dfrac{z^5}{8}\cdots\right) = \dfrac{2}{z^2} + \dfrac{1}{2} + \cdots \\ -\left(z - \dfrac{z^3}{4} + \cdots\right) \\ \quad \dfrac{z^3}{4} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Protože člen s mocninou z^{-1} chybí, je reziduum nulové. Odtud

$$\int_C \frac{z}{\sin z(1-\cos z)}\,dz = 0.$$

7

Úloha: Jaké možné hodnoty může nabývat křivkový integrál $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^n(1-z)}\,dz$, $n \in \mathbb{N}$, kde C je jednoduchá uzavřená křivka neprocházející body 0 a 1.

Řešení: Funkce f má v bodě 0 n-násobný pól a bodě 1 jednonásobný pól. Přitom

$$\frac{1}{z^n(1-z)} = \frac{1}{z^n}\left(1+z+z^2+\cdots\right) = \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \cdots \qquad |z|<1,$$

což znamená, že $\operatorname{res}_0 \dfrac{1}{z^n(1-z)} = 1$. V případě jednonásobného pólu 1 máme $\operatorname{res}_1 \dfrac{1}{z^n(1-z)} = -1$. Podle reziduové věty jsou možné hodnoty integrálů:

a) 0, neobsahuje-li C ve svém vnitřku ani bod 0 ani bod 1.

b) $2\pi j$, obsahuje-li C ve svém vnitřku bod 0 a nikoliv 1.

c) $-2\pi j$ obsahuje-li C ve svém vnitřku bod 1 a nikoliv 0.

d) 0, obsahuje-li C ve svém vnitřku oba body 0 a 1. V tomto případě je totiž

$$\int_C \frac{1}{z^n(1-z)}\,dz = 2\pi j(1-1) = 0.$$

Vidíme tedy, že zadaný integrál nabývá hodnot 0, $2\pi j$, $-2\pi j$.

4g

Úloha: Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^4}\,dx$.

Řešení: Podle (7.4) musíme určit rezidua v singularitách funkce $\dfrac{1}{z^4+4}$ ležících v horní polorovině. Jedná se o body $z_1 = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$ a $z_2 = \sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}$. Vzorec pro výpočet rezidua v jednoduchém pólu dá

$$\operatorname{res}_{z_i} \frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{4z_i^3}, \qquad i = 1,2.$$

Pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^4}\,dx = \frac{2\pi j}{4\sqrt{8}}\left(\frac{1}{z_1^3} + \frac{1}{z_2^3}\right) = \frac{\pi j}{2\sqrt{8}}\left(e^{-\frac{3j\pi}{4}} + e^{-\frac{9j\pi}{4}}\right) = \frac{\pi j}{2\sqrt{8}}\left(e^{-\frac{3j\pi}{4}} + e^{-\frac{\pi j}{4}}\right) =$$
$$= \frac{\pi}{2\sqrt{8}} 2\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

4e

Úloha: Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+a^4}\,dx$, kde $a>0$.

Příklad 7.7. Nalezněte metodou reziduí součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Tento součet je roven

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Můžeme tedy použít předchozí postup pro funkci $f(z) = \frac{1}{z^2}$. Díky vztahu (7.18) máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2} \operatorname{res}_0 \frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{z^2}.$$

Z Laurentovy řady (viz řešená úloha v Kapitole 5)

$$\frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{z^2} = \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3z} - \frac{\pi^4 z}{45} - \cdots$$

vidíme, že

$$\operatorname{res}_0 \frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{z^2} = -\frac{\pi^2}{3}.$$

Proto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(b) Součty typu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n)$

Budeme předpokládat, že funkce f splňuje stejné předpoklady jako v předchozí části (a). Stejně tak převezmeme i značení, protože postup při výpočtu je podobný. Potřebujeme pouze najít funkci, jejíž reziduum v bodě $n \in \mathbb{Z}$ má hodnotu $(-1)^n$. Takovouto funkcí je např. funkce $\frac{\pi}{\sin \pi z}$. Skutečně, podle Tvrzení 6.6 je

$$\operatorname{res}_n \frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{\cos \pi n} = (-1)^n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Vzhledem k tomu, že

$$\frac{1}{\sin^2 z} = 1 + \operatorname{cotg}^2 z,$$

vyplývá ze (7.16) rovněž uniformní omezenost funkce $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ na křivkách C_N. Aplikací předchozího postupu tak získáme

$$\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq z_1, z_2, \ldots, z_n}}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} \left(f(z) \frac{\pi}{\sin \pi z} \right). \tag{7.19}$$

Příklad 7.8. Určeme součet $\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Všimneme si, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ a použijeme předchozí metodu pro funkci $f(z) = \frac{1}{z^2}$. Podle (7.19) je

$$\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\operatorname{res}_0 \frac{\pi}{z^2 \sin \pi z}.$$

Bod 0 je trojnásobným pólem funkce $\frac{\pi}{z^2 \sin \pi z}$. Jemu odpovídající reziduum můžeme získat například z Laurentova rozvoje funkce $1/(\sin \pi z)$ Částečným vydělením dostaneme

$$\frac{1}{\sin \pi z} = \frac{1}{\pi z} + \frac{\pi z}{6} + \frac{7\pi^3 z^3}{360} + \cdots$$

Odtud

$$\frac{\pi}{z^2 \sin \pi z} = \frac{1}{z^3} + \frac{\pi^2}{6z} + \frac{7\pi^4 z}{360} + \cdots. \tag{7.20}$$

Reziduum je tedy rovno $\frac{\pi^2}{6}$ a závěrem máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

5 Cvičení

26

Úloha: Vypočtěte křivkový integrál $\boxed{\int_C \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}\, dz}$ kde C je křivka daná parametrizací $\varphi(t) = 2 + \frac{e^{jt}}{2}, t \in \langle 0, 2\pi)$.

Řešení: Funkce $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ má ve vnitřku křivky C singularitu v bodě 2, a to pól druhého řádu. Přitom

$$\operatorname{res}_2 \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} = \lim_{z\to 2} \left(\frac{z}{z-1} \right)' = \lim_{z\to 2} \frac{-1}{(z-1)^2} = -1.$$

Podle reziduové věty je

$$\int_C \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}\, dz = -2\pi j.$$

Příklad 9.7. Vypočtěte

$$\int_\gamma z^2 \sin\frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z,$$

kde

$$\gamma(t) := 2\mathrm{e}^{it},\ t \in \langle 0, 2\pi).$$

Řešení. Z reziduové věty plyne, že

$$\int_\gamma z^2 \sin\frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-1} z^2 \sin\frac{1}{z+1}.$$

Protože pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ platí:

$$z^2 \sin\frac{1}{z+1} = \left((z+1)^2 - 2(z+1) + 1\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\frac{1}{(z+1)^{2n+1}},$$

je [1]

$$\int_\gamma z^2 \sin\frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-1} z^2 \sin\frac{1}{z+1} = 2\pi i \left(1\frac{(-1)^1}{3!} + 0 + 1\frac{(-1)^0}{1!}\right) = \frac{5}{3}\pi i.$$

▲

9.3 Výpočet integrálů funkcí reálné proměnné pomocí reziduové věty

ODVOZENÍ

a) Integrály typu $\boxed{\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x,}$

kde $R:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je racionální funkce dvou proměnných a integrovaná funkce (tj. funkce $x \mapsto R(\sin x, \cos x)$) je spojitá na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Zvolme substituci

$$\mathrm{e}^{ix} = z.$$

Pak (zatím pouze formálně) dostaneme:

$$\sin x = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i},\quad \cos x = \frac{z + \frac{1}{z}}{2},\quad \mathrm{d}z = \mathrm{e}^{ix}\, i\,\mathrm{d}x,\ \text{tj.}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{iz}\,\mathrm{d}z,$$

a proto

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int_\gamma R\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}, \frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)\frac{1}{iz}\,\mathrm{d}z, \tag{9.1}$$

[1] Rozmyslete si podrobně!

kde

$$\gamma(x) := \mathrm{e}^{ix},\quad x \in \langle 0, 2\pi).$$

Správnost rovnosti (9.1), kterou jsme získali pouze „formálním dosazením“, plyne přímo z věty 5.5. Integrál vystupující napravo lze často spočítat pomocí reziduové věty.

