8. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Funkci $f(z)$ nazveme *holomorfní* v ∞, je-li funkce $f(1/z)$ holomorfní v 0. *Laurentovou řadou se středem v* ∞ rozumíme řadu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z_n}$$

přičemž její *regulární částí* rozumíme $\sum_{n=-\infty}^{0} a_n z^n$ (tedy tu část, která je holomorfní v ∞) a *hlavní částí* řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. *Reziduem v* ∞ rozumíme $-a_1$.

Definice 2. Bod ∞ je k-násobným pólem funkce f, jestliže 0 je pól násobnosti k transformované funkce $f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Věta 3. Funkce f má v ∞ pól násobnosti k právě tehdy, když

$$f(z) = z^k g(z),$$

kde g je holomorfní funkce v okolí ∞ s vlastní a nenulovou limitou v ∞.

Věta 4.

- Je-li ∞ odstranitelná singularita funkce f, pak

$$\operatorname{res}_\infty f = \lim_{z\to\infty} z^2 f'(z).$$

- Je-li ∞ k-násobným pólem funkce f, pak

$$\operatorname{res}_\infty f = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \lim_{z\to\infty} \left(z^{k+2} f(z)^{(k+1)} \right)$$

- $$\operatorname{res}_\infty f = \operatorname{res}_0 \frac{-1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$$

Věta 5 (Reziduová)**.** Nechť Γ je jednoduše uzavřená křivka, probíhaná v kladném smyslu vzhledem ke svému vnitřku. Nechť dále jsou $a_1, a_2, \ldots, a_k$ body z jejího vnitřku. Je-li f holomorfní na $\operatorname{Int}\Gamma \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$ a spojitá na $\overline{\operatorname{Int}\Gamma} \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$, pak je

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{res}_{a_j} f.$$

Věta 6. Nechť f je holomorfní v $\mathbb{C}$ až na konečně mnoho izolovaných singularit $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \ldots k$. Pak je

$$\sum_{j=1}^{k} \operatorname{res}_{a_j} f + \operatorname{res}_\infty f = 0.$$

Lemma 7. Nechť R je racionální funkce, která nemá póly na $\mathbb{R}$ a která nabývá na $\mathbb{R}$ pouze reálných hodnot. Nechť je holomorfní na množině $D := \{z \in \mathbb{C}; \Im z \geq 0\}$ s výjimkou konečné množiny M ležící uvnitř D. Nechť $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$. Pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{w\in M} res_w R(z)e^{iz}$$

Lemma 8. Nechť R je racionální funkce, $R = P/Q$, kde P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že stupeň Q je alespoň o 2 větší než stupeň P a Q nemá kořeny na reálné ose. Nechť M je množina všech kořenů Q, které mají kladnou imaginární část. Pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{w\in M} res_w R(z)$$

Lemma 9. Nechť Q je racionální lomená funkce, nechť izolované singulární body funkce

$$f(z) = Q\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2zi}\right)$$

neleží na jednotkové kružnici.

Pak

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos\varphi, \sin\varphi)\mathrm{d}\varphi = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}_{z_k} \frac{1}{iz} Q\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2zi}\right),$$

kde z_k jsou póly ležící ve vnitřní oblasti jednotkové kružnice.

Příklady

1. Určete residuum v ∞

   (a) $e^{1/z}$

   (b) $ze^{1/z}$

   (c) $z^2e^{1/z}$

   (d) $z^3\cos\frac{1}{z}$

   (e) $(z+1)e^{\frac{z-1}{z}}$

2. Spočtěte integrály, všechny křivky orientovány kladně:

   (a) $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)^2}$, C je $|z| = \frac{1}{2}$.

   (b) $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^{100}}$, C je $|z| = 2$.

   (c) $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-1)(z-3)^2}$, C je uzavřená křivka obsahující ve svém vnitřku body -1 a 1 a ve svém vnějšku bod 3.

   (d) $\int_C \frac{z\,\mathrm{d}z}{\sin z(1-\cos z)}$, C je $|z| = 1$.

   (e) $\int_C \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}\,\mathrm{d}z$, C je $\varphi(t) = 2 + \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

   (f) $\int_C \frac{e^z}{z(z^2+1)}\,\mathrm{d}z$, C je $|z+1+i| = 2$.

   (g) $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-3)(z^{10}-1)}$, C je kružnice se středem v 0 a poloměrem 2.

3.

(a) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\frac{5}{4}-\cos x}$

(b) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1-2a\cos x+a^2}$, $a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$

(c) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{5+3\cos x}$

(d) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$, $a > b > 0$

(e) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(5-4\cos x)^2}$

4. (a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}$

   (b) $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+5x^2+4}$

   (c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2}$

   (d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x$, $a > 0$

   (e) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+a^4}\,\mathrm{d}x$, $a > 0$

   (f) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)}$

   (g) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{4+x^4}$

5. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$

6. (a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$, $a > 0$

   (b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x$

   (c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x$

   (d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2-4x+5)^2}\,\mathrm{d}x$

7. Jaké hodnoty může nabývat integrál $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^n(1-z)}$, $n \in \mathbb{N}$, kde C je jednoduchá uzavřená křivka neprocházející body 0 a 1.

8. Doplňte křížovku

   (a) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ...... řada

   (b)
$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(w) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(w), \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(w) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(w),$$
   ...... podmínky

   (c) Funkce, která má derivace v každém bodě jisté otevřené množiny.

   (d) Reálná funkce $f(x,y)$ dvou proměnných definovaná na otevřené množině G, která má na G **spojité parciální derivace 2. řádu** a v každém bodě G platí:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

   (e) Nechť f je holomorfní na **po částech hladké Jordanově** křivce C a na jejím vnitřku. Potom je
$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$
   Cauchy-...... ova věta.

   (f) Každá omezená celistvá funkce je konstantní.
   ...... věta

   (g) Souvislá množina, jejíž doplněk je také souvislý - jednoduše ...... množina.

   (h) Křivka $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ prostá na intervalu $[a,b]$.

(i) Křivka $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, pro niž $\Phi(a) = \Phi(b)$.

(j) Křivka $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, prostá na $[a, b)$ a uzavřená.

(k) Daný směr zvětšování délky křivky.

(l) Bod uzávěru definičního oboru, v němž funkce není definovaná nebo není holomorfní.

(m) Singularita w, pro niž
$$\lim_{z \to w} f(z) = \infty.$$

(n) Koeficient a_{-1} v Laurentově řadě.

(o) Pole f, pro nějž
$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

(p)
$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$