Umíme-li tedy nalézt koeficient a_{-1} Laurentovy řady, můžeme křivkový integrál funkce f vypočítat následovně

$$\int_C f(w)\,\mathrm{d}w = 2\pi\mathrm{j}\,a_{-1}. \tag{6.3}$$

To motivuje následující definici.

Definice 6.5. *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je singularita funkce f. Koeficient a_{-1} Laurentovy řady funkce f se středem v bodě z_0 se nazývá* ***reziduum funkce f v bodě z_0*** *a značí se $\operatorname{res}_{z_0} f(z)$.*

V případě $z_0 = \infty$ se číslo $-a_1$, kde a_1 je koeficient v Laurentově rozvoji funkce f se středem v bodě ∞, nazývá ***reziduum funkce f v ∞*** *a značí se $\operatorname{res}_\infty f(z)$.*

Reziduum je slovo latinského původu znamenající zbytek. Důvod pro toto pojmenování spočívá v následujícím pozorování. Když budeme počítat křivkový integrál $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ přes uzavřenou křivku tak, že funkci f vyjádříme pomocí Laurentovy řady, pak po integraci zbyde pouze jediný nenulový člen $\int_C \frac{a_{-1}}{z}\,\mathrm{d}z$.

V úvodu jsme vysvětlili, že reziduum funkce ve vlastním bodě reprezentuje jistý křivkový integrál. Nyní se podíváme na význam rezidua v nekonečnu. Předpokládejme, že nekonečno je singulární bod funkce f, která je holomorfní v oblasti $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\}$. Zvolme jednoduchou uzavřenou *záporně orientovanou křivku* $C \subset D$ mající počátek ve svém vnitřku. Zcela jistě lze zvolit mezikruží $P(0; r_1, r_2)$ obsahující křivku C (viz např. obr.5.2(b)). Podle Věty 5.1 o stejnoměrné konvergenci Laurentovy řady je Laurentův rozvoj

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

stejnoměrně konvergentní v mezikruží $P(0; r_1, r_2)$, tedy i na křivce C. Z Tvrzení 3.3 plyne, že pro integraci součtu Laurentovy řady tedy můžeme zaměnit pořadí integrace a sumace a integrovat člen po členu:

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_C \frac{1}{z^n}\,\mathrm{d}z.$$

Podle Cauchyova vzorce je ovšem $\int_C \frac{1}{z^n}\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{j}$, je-li $n = 1$ a pro jiné hodnoty n je tento integrál nulový. Z poslední nerovnosti tak plyne

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{j}\,a_{-1}.$$

Podobně jako ve vlastním bodě tedy máme

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j}\operatorname{res}_\infty f(z). \tag{6.4}$$

Na rozdíl od vlastního bodu je ovšem křivka C *záporně* orientovaná. Oba případy mají však společné to, že při probíhání křivky ve smyslu její orientace je singularita vždy vlevo.

Definice 6.4. *Bod ∞ je k-**násobný pól funkce** f, jestliže 0 je pól násobnosti k transformované funkce $f\left(\frac{1}{z}\right)$.*

Tvrzení 6.3. *Funkce f má v nekonečnu pól násobnosti k právě tehdy, když*

$$f(z) = z^k g(z),$$

kde g je holomorfní funkce v okolí nekonečna s vlastní a nenulovou limitou v nekonečnu.

Důkaz. Podle Tvrzení 6.2 můžeme transormovanou funkci $q(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ reprezentovat v okolí počátku ve tvaru

$$q(z) = \frac{h(z)}{z^k},$$

kde h je holomorfní v nule a $h(0) \neq 0$. Pak ale

$$f(z) = q\left(\frac{1}{z}\right) = z^k h\left(\frac{1}{z}\right).$$

Volbou $g(z) = h(\frac{1}{z})$ pak dostaneme holomorfní funkci v ∞ s limitou

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = h(0) \neq 0.$$

□

2a

Příklad 6.5. Funkce $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ má v nekonečnu pól násobnosti dvě. To je vidět z Tvrzení 6.3 zvolíme-li $k = 2$ a $g(z) = e^{\frac{1}{z}}$, neboť $\lim_{z\to\infty} e^{\frac{1}{z}} = 1$.

Tvrzení 6.2 a 6.3 jsou specifické pro komplexní funkce. Konverguje-li holomorfní funkce v nekonečnu k nekonečnu pak konverguje s rychlostí jisté mocniny z^k. To v reálné analýze neplatí. Stačí se podívat na exponenciální funkci

$$f(x) = e^x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

která má derivace všech řádů a pro $x \to \infty$ roste k nekonečnu podstatně rychleji než jakákoliv mocnina a tedy rychleji než každý polynom.