3a

Příklad 9.8.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\frac{5}{4} - \cos x}\,\mathrm{d}x = \int_\gamma \frac{1}{\frac{5}{4} - \frac{z+\frac{1}{z}}{2}}\,\frac{1}{iz}\,\mathrm{d}z =$$

$$= -\frac{2}{i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-2)(z-\frac{1}{2})} = -\frac{2}{i}\,2\pi i \operatorname*{res}_{z=\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{(z-2)(z-\frac{1}{2})}\right) = -4\pi\frac{1}{\frac{1}{2}-2} = \frac{8}{3}\pi$$

$$(\gamma(x) = \mathrm{e}^{ix},\ x \in \langle 0, 2\pi)).$$

b) Integrály typu $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x,}$

kde $P, Q:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou polynomy, pro něž platí:

- Q nemá reálný kořen,
- stupeň polynomu Q je alespoň o 2 větší než stupeň polynomu P.

Z výše uvedených předpokladů vyplývá, že

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\alpha_k} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z = \lim_{k\to+\infty}\int_{-k}^{k} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

kde

$$\alpha_k(t) := t,\ t \in \langle -k, k\rangle,$$

a že

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\beta_k} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z = 0,$$

kde

$$\beta_k(t) := k\mathrm{e}^{it},\ t \in \langle 0, \pi\rangle.$$

Proto platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty}\int_{\gamma_k} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z,$$

4e

Řešení: Protože integrovaná funkce je sudá, převedeme výpočet na integraci přes celou reálnou osu

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x.$$

Funkce $f(z) = \dfrac{z^2}{z^4+a^4}$ má v horní polorovině dva jednoduché póly $z_1 = a e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$ a $z_2 = a e^{\mathrm{j}\frac{3\pi}{4}}$. Přitom

$$\operatorname{res}_{z_i} \frac{z^2}{z^4+a^4} = \frac{z_i^2}{4z_i^3} = \frac{1}{4z_i}.$$

Odtud

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\mathrm{j}}{2}\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2a}.$$

Závěrem,

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}\pi}{4a}.$$

3b

Úloha: Vypočtěte integrál $\displaystyle\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1-2a\cos x + a^2},\ a\in\mathbb{R}, |a|<1.}$

Řešení: Použijeme metody popsané v odstavci **(b)**. (Integrál z periodické funkce je přes všechny intervaly délky periody stejný.) Tím dostáváme

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1-2a\cos x + a^2} = \int_C \frac{\mathrm{d}z}{1-2a\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)+a^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{j}z},$$

kde C je jednotková kladně orientovaná ružnice se středem v počátku. Dalšími výpočty dostaneme

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{1-2a\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)+a^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{j}z} = \frac{1}{\mathrm{j}}\int_C \frac{\mathrm{d}z}{-az^2+(a^2+1)z-a}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\mathrm{j}}\int_C \frac{\mathrm{d}z}{-a(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)}.$$

Integrovaná funkce má uvnitř jednotkového kruhu singularitu v bodě a (jednoduchý pól). Podle reziduové věty máme

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1-2a\cos x + a^2} = 2\pi\mathrm{j}\frac{1}{\mathrm{j}}\operatorname{res}_a \frac{1}{-a(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)} = 2\pi\frac{1}{-a\left(a-\frac{1}{a}\right)} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

6b

Úloha: Nalezněte $\displaystyle\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x,\ a>0.}$

Řešení: Použijeme (7.7) pro $R(z) = \dfrac{1}{z^2+a^2}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\left(2\pi\mathrm{j}\operatorname{res}_{a\mathrm{j}}\frac{e^{\mathrm{j}z}}{z^2+a^2}\right) = \operatorname{Re}\left(2\pi\mathrm{j}\frac{e^{-a}}{2a\mathrm{j}}\right) = \pi\frac{e^{-a}}{a}.$$

6c

Úloha: Vypočtěte $\displaystyle\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x-\frac{\pi}{2})(x-\frac{3\pi}{2})}\,\mathrm{d}x.}$

Řešení: Tento integrál je možno vypočítat podle vztahu (7.11), kde $R(z) = \dfrac{1}{(z-\frac{\pi}{2})(z-\frac{3\pi}{2})}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x-\frac{\pi}{2})(x-\frac{3\pi}{2})}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\left(\pi\mathrm{j}\operatorname{res}_{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\mathrm{j}z}}{(z-\frac{\pi}{2})(z-\frac{3\pi}{2})} + \pi\mathrm{j}\operatorname{res}_{\frac{3\pi}{2}}\frac{e^{\mathrm{j}z}}{(z-\frac{\pi}{2})(z-\frac{3\pi}{2})}\right) =$$

$$= \operatorname{Re}\left(\pi\mathrm{j}\frac{e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}}{-\pi} + \pi\mathrm{j}\frac{e^{\mathrm{j}\frac{3\pi}{2}}}{\pi}\right) = \operatorname{Re}\left(-\mathrm{j}e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} + \mathrm{j}e^{\mathrm{j}\frac{3\pi}{2}}\right) = 2.$$

Úloha: Nalezněte součet $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

Řešení:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{2}.$$

Přitom podle (7.18) je

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} = -\operatorname{res}_{\mathrm{j}}\left(\frac{1}{z^2+1}\pi\operatorname{cotg}\pi z\right) - \operatorname{res}_{-\mathrm{j}}\left(\frac{1}{z^2+1}\pi\operatorname{cotg}\pi z\right) =$$

$$= -\frac{\pi\operatorname{cotg}(\pi\mathrm{j})}{2\mathrm{j}} - \frac{\pi\operatorname{cotg}(-\pi\mathrm{j})}{-2\mathrm{j}} = -\frac{\pi\operatorname{cotg}(\pi\mathrm{j})}{\mathrm{j}} =$$

$$= \pi\operatorname{cotgh}\pi.$$

Závěrem tedy dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2}\pi\operatorname{cotgh}\pi - \frac{1}{2}.$$

Úloha: Stanovte součet $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$.

Dá se dokázat, že limita integrálu po polokružnici (pro $R \to +\infty$) je rovna nule. Proto vzhledem k předpokládané absolutní konvergenci integrálu platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\,dx = \oint_C Q(z)\,dz = 2\pi\,\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} Q(z)\,,$$

kde z_k , $k = 1, 2, \ldots n$ jsou všechny póly funkce $Q(z)$ ležící v horní polorovině Gaussovy roviny.

Poznámka : Bylo by možné taky doplnit úsečku $< -R\,,\ R >$ polokružnicí v dolní polorovině. Potom by však uvnitř křivky byly singulární body v dolní polorovině a uzavřená křivka by měla zápornou orientaci. Ale vzhledem k tomu, že každý mnohočlen s reálnými koeficienty má vždy komplexně sdružené koeficienty, vyjde nakonec stejný výsledek.

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{Q(x)\cos ax\ dx}\ ,\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{Q(x)\sin ax\ dx}\ ,\ \mathbf{a} \in \mathcal{R}^+$

Předpokládejme, že funkce $Q(x)$ má stejné vlastnosti a křivka C je stejná jako v předcházejícím případě. Utvoříme funkci $Q(z)\,e^{\mathrm{i}az}$, která má na reálné ose (pro $z = x$) hodnotu $Q(x)(\cos ax + \mathrm{i}\sin ax)$. Protože $|e^{\mathrm{i}az}| = |e^{\mathrm{i}ax - ay}| = e^{-ay} < 1$ pro $y > 0$, je opět limita integrálu po polokružnici rovna nule a platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)(\cos ax + \mathrm{i}\sin ax)\,dx = \oint_C e^{\mathrm{i}az}Q(z)\,dz = 2\pi\,\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} e^{\mathrm{i}az}Q(z),$$

kde z_k , $k = 1, 2, \ldots n$ jsou všechny póly funkce $Q(z)$ ležící v horní polorovině Gaussovy roviny.
Z rovnosti reálných a imaginárních částí dostaneme tímto výpočtem současně hodnoty obou integrálů

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\cos ax\,dx\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\sin ax\,dx\,.$$

V příkladech 11.1 - 11.14 vypočítejte podle obecného návodu hodnoty daných integrálů 1. typu.

11.1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 + 4\cos\varphi}\,.$

Řešení : Po dosazení $\cos\varphi = \dfrac{z^2+1}{2z}$ a $d\varphi = \dfrac{dz}{\mathrm{i}\,z}$ vyjde

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5+4\cos\varphi} = \oint_C \frac{dz}{\mathrm{i}\,z(5 + 4\frac{z^2+1}{2z})} = \oint_C \frac{dz}{\mathrm{i}\,(2z^2+5z+2)}\,.$$

Integrovaná funkce má izolované singulární body $z_1 = \dfrac{-5+\sqrt{25-16}}{4} =$ $= -\dfrac{1}{2}$, $z_2 = \dfrac{-5-\sqrt{25-16}}{4} = -2$. Ve vnitřní oblasti jednotkové kružnice se středem v počátku leží pouze bod z_1 (pól 1. řádu) .
V tomto bodě vypočítáme reziduum (po rozložení jmenovatele na součin kořenových činitelů a koeficientu 2)

$$\operatorname*{res}_{z=-\frac{1}{2}} \frac{1}{\mathrm{i}\,(2z^2+5z+2)} = \lim_{z\to-\frac{1}{2}} \frac{z+\frac{1}{2}}{2\,\mathrm{i}\,(z+\frac{1}{2})(z+2)} = \frac{1}{3\,\mathrm{i}}\,.$$

Takže podle reziduové věty $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5+4\cos\varphi} = \frac{2\pi}{3}\,.$

3c

11.2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 + 3\cos\varphi}\,.$

Výsledek : Ze dvou singulárních bodů $z_{1,2} = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100-36}}{6}$ leží ve vnitřní oblasti jednotkové kružnice pouze bod $z_1 = -\dfrac{1}{3}$ (pól 1. řádu),

$$\operatorname*{res}_{z=-\frac{1}{3}} \frac{2}{\mathrm{i}\,(3z^2+10z+3)} = \frac{1}{4\,\mathrm{i}} \quad\Rightarrow\quad \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5+3\cos\varphi} = \frac{\pi}{2}\,.$$

11.3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2 + \cos\varphi}\,.$

Výsledek : Ze dvou singulárních bodů leží ve vnitřní oblasti jednotkové kružnice pouze bod $z_1 = -2 + \sqrt{3}$ (pól 1. řádu) ;

Nechť $R(x,y) = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ je podíl dvou polynomů ve dvou proměnných s reálnými koeficienty. Dále předpokládejme, že $Q(x,y) \neq 0$ pro všechny body na jednotkové kružnici $\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$. Ukážeme, že

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = \int_C R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2\mathrm{j}z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{j}z}, \tag{7.5}$$

kde C je jednotková kladně orientovaná kružnice $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Tato identita umožní převést integrál z goniometrické funkce na křivkový integrál vůči uzavřené křivce, který je možno spočítat pomocí reziduové věty. Rovnost (7.5) můžeme bezprostředně ověřit vyjádřením křivkového integrálu přes jednotkovou kružnici pomocí její parametrizace

$$\varphi(x) = e^{\mathrm{j}x}, \qquad x \in \langle 0, 2\pi).$$

Jelikož pro $z = e^{\mathrm{j}x}, x \in \mathbb{R}$, platí

$$\frac{z^2+1}{2z} = \frac{e^{2\mathrm{j}x}+1}{2e^{\mathrm{j}x}} = \frac{e^{\mathrm{j}x}+e^{-\mathrm{j}x}}{2} = \cos x$$
$$\frac{z^2-1}{2\mathrm{j}z} = \frac{e^{2\mathrm{j}x}-1}{2\mathrm{j}e^{\mathrm{j}x}} = \frac{e^{\mathrm{j}x}-e^{-\mathrm{j}x}}{2\mathrm{j}} = \sin x$$

a $\varphi'(x) = \mathrm{j}e^{\mathrm{j}x}$, získáváme

$$\int_C R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2\mathrm{j}z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{j}z} = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\frac{\mathrm{j}e^{\mathrm{j}x}}{\mathrm{j}e^{\mathrm{j}x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x.$$

3d

Příklad 7.4. Vypočtěme $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$, kde $a > b > 0$. Tento integrál je výše uvedeného typu s racionální funkcí

$$R(x,y) = \frac{1}{a+bx}.$$

Je-li $x \in (-1,1)$, pak $a + bx > a - b > 0$, což znamená, že předpoklady o nenulovosti polynomu $Q(x,y)$ na jednotkové kružnici jsou splněny. Položme

$$F(z) = \frac{1}{a+b\frac{z^2+1}{2z}} \cdot \frac{1}{\mathrm{j}z} = \frac{2}{\mathrm{j}}\frac{1}{bz^2+2az+b}.$$

Zadaný integrál je roven integrálu funkce $F(z)$ přes jednotkovou kružnici, který vypočítáme pomocí reziduové věty. Funkce $F(z)$ má singularity v kořenech polynomu $bz^2+2az+b$ tj. v bodech

$$z_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}, \qquad z_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

Z podmínky $a > b > 0$ plyne, že $|z_1| < 1$ a $|z_2| > 1$. Nás zajímají pouze singularita ležící uvnitř jednotkového kruhu, tj. bod z_1, který je jednonásobným pólem funkce $F(z)$. Podle reziduové věty máme

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x} = 2\pi\mathrm{j}\operatorname{res}_{z_1}\frac{2}{\mathrm{j}b(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{4\pi}{b(z_1-z_2)} =$$
$$= \frac{4\pi}{b}\cdot\frac{1}{\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

(c) Integrály typu $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{\mathrm{j}x}\,\mathrm{d}x$, $R(x)$ je racionální funkce.

V této části se budeme zabývat integrací funkce $R(x)e^{\mathrm{j}x}$, kde R je racionální funkce s reálnými koeficienty nemající póly na reálné ose s limitou $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$. Integrály tohoto typu jsou důležité pro Fourierovu transformaci a reprezentují dva integrály ze součinu racionální a goniometrické funkce:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{\mathrm{j}x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos x\,\mathrm{d}x + \mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin x\,\mathrm{d}x.$$

Pro výpočet těchto integrálů se používá podobný postup jako v odstavci (a). Jenom dokázat, že integrál přes horní polokružnici K_r se zvětšujícím se poloměrem konverguje k nule je složitější. To je obsahem následujícího Jordanova lemmatu.