Zbývá případ podstatné singularity. Z předešlého výkladu víme, že funkce f nemůže být v žádném okolí své podstatné singularity z_0 omezená, jinak by šlo o odstranitelnou singularitu (Věta 6.1). Existuje tedy posloupnost bodů $z_n \to z_0$ taková, že $f(z_n) \to \infty$. Na druhé straně nekonečno není limitou funkce f v z_0. Musí tedy současně existovat jiná posloupnost $w_n \to z_0$ s vlastí limitou $\lim_{n\to\infty} f(w_n)$. Obecně se ukazuje, že f zobrazí každé prstencové okolí podstatné singularity na „velkou množinu". V této souvislosti si uvedeme hlubokou Pickardovu větu.

Věta 6.2. (Pickardova věta) *Je-li z_0 podstatná singularita funkce f, pak f zobrazí každé prstencové okolí bodu z_0 buďto na celou komplexní rovinu nebo na komplexní rovinu bez jednoho bodu.*

2c

•**Příklad 6.6.** Pomocí Laurentova rozvoje klasifikujme následující singularity

1c

$f_1(z) = \frac{\sin z}{z^2}$, $z_0 = 0$;

$f_2(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$;

$f_3(z) = \sin z$, $z_0 = \infty$.

2b

Začneme s funkcí f_1:

$$f_1(z) = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} + \cdots, \qquad z \neq 0.$$

Tedy $a_{-1} = 1, a_{-n} = 0$ pro všechna $n > 1$, což znamená, že f_1 má v nule pól prvního řádu.

Pro f_2 je

$$f_2(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}, \qquad z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

V tomto případě jsou všechny koeficienty odpovídající záporným mocninám nenulové a bod 0 je tedy podstatnou singularitou. Zbývá

$$f_3(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}.$$

Tuto řadu interpretujeme jako řadu se středem v bodě nekonečno, tj.

$$a_{-(2n+1)} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \neq 0, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

To znamená, že ∞ je podstatnou singularitou funkce f_3.

3 Reziduum funkce

Reziduum je důležitou číselnou charakteristikou singularity dané funkce. Umožňuje výpočet křivkového integrálu podél uzavřené křivky mající tuto singularitu ve svém vnitřku. Mnohdy je metoda reziduí jediným způsobem, jak hodnotu integrálu zjistit. Výpočet vychází z vyjádření koeficientů Laurentovy řady. Připomeňme si, že pro koeficienty Laurentova rozvoje funkce

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

platí

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w,$$

kde C je jakákoliv jednoduchá uzavřená křivka ležící v prstencovém okolí bodu z_0, ve kterém je f holomorfní, a která má bod z_0 ve svém vnitřku. Pouze v jednom speciálním případě se za integrálem na pravé straně předchozí rovnosti objeví pouze funkce f. Položíme-li totiž $n = -1$ máme

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_C f(w)\,\mathrm{d}w.$$

Zůstaňme ještě chvíli u funkce f a křivky C z obrázku 5.2(b) a předpokládejme navíc, že f je holomorfní v celé komplexní rovině mimo bod 0. Pro rozvoj v nekonečnu tedy máme

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

zatímco pro rozvoj v bodě 0 platí

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n.$$

Díky jednoznačnosti Laurentova rozvoje dostáváme

$$b_n = a_{-n} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Speciálně je tedy

$$\operatorname{res}_0 f(z) + \operatorname{res}_\infty f(z) = b_{-1} - a_1 = a_1 - a_1 = 0.$$

Celkový součet reziduí v obou singularitách je tedy nula. To vysvětluje výhodnost záporného znaménka u koeficientu odpovídacího mocnině z^{-1} při definici rezidua v nekonečnu.

3a **Příklad 6.7.** (a) Vypočteme $\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{z^3}$. Laurentův rozvoj má tvar

$$\frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \cdots,$$

a tedy

$$\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{z^3} = a_{-1} = 0.$$

3b (b) Vypočtěme $\operatorname{res}_\infty z^2 e^{\frac{1}{z}}$. Laurentův rozvoj v nekonečnu je (viz Příklad 5.3)

$$z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 + z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \cdot \frac{1}{z^n}.$$

v 0 : $\frac{1}{z^2} e^z = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

u z je koeficient $\frac{1}{3!}$

Vidíme tedy, že

$$\operatorname{res}_\infty z^2 e^{\frac{1}{z}} = -a_1 = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}.$$

Pro stanovení rezidua funkce je možno jako univerzální metody použít rozvoje v Laurentovu řadu. V případě podstatné singularity žádný jiný způsob k dispozici nemáme. V případě odstranitelné singularity ve vlastním bodě je reziduum vždy nulové. Zbývá pól. V tomto případě existuje několik pravidel pro výpočet rezidua, které si probereme.