Tvrzení 7.1. *Nechť K_r je polokružnice $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r, \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Předpokládejme, že $f(z)$ je spojitá funkce definovaná na průniku okolí nekonečna a horní poloroviny. Označíme*

$$M(r) = \max_{z\in K_r} |f(z)|.$$

Jestliže $\lim_{r\to\infty} M(r) = 0$, pak $\lim_{r\to\infty}\int_{K_r} f(z)e^{\mathrm{j}z}\,\mathrm{d}z = 0$.

Důkaz. Pomocí parametrizace polokružnice K_r: $\varphi_r(t) = re^{\mathrm{j}t}, t \in \langle 0, \pi\rangle$ vyjádříme křivkový integrál

$$\int_{K_r} f(z)e^{\mathrm{j}z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} f(re^{\mathrm{j}t})e^{\mathrm{j}re^{\mathrm{j}t}}\cdot \mathrm{j}re^{\mathrm{j}t}\,\mathrm{d}t.$$

Protože $|f(z)| \leq M(r)$ na K_r můžeme odhadnout

$$\left|\int_{K_r} f(z)e^{\mathrm{j}z}\,\mathrm{d}z\right| \leq rM(r)\cdot\int_0^{\pi} \left|e^{\mathrm{j}re^{\mathrm{j}t}}\right|\,\mathrm{d}t. \tag{7.6}$$

Dále, $\left|e^{\mathrm{j}re^{\mathrm{j}t}}\right| = e^{-r\sin t}$, a tak

$$\left|\int_{K_r} f(z)e^{\mathrm{j}z}\,\mathrm{d}z\right| \leq rM(r)\cdot\int_0^{\pi} e^{-r\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{2}{\mathrm{i}\,(z^2+4z+1)} = \frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2+\cos\varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

11.4. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{5}+2\sin\varphi}\,.$

Řešení : Po dosazení $\sin\varphi = \dfrac{z^2-1}{2z\,\mathrm{i}}$ a $d\varphi = \dfrac{dz}{\mathrm{i}\,z}$ vyjde

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{5}+2\sin\varphi} = \oint_C \frac{dz}{\mathrm{i}\,z(\sqrt{5}+2\frac{z^2-1}{2z\mathrm{i}})} = \oint_C \frac{dz}{z^2+\mathrm{i}\sqrt{5}z-1}\,.$$

Integrovaná funkce má dva izolované singulární body

$$z_1 = \frac{-\mathrm{i}\;(\sqrt{5}-1)}{2}\,,\quad z_2 = \frac{-\mathrm{i}\;(\sqrt{5}+1)}{2}\,.$$

Ve vnitřní oblasti jednotkové kružnice leží pouze bod z_1 (pól 1. řádu);

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{1}{z^2+\mathrm{i}\sqrt{5}z-1} = \lim_{z\to z_1} \frac{z-z_1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{z_1-z_2} = \frac{1}{\mathrm{i}}\,.$$

Hodnota integrálu je tedy 2π .

11.5. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}\,,\ a>b>0\,.$

Výsledek : Ze dvou singulárních bodů leží ve vnitřní oblasti jednotkové kružnice pouze bod $z_1 = \dfrac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ (pól 1. řádu) ;

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{2}{\mathrm{i}\,(bz^2+2az+b)} = \frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{a^2-b^2}} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\,.$$

11.6. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\sqrt{2}-\cos\varphi)^2}\,.$

Řešení : Po dosazení vyjde integrál funkce komplexní proměnné

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\sqrt{2}-\cos\varphi)^2} = \oint_C \frac{1}{\left(\sqrt{2}-\frac{z^2+1}{2z}\right)^2}\,\frac{dz}{\mathrm{i}\,z} = \oint_C \frac{4z}{\mathrm{i}\,(z^2-2\sqrt{2}z+1)^2}\,dz.$$

Integrovaná funkce má dva singulární body $z_1 = \sqrt{2}+1$, $z_2 = \sqrt{2}-1$.
Ve vnitřní oblasti jednotkové kružnice leží pouze bod z_2 (pól 2.řádu);

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) = \lim_{z\to z_2} \frac{d}{dz}\frac{4z(z-z_2)^2}{\mathrm{i}\,(z-z_1)^2(z-z_2)^2} = \lim_{z\to z_2} \frac{-4(z+z_1)}{\mathrm{i}\,(z-z_1)^3} =$$

$$= -4\,\frac{z_2+z_1}{\mathrm{i}\,(z_2-z_1)^3} = -4\,\frac{2\sqrt{2}}{\mathrm{i}\,(-2)^3} = \frac{\sqrt{2}}{\mathrm{i}}\,.$$

Hodnota integrálu je tedy $2\pi\sqrt{2}$.

11.7. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2+\cos\varphi)^2}\,.$

Výsledek : Ze dvou singulárních bodů leží ve vnitřní oblasti jednotkové kružnice pouze bod $z_1 = -2+\sqrt{3}$ (pól 2. řádu).

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{4z\,dz}{\mathrm{i}\,(z^2+4z+1)^2} = \frac{2}{3\mathrm{i}\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2+\cos\varphi)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\,.$$

3e

11.8. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(5-4\cos\varphi)^2}\,.$

Výsledek : Ze dvou singulárních bodů leží ve vnitřní oblasti jednotkové kružnice pouze bod $z_1 = \dfrac{1}{2}$ (pól 2. řádu).

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{z\,dz}{\mathrm{i}\,(2z^2-5z+2)^2} = \frac{5}{27\mathrm{i}} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(5-4\cos\varphi)^2} = \frac{10\pi}{27}\,.$$

11.9. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(3-2\sin\varphi)^2}\,.$

Výsledek : Ze dvou singulárních bodů leží ve vnitřní oblasti jednotkové kružnice pouze bod $z_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\;\mathrm{i}$ (pól 2. řádu).

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{iz\,dz}{(z^2-3\,\mathrm{i}\,z-1)^2} = -\frac{3i}{5\sqrt{5}} \quad\Rightarrow\quad \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(3-2\sin\varphi)^2} = \frac{6\pi}{5\sqrt{5}}\,.$$

11.10. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}\,,\ a>b>0\,.$

Řešení : Po dosazení vyjde integrál funkce komplexní proměnné

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2} = \oint_C \frac{1}{\left(a+b\frac{z^2+1}{2z}\right)^2}\,\frac{dz}{\mathrm{i}\,z} = \oint_C \frac{4z}{\mathrm{i}\,(bz^2+2az+b)^2}\,dz.$$

Integrovaná funkce má dva singulární body, ve vnitřní oblasti jednotkové kružnice leží pouze bod $z_1 = \dfrac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ (pól 2.řádu) ;

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{4z}{i(bz^2+2az+b)^2} = \lim_{z\to z_1} \frac{d}{dz}\frac{4z(z-z_1)^2}{\mathrm{i}\,b^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2} =$$

$$= -\frac{4(z_1+z_2)}{\mathrm{i}\,b^2(z_1-z_2)^3} = \frac{8a}{8\mathrm{i}\sqrt{(a^2-b^2)^3}}\,.$$

Hodnota integrálu je tedy $\dfrac{2\pi a}{\sqrt{(a^2-b^2)^3}}\,.$

11.11. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi}{5+3\cos\varphi}\,d\varphi\,.$

Řešení : Po dosazení vyjde následující integrál funkce komplexní proměnné

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi}{5+3\cos\varphi}\,d\varphi = \oint_C \frac{\frac{(z^2+1)^2}{4z^2}}{5+3\frac{z^2+1}{2z}}\,\frac{dz}{\mathrm{i}\,z} = \oint_C \frac{(z^2+1)^2\,dz}{2\,\mathrm{i}\,z^2(3z^2+10z+3)}\,.$$

Ve vnitřní oblasti jednotkové kružnice leží dva singulární body $z_1=0$ (pól 2. řádu) a $z_2=-\frac{1}{3}$ (pól 1. řádu).

$$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{(z^2+1)^2}{z^2(3z^2+10z+3)} = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{(z^2+1)^2}{3z^2+10z+3} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{4z(z^2+1)^2(3z^2+10z+3)-(z^2+1)^2(6z+10)}{(3z^2+10z+3)^2} = -\frac{10}{9}\,,$$

$$\operatorname*{res}_{z=-\frac{1}{3}} \frac{(z^2+1)^2}{z^2(3z^2+10z+3)} = \lim_{z\to-\frac{1}{3}} \frac{(z^2+1)^2}{3z^2(z+3)} = \left(\frac{10}{9}\right)^2\frac{9}{8} = \frac{10}{9}\frac{5}{4}\,,$$

Takže $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi}{5+3\cos\varphi}\,d\varphi = \frac{10}{9}\left(\frac{5}{4}-1\right)\pi = \frac{5\pi}{18}\,.$

11.12. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi}{13+12\cos\varphi}\,d\varphi\,.$

Výsledek : Hodnota integrálu je $\dfrac{13\pi}{45}\,.$

11.13. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\,,\ 0<a<1\,.$

Řešení : Po dosazení vyjde integrál funkce komplexní proměnné

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2} = \oint_C \frac{-dz}{\mathrm{i}[az^2-(a^2+1)z+a]} = \frac{2\pi}{1-a^2}\,,$$

protože $z=a$ je pól 1. řádu, který leží ve vnitřní oblasti jednotkové kružnice a

$$\operatorname*{res}_{z=a} \frac{-1}{\mathrm{i}\,[az^2-(a^2+1)z+a]} = \lim_{z\to a}\frac{-(z-a)}{ia(z-a)(z-\frac{1}{a})} = \frac{-1}{\mathrm{i}\,(a^2-1)}\,.$$

11.14. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\,,\ 0<a<1\,.$

Výsledek : Hodnota integrálu je $\dfrac{1+a^2}{1-a^2}\pi\,.$

V příkladech 11.15 - 11.38 vypočítejte podle obecného návodu hodnoty daných integrálů 2. typu. Touto metodou se dají počítat na základě symetrie také integrály ze sudé funkce v intervalu $<0,\infty)$.

4a **11.15.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}\,.$

Řešení : Absolutní konvergence nevlastního integrálu je zaručena tím, že stupeň jmenovatele je o dvě větší než stupeň čitatele a že integrovaná funkce je spojitá pro všechna $x \in \mathcal{R}$ (jmenovatel nemá reálné kořeny). Proto podle obecného postupu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = 2\pi\mathrm{i} \operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{1}{z^2+2z+5} = 2\pi\mathrm{i}\, \frac{1}{z_1-z_2} = \frac{\pi}{2},$$

kde jmenovatel má kořeny $z_1 = -1+2\mathrm{i}$, $z_2 = -1-2\mathrm{i}$ (póly 1.řádu), z nichž v horní polorovině leží pouze bod z_1.

4b

11.16. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+4}$.

Řešení : Výpočet integrálu touto metodou je umožněn tím, že integrovaná funkce je sudá. Po rozložení jmenovatele na součin vyjde

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{6\mathrm{i}} - \frac{1}{12\mathrm{i}}\right) = \frac{\pi}{12},$$

kde jmenovatel má kořeny $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = -\mathrm{i}$, $z_3 = 2\mathrm{i}$, $z_4 = -2\mathrm{i}$, z nichž v horní polorovině leží pouze z_1 a z_3 a vypočítáme

$$\operatorname*{res}_{z=\mathrm{i}} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{z-\mathrm{i}}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})(z^2+4)} = \frac{1}{2\mathrm{i}(\mathrm{i}^2+4)} = \frac{1}{6\mathrm{i}},$$

$$\operatorname{res} z = 2\mathrm{i}\, \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to 2\mathrm{i}} \frac{z-2\mathrm{i}}{(z^2+1)(z-2\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})} = -\frac{1}{12\mathrm{i}}.$$

11.17. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$.

Výsledek : Podmínky pro použití obecného postupu jsou splněny, takže

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1} = 2\pi\mathrm{i}\, \frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

11.18. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}$.

Výsledek : Podmínky pro použití obecného postupu jsou splněny, takže

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13} = 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{6\mathrm{i}} = \frac{\pi}{3}.$$

11.19. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$.

Výsledek : Podmínky pro použití obecného postupu jsou splněny a integrovaná funkce je sudá, takže

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)} = \pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{16\mathrm{i}} - \frac{1}{48\mathrm{i}}\right) = \frac{\pi}{24}.$$

11.20. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Výsledek : Podmínky pro použití obecného postupu jsou splněny, takže

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = 2\pi\mathrm{i}\,\left(\frac{-1}{6\mathrm{i}} + \frac{-4}{-12\mathrm{i}}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

4e

11.21. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Výsledek : Podmínky pro použití obecného postupu jsou splněny, takže

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{6} - \frac{2}{12}\right) = 0.$$

Výsledek odpovídá tomu, že se integruje lichá funkce v souměrném intervalu.

11.22. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x^2-2x+2)}$.

Výsledek : Podmínky pro použití obecného postupu jsou splněny, takže

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x^2-2x+2)} = 2\pi\mathrm{i}\,\left(\frac{1}{2(1-2\mathrm{i})} + \frac{1+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}(2\mathrm{i}+1)}\right) = \frac{\pi}{5}.$$

kde[1]

$$\gamma_k(t) := \begin{cases} \alpha_k(t+k), & \text{je-li } t \in \langle -2k, 0), \\ \beta_k(t), & \text{je-li } t \in \langle 0, \pi \rangle. \end{cases}$$

Nyní uvažujme kruh $U(0,r) \subset \mathbb{C}$ tak velký, aby obsahoval všechny kořeny polynomu Q (takový jistě existuje!). Pak pro každé reálné číslo $k > r$ platí

$$\int_{\gamma_k} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = \int_{\gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz,$$

a proto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{\gamma_k} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = \int_{\gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz.$$

A teď aplikujme reziduovou větu:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \int_{\gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{\substack{z_k\in\mathbb{C}:\\ Q(z_k)=0,\\ \operatorname{Im} z_k>0}} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right).$$

4c

Příklad 9.9.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left((x-(-1+i))\,(x-(-1-i))\right)^2}\, dx =$$

$$= 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-1+i} \frac{1}{\left((z-(-1+i))\,(z-(-1-i))\right)^2} = 2\pi i \lim_{z\to-1+i} \left(\frac{1}{(z-(-1-i))^2}\right)' =$$

$$= 2\pi i \left[-2\frac{1}{(z-(-1-i))^3}\right]_{z=-1+i} = \frac{\pi}{2}.$$

[1]Namalujte si geometrické obrazy křivek α_k, β_k, γ_k.

3 Výpočet určitých integrálů pomocí reziduové věty

V této části si probereme několik základních typů výpočtu určitých integrálů pomocí techniky založené na reziduové větě. V následujících aplikacích leží těžiště důležitosti reziduové věty.

(a) Integrály racionálních funkcí $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$.

Předpokládejme, že $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy s reálnými koeficienty, přičemž stupeň polynomu Q je alespoň o dva větší než stupeň polynomu P. Nechť Q nemá žádné kořeny na reálné ose. Budeme počítat integrál

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx.$$

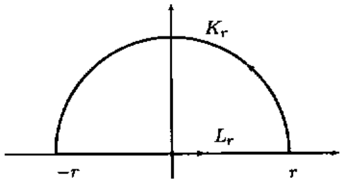
(Rozmyslete si, že za daných předpokladů integrál existuje!) Myšlenka výpočtu spočívá v nalezení vhodné uzavřené křivky obsahující úsečku na reálné ose. Zvolme pro kladný parametr $r > 0$ kladně orientovanou křivku $C_r = L_r \cup K_r$, kde $L_r = [-r, r]$ je úsečka na reálné ose a K_r horní polokružnice se středem v počátku a poloměru r (viz obr. 7.3).

Zvolme navíc poloměr r tak velký, že C_r obsahuje ve svém vnitřku všechny kořeny polynomu $Q(z)$ ležící v horní polorovině. Za základní funkci zvolme funkci

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Podle reziduové věty

$$\int\limits_C f(z)\,dz = 2\pi j \sum_{\substack{\{z \mid Q(z)=0 \\ \operatorname{Im} z>0\}}} \operatorname{res}_z f(z).$$



Obr. 7.3.

Tento křivkový integrál je možno na druhé straně napsat ve tvaru součtu

$$\int\limits_{C_r} f = \int\limits_{L_r} f + \int\limits_{K_r} f. \tag{7.3}$$

Přitom

$$\int\limits_{L_r} f(z)\,dz = \int\limits_{-r}^{r} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx.$$

Pro $r \to \infty$ dá tento integrál požadovaný nevlastní integrál. Vtip postupu spočívá v tom, že racionální funkce $f(z)$ klesá v nekonečnu k nule alespoň s rychlostí poklesu funkce $\frac{1}{z^2}$, což zajistí

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{K_r} f(z)\,dz = 0.$$

Skutečně, díky předpokladu o stupních polynomů má racionální funkce

$$\frac{z^2 P(z)}{Q(z)}$$

vlastní limitu v nekonečnu. To implikuje, že tato funkce je v absolutní hodnotě omezená v jistém okolí nekonečna P konstantou M:

$$\left|\frac{z^2 P(z)}{Q(z)}\right| \le M \qquad \text{tj.} \qquad \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \le \frac{M}{|z|^2}, \qquad z \in P.$$

Pro křivku K_r ležící v okolí nekonečna P můžeme pomocí Tvrzení 3.1 odhadnout

$$\left|\int\limits_{K_r} f(z)\,dz\right| \le \text{délka}(K_r) \cdot \max_{z\in K_r} |f(z)| \le \pi r \cdot \frac{M}{r^2} = \frac{\pi M}{r} \to 0 \quad \text{pro } r \to \infty.$$

Limitním přechodem $r \to \infty$ v (7.3) pak dostáváme

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi j \sum_{\substack{\{z \mid Q(z)=0 \\ \operatorname{Im} z>0\}}} \operatorname{res}_z \frac{P(z)}{Q(z)}.} \tag{7.4}$$

4a

Příklad 7.3. Vypočtěme $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx$, $a > 0$. Jedná se o integrál z racionální funkce, která vyhovuje předpokladům uvedeným výše pro $P(z) = z^2$ a $Q(z) = (z^2+a^2)^2$. Jediným nulovým bodem funkce $Q(z)$ v otevřené horní polorovině je bod aj, který je pólem druhého řádu funkce $\frac{P(z)}{Q(z)}$ s reziduem

$$\operatorname{res}_{aj} \frac{P(z)}{Q(z)} = \lim_{z\to aj} \left((z-aj)^2 \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}\right)' = \lim_{z\to aj} \left(\frac{z^2}{(z+aj)^2}\right)' = \lim_{z\to aj} \frac{2ajz}{(z+aj)^3} = \frac{1}{4aj}.$$

Tím máme

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx = 2\pi j \operatorname{res}_{aj} \frac{P(z)}{Q(z)} = 2\pi aj \frac{1}{4aj} = \frac{\pi}{2a}.$$

(b) Integrály goniometrických funkcí $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx$.

Podrobněji se nyní podíváme na integrál vpravo. Pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ platí nerovnost

$$\sin t \geq \frac{2}{\pi} t.$$

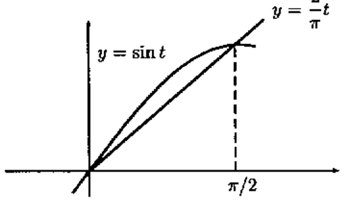
Tato nerovnost je důsledkem konkávnosti funkce sin na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ (viz obr. 7.4).

Díky symetrii funkce sinus vzhledem k bodu $\frac{\pi}{2}$ také máme, že

$$\int_0^{\pi} e^{-r\sin t}\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin t}\, dt.$$

Skutečně, pro každé $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ platí

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right).$$



Obr. 7.4.

Tedy

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-r\sin t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin(\frac{\pi}{2}+t)}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin(\frac{\pi}{2}-t)}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin t}\, dt.$$

(V poslední rovnosti jsme použili substituci $u = \frac{\pi}{2} - t$.) Platí tedy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin t}\, dt \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\frac{2}{\pi}t}\, dt < 2\int_0^{\infty} e^{-r\frac{2}{\pi}t}\, dt =$$
$$= 2\frac{1}{\frac{2}{\pi}r} = \frac{\pi}{r}.$$

Vrátíme-li se k nerovnosti (7.6) máme

$$\left|\int_{K_r} f(z)e^{jz}\, dz\right| \leq rM(r)\frac{\pi}{r} = \pi M(r).$$

Jelikož podle předpokladu $\lim_{r\to\infty} M(r) = 0$, je též

$$\lim_{r\to\infty}\int_{K_r} f(z)e^{jz}\, dz = 0.$$

□

Pro racionální funkci $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ s reálnými koeficienty a $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$ máme podle Jordanova lemmatu

$$\lim_{r\to\infty}\int_{K_r} R(z)e^{jz}\, dz = 0.$$

Dále je možno postupovat zcela stejně jako v případu (a) a odvodit

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{jx}\, dx = 2\pi j \sum_{\substack{\{z \mid Q(z)=0 \\ \operatorname{Im} z>0\}}} \operatorname{res}_z R(z)e^{jz}. \tag{7.7}$$

5

Příklad 7.5. Určeme integrál $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jx}}{x^2+4}\, dx}$. Jedná se o integrál výše uvedeného typu pro $R(z) = \frac{1}{z^2+4}$. Podle (7.7)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jx}}{x^2+4}\, dx = 2\pi j \operatorname{res}_{2j} \frac{e^{jz}}{z^2+4} = 2\pi j \frac{e^{-2}}{2\cdot 2j} = \frac{\pi}{2}e^{-2}.$$

Přechodem k reálné části daného integrálu máme

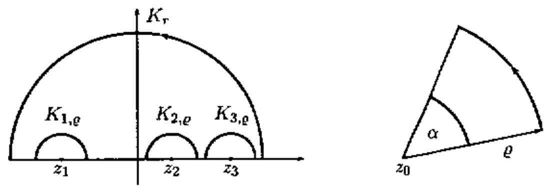
$$\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jx}}{x^2+4}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}\, dx = \frac{\pi}{2}e^{-2}.$$

(d) Integrály typu $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos x\, dx$ (resp. $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin x\, dx$).

V této části se budeme zabývat integrály výše uvedeného typu, kde $R(z)$ je racionální funkce s reálnými koeficienty a $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$, mající jednoduché póly na reálné ose a to pouze v nulových bodech funkce $\cos x$ (resp. $\sin x$). Postup výpočtu si ukážeme na integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin x\, dx$. Označme $z_1, z_2, \ldots, z_k$ póly funkce f ležící na reálné ose. Podle předpokladu jsou to celočíselné násobky π. Výpočet integrálu spočívá v integraci funkce

$$f(z) = R(z)e^{jz}$$

přes křivku $C_{r,\varrho}$ skládající se z úseček, polokružnic $K_{1,\varrho}, K_{2,\varrho}, \ldots K_{k,\varrho}$ a polokružnice K_r tak, jak je to znázorněno na obr. 7.5 (a) (případ k=3).



(a) (b)

Obr. 7.5.

1. řádu), v horní polorovině leží pouze body z_1 a z_2. Reziduum je vhodné vypočítat obecně pro singulární bod z_k (pomocí l'Hospitalova pravidla) a výsledek upravit rozšířením z_k

$$\operatorname*{res}_{z=z_k} \frac{1}{z^4+1} = \lim_{z\to z_k} \frac{z-z_k}{z^4+1} = \lim_{z\to z_k} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{z_k}{4z_k^4} = \frac{z_k}{-4}\,, \quad k = 1, 2.$$

11.32. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+4}$.

Výsledek : Hodnota integrálu je $\dfrac{\pi}{4}$.

11.33. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^6+1}$.

Řešení : Podmínky pro použití obecného postupu jsou splněny, takže

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^6+1} = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{i}}{-6} + \frac{-\mathrm{i}}{-6} + \frac{\mathrm{i}}{-6}\right) = \frac{\pi}{3},$$ kde integrovaná funkce má

v horní polorovině póly 1.řádu $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$, $z_2 = \mathrm{i}$, $z_3 = \dfrac{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$.
Rezidua je vhodné počítat obecně pro singulární bod z_k (pomocí l'Hospitalova pravidla)

$$\operatorname*{res}_{z=z_k} \frac{z^2}{z^6+1} = \lim_{z\to z_k} \frac{(z-z_k)z^2}{z^6+1} = \lim_{z\to z_k} \frac{z^2}{6z^5} = \frac{z_k^2}{6z_k^5} = \frac{z_k^3}{-6},\quad k = 1,2,3.$$

Přitom $z_2^3 = \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$,

$$z_1^3 = \frac{1}{8}(\sqrt{3}+i)^3 = \frac{1}{8}(3\sqrt{3}+3.3\mathrm{i} + 3\sqrt{3}\mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3) = \frac{1}{8}(9\mathrm{i} - \mathrm{i}) = \mathrm{i}\,,$$

$$z_3^3 = \frac{1}{8}(-\sqrt{3}+\mathrm{i})^3 = \frac{1}{8}(-3\sqrt{3}+3.3\mathrm{i} - 3\sqrt{3}\mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3) = \frac{1}{8}(9\mathrm{i} - \mathrm{i}) = \mathrm{i}.$$

11.34. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$.

Výsledek : Hodnota integrálu je $\dfrac{2\pi}{3}$.

11.35. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4\,dx}{x^6+1}$.

Výsledek : Je překvapující, že hodnota integrálu $\dfrac{2\pi}{3}$ je stejná jako v předcházejícím příkladu.

11.36. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-2x+5)^3}$.

Řešení : Jmenovatel má v tomto případě dva trojnásobné kořeny $z_1 = 1+2\mathrm{i}$, $z_2 = 1-2\mathrm{i}$, takže počítáme reziduum v pólu 3. řádu

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{1}{(z^2-2z+5)^3} = \lim_{z\to z_1} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\frac{(z-z_1)^3}{(z-z_1)^3(z-z_2)^3} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to z_1} \frac{12}{(z-z_2)^5} = \frac{6}{(z_1-z_2)^5} = \frac{6}{(4\mathrm{i})^5} = \frac{3}{512\mathrm{i}}\,.$$

Hodnota integrálu je tedy $\dfrac{3\pi}{256}$.

11.37. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+4)^3}$.

Výsledek : V bodě $z_1 = 2\mathrm{i}$ je pól 3. řádu ;

$$\operatorname*{res}_{z=2\mathrm{i}} \frac{z^2}{(z^2+4)^3} = \frac{\pi}{128\mathrm{i}} \quad\Rightarrow\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+4)^3} = \frac{\pi}{64}\,.$$

11.38. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+4x+5)^3}$.

Výsledek : V bodě $z_1 = -2+\mathrm{i}$ je pól 3. řádu ;

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{z^2}{(z^2+4z+5)^3} = \frac{13\pi}{8\mathrm{i}} \quad\Rightarrow\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+4x+5)^3} = \frac{13\pi}{4}\,.$$

V příkladech 11.39 - 11.56 vypočítejte podle obecného návodu hodnoty daných integrálů 3. typu. Touto metodou se dají počítat na základě symetrie také integrály ze sudé funkce v intervalu $<0,\infty)$.

601 **11.39.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2-2x+5}\,dx$.

Řešení : Racionální funkce má požadované vlastnosti, takže můžeme přejít k funkci komplexní proměnné a použít reziduovou větu.

$$\oint_C \frac{e^{\mathrm{i}z}\,dz}{z^2-2z+5} = 2\pi\mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}(1+2\mathrm{i})}}{4\mathrm{i}} = \frac{\pi e^{-2+\mathrm{i}}}{2} = \frac{\pi}{2e^2}(\cos 1 + \mathrm{i}\sin 1)\,,$$

kde $z_1 = 1+2\mathrm{i}$ je jediný pól 1. řádu v horní polorovině a

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{e^{\mathrm{i}z}\,dz}{z^2-2z+5} = \lim_{z\to z_1} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z-z_2} = \frac{e^{\mathrm{i}z_1}}{z_1-z_2} = \frac{e^{\mathrm{i}(1+2\mathrm{i})}}{4\mathrm{i}}\,.$$

Pro rovnost reálných částí vyjde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2-2x+5}\,dx = \mathrm{Re}\oint_C \frac{e^{iz}\,dz}{z^2-2z+5} = \frac{\pi\cos 1}{2e^2} \doteq 0,11486\,.$$

6e

11.40. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2-2x+5}\,dx\,.$

Výsledek : Výpočet se provede stejně jako v př. 11.39, výsledek dostanete z rovnosti imaginárních částí;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2-2x+5}\,dx = \mathrm{Im}\oint_C \frac{e^{iz}\,dz}{z^2-2z+5} = \frac{\pi\sin 1}{2e^2} \doteq 0,17888\,.$$

11.41. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2-4x+8}\,dx\,.$

Výsledek : Podobně jako v předcházejícím příkladu

$$\oint_C \frac{e^{iz}\,dz}{z^2-4z+8} = 2\pi i\,\frac{e^{i(2+2i)}}{4i} = \frac{\pi e^{-2+2i}}{2} = \frac{\pi}{2e^2}(\cos 2 + i\sin 2)\,.$$

Pro rovnost reálných částí vyjde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2-2x+5}\,dx = \mathrm{Re}\oint_C \frac{e^{iz}\,dz}{z^2-2z+5} = \frac{\pi\cos 2}{2e^2} \doteq -0.0885\,.$$

11.42. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+2x+2}\,dx\,.$

Výsledek : Podobně jako v předcházejících příkladech

$$\oint_C \frac{e^{iz}\,dz}{z^2+2z+2} = 2\pi i\,\frac{e^{i(-1+i)}}{2i} = \pi e^{-1-i} = \frac{\pi}{e}(\cos 1 - i\sin 1)\,.$$

Pro rovnost reálných částí vyjde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+2x+2}\,dx = \mathrm{Re}\oint_C \frac{e^{iz}\,dz}{z^2+2z+2} = \frac{\pi\cos 1}{e} \doteq 0,6244\,.$$

11.43. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+2}\,dx\,.$

Výsledek : Výpočet se provede stejně jako v př. 11.42, ale výsledek dostanete z rovnosti imaginárních částí;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+2}\,dx = \mathrm{Im}\oint_C \frac{e^{iz}\,dz}{z^2+2z+2} = -\frac{\pi\sin 1}{e} \doteq -0,8415\,.$$

11.44. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2-2x+2}\,dx\,.$

Výsledek : Podobně jako v předcházejících příkladech

$$\oint_C \frac{e^{iz}\,dz}{z^2+2z+2} = 2\pi i\,\frac{e^{i(1+i)}}{2i} = \pi e^{-1+i} = \frac{\pi}{e}(\cos 1 + i\sin 1)\,.$$

Pro rovnost reálných částí vyjde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2-2x+2}\,dx = \mathrm{Re}\oint_C \frac{e^{iz}\,dz}{z^2-2z+2} = \frac{\pi\cos 1}{e} \doteq 0,6244\,.$$

Proč může vyjít stejný výsledek jako v př. 11.42 ?

11.45. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2-2x+2}\,dx\,.$

Výsledek : Výpočet se provede stejně jako v př. 11.44, ale výsledek dostanete z rovnosti imaginárních částí;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2-2x+2}\,dx = \mathrm{Im}\oint_C \frac{e^{iz}\,dz}{z^2-2z+2} = \frac{\pi\sin 1}{e} \doteq 0,8415\,.$$

Proč vyjde ve srovnání s př. 11.43 opačný výsledek ?

11.46. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+4}\,dx\,.$

Řešení : Jmenovatel racionální lomené funkce má kořeny $z_1 = 1+i$, $z_2 = -1+i$, $z_3 = -1-i$, $z_4 = 1-i$. Racionální funkce má všechny požadované vlastnosti, takže můžeme přejít k funkci komplexní proměnné. Při výpočtu reziduí vyjde (pomocí l'Hospitalova pravidla)

$$\operatorname*{res}_{z=z_k} \frac{e^{iz}}{z^4+4} = \lim_{z\to z_k} \frac{(z-z_k)e^{iz}}{z^4+4} = \lim_{z\to z_k} \frac{e^{iz}}{4z^3} =$$

$$= \frac{e^{iz_k}}{4z_k^3} = \frac{z_k\,e^{iz_k}}{4z_k^4} = \frac{z_k\,e^{iz_k}}{-16}\,,\quad k = 1,2,3,4.$$

Podle reziduové věty

$$\oint_C \frac{e^{iz}\,dz}{z^4+4} = 2\pi i\left(\frac{(1+i)\,e^{i(1+i)}}{-16} + \frac{(-1+i)e^{i(-1+i)}}{-16}\right) =$$

$$= -\frac{\pi i}{8}[(1+i)\,e^{-1+i} + (-1+i)\,e^{-1-i}] = \frac{\pi i}{4e}\left(\frac{e^{i}-e^{-i}}{2} + \frac{i(e^{i}+e^{-i})}{2}\right) =$$

$$= -\frac{\pi i}{4e}\left(\frac{i(e^{i}-e^{-i})}{2i}+\frac{i(e^{i}+e^{-i})}{2}\right)=\frac{\pi}{4e}(\sin 1+\cos 1)\,.$$

protože v horní polorovině leží dva póly 1. řádu z_1 a z_2.
Vzhledem k tomu, že integrovaná funkce je sudá, můžeme psát

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^4+4}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^4+4}\,dx=\frac{1}{2}\oint_C \frac{e^{iz}}{z^4+4}=\frac{\pi}{8e}(\sin 1+\cos 1)\,.$$

11.47. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^4+4}\,dx\,.$

Výsledek : Podobně jako v předcházejícím příkladu dostanete podle reziduové věty a vzhledem k tomu, že integrovaná funkce je sudá

$$\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^4+4}\,dx=\mathrm{Im}\,\frac{1}{2}\oint_C \frac{z\,e^{iz}}{z^4+4}=\frac{\pi\sin 1}{4e}.$$

11.48. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,,\ a\in\mathcal{R}^+\,.$

Řešení : Racionální funkce má všechny požadované vlastnosti, takže můžeme přejít k funkci komplexní proměnné a použít reziduovou větu.

$$\oint_C \frac{e^{iz}\,dz}{z^2+a^2}=2\pi i\,\frac{e^{i(ai)}}{2ai}=\frac{\pi e^{-a}}{a}=\frac{\pi}{a\,e^a}\,,$$

kde $z_1=a\,i$ je jediný pól 1. řádu v horní polorovině a

$$\operatorname*{res}_{z=ai}\frac{e^{iz}\,dz}{z^2+a^2}=\lim_{z\to ai}\frac{e^{iz}}{z+ai}=\frac{e^{i(ai)}}{2ai}\,.$$

V tomto případě vyšla reálná hodnota, která je přímo rovna hodnotě daného integrálu. V integrálu $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x^2+a^2}\,dx$ je integrovaná funkce lichá funkce, takže tento integrál je roven nule.

11 49. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2\,(x^2+4)^2}\,dx\,.$

Výsledek : Podle reziduové věty a vzhledem k tomu, že integrovaná funkce je sudá, vyjde

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2\,(x^2+4)^2}\,dx=\frac{1}{2}\oint_C \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2\,(z^2+4)^2}\,dz=\frac{\pi(2e-1)}{12\,e^2}\,,$$

protože integrovaná funkce má dva póly 1. řádu v horní polorovině ($z_1=i$, $z_2=2i$).

11 50. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x}{(x^2+1)^2\,(x^2+4)^2}\,dx\,.$

Výsledek : Podle reziduové věty a vzhledem k tomu, že integrovaná funkce je sudá, vyjde

$$\int_0^\infty \frac{x\sin x}{(x^2+1)^2\,(x^2+4)^2}\,dx=\mathrm{Im}\,\frac{1}{2}\oint_C \frac{ze^{iz}}{(z^2+1)^2\,(z^2+4)^2}\,dz=\frac{\pi(e-1)}{6\,e^2},$$

protože integrovaná funkce má dva póly 1. řádu v horní polorovině ($z_1=i$, $z_2=2i$).

6ℓ **11.51.** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(x^2-4x+5)^2}\,dx\,.$

Řešení : Racionální funkce má požadované vlastnosti, takže můžeme přejít k funkci komplexní proměnné, která má v horní polorovině pól 2. řádu $z_1=2+i$.

$$\operatorname*{res}_{z=z_1}\frac{e^{iz}\,dz}{(z^2-4z+5)^2}=\lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\frac{e^{iz}}{(z-z_2)^2}=\frac{e^{iz}[i(z-z_2)-2]}{(z-z_2)^3}=$$

$$=\frac{e^{i(2+i)}(i2i-2)}{(2i)^3}=\frac{e^{-1}\,e^{2i}(-4)}{-8i}=\frac{4}{e}\frac{(\cos 2+i\sin 2)}{8i}\,.$$

Podle věty o reziduích

$$\oint_C \frac{e^{iz}\,dz}{(z^2-4z+5)^2}=2\pi i\,\frac{4}{e}\frac{\cos 2+i\sin 2}{8i}=\frac{\pi}{e}(\cos 2+i\sin 2)\,.$$

Pro rovnost reálných částí vyjde

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(x^2-4x+5)^2}\,dx=\mathrm{Re}\oint_C \frac{e^{iz}\,dz}{(z^2-2z+5)^2}=\frac{\pi\cos 2}{e}\doteq -0{,}481\,.$$

11.52. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(x^2+2x+2)^2}\,dx\,.$