Tvrzení 6.5. *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je k-násobný pól funkce f. Pak*

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \Big((z-z_0)^k f(z) \Big). \tag{6.5}$$

Speciálně, pro jednonásobný pól z_0 máme

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \tag{6.6}$$

Důkaz. Ke vzorci (6.5) můžeme dospět následující intuitivní úvahou. Hlavní část Laurentova rozvoje v případě pólu řádu k začíná výrazem $\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$. Vynásobíme-li tedy Laurentův rozvoj funkce f mocninou $(z-z_0)^k$ získáme mocninnou řadu mající koeficient a_{-1} u $(k-1)$-ní mocniny. Zderivujeme-li tuto řadu $(k-1)$-krát, bude hledaný koeficient absolutním členem řady. Nyní přesněji. Podle Tvrzení 6.2 je

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + \cdots.$$

Vynásobíme-li tuto rovnost výrazem $(z-z_0)^k$ máme

$$(z-z_0)^k f(z) = a_{-k} + a_{-k+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{k-1} + a_0(z-z_0)^k + \cdots.$$

Nyní budeme obě strany získaného vztahu $(k-1)$-krát derivovat.

$$\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\Big((z-z_0)^k f(z)\Big) = (k-1)!\,a_{-1} + k!(z-z_0) + \cdots. \tag{6.7}$$

Provedeme-li limitu $z \to z_0$, získáme

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\Big((z-z_0)^k f(z)\Big) = (k-1)!\,a_{-1}. \tag{6.8}$$

Tedy

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\Big((z-z_0)^k f(z)\Big)$$

□

Pro použití vzorce (6.5) je třeba správně stanovit násobnost pólu.

(3c) • **Příklad 6.8.** Vypočtěme $\operatorname{res}_{2\mathrm{j}}\frac{z+2}{(z-2\mathrm{j})^2(z+1)}$. Bod 2j je pól druhého řádu. Podle (6.5) máme

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{2\mathrm{j}}\frac{z+2}{(z-2\mathrm{j})^2(z+1)} &= \lim_{z\to 2\mathrm{j}}\left(\frac{z+2}{z+1}\right)' = \lim_{z\to 2\mathrm{j}} -\frac{1}{(z+1)^2} = \\ &= -\frac{1}{(2\mathrm{j}+1)^2} = \frac{3+4\mathrm{j}}{25}.\end{aligned}$$

Následující pravidlo je možno použít pro výpočet rezidua jednoduchého pólu podílu dvou funkcí.

Tvrzení 6.6. *Nechť f a g jsou funkce holomorfní na okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Nechť z_0 je jednonásobný kořen funkce g. Pak*

$$\operatorname{res}_{z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}. \tag{6.9}$$

Důkaz. Je-li $f(z_0) = 0$ má podíl $\dfrac{f}{g}$ odstranitelnou singularitu v z_0 a tedy

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0 = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Předpokládejme proto, že $f(z_0) \neq 0$. Pak podíl $\dfrac{f}{g}$ má v bodě z_0 jednonásobný pól. Podle (6.6) můžeme psát

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{\dfrac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

(Při úpravě jsme využili skutečnosti, že $g(z_0) = 0$.) □

Příklad 6.9. Funkce $f(z) = \operatorname{cotg} z$ má singularity v bodech $k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Přitom

$$\operatorname{res}_{k\pi} f(z) = \operatorname{res}_{k\pi} \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{\cos k\pi}{\cos k\pi} = 1.$$

Tvrzení 6.7. *Nechť f je funkce holomorfní v okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ a g má v bodě z_0 jednonásobný pól. Pak*

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z)g(z) = f(z_0) \operatorname{res}_{z_0} g(z). \tag{6.10}$$

Důkaz. Spočívá v aplikaci Tvrzení 6.6. Bod z_0 je singularitou součinu fg, která může být jednonásobným pólem nebo odstranitelnou singularitou (je-li $f(z_0) = 0$). Podle definice násobnosti pólu si funkci g můžeme představit ve tvaru

$$g(z) = \frac{1}{h(z)},$$

kde h je holomorfní funkce na okolí z_0, $h(z_0) = 0$ a $h'(z_0) \neq 0$. Podle Tvrzení 6.6

$$\operatorname{res}_{z_0} g(z) = \frac{1}{h'(z_0)}.$$

Opětovným použitím pravidla (6.9) dostaneme

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z)g(z) = \operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{h(z)} = \frac{f(z_0)}{h'(z_0)} = f(z_0) \operatorname{res}_{z_0} g(z).$$

□

3a o **Příklad 6.10.** Funkce $f(z) = z \operatorname{cotg} z$ má singularity v bodech $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Položíme-li $f(z) = z$ a $g(z) = \operatorname{cotg} z$ jsou splněny předpoklady Tvrzení 6.7, což znamená, že

$$\operatorname{res}_{k\pi} z \operatorname{cotg} z = k\pi \operatorname{res}_{k\pi} \operatorname{cotg} z = k\pi.$$

(Využili jsme výsledku předchozího příkladu.)

Limitním přechodem je konečně

$$\lim_{z\to\infty} z^2 f'(z) = -a_1 = \operatorname{res}_\infty f(z).$$

(ii) Odvození pravidla pro reziduum ve vícenásobném pólu sleduje stejnou myšlenku jako při odvozování vzorce pro pól ve vlastním bodě. Na základě Tvrzení 6.4 víme, že Laurentův rozvoj je tvaru

$$f(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_1 z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots .$$

Hlavní část řady je polynom stupně k, který eliminujeme, budeme-li předchozí rovnost $k+1$ krát derivovat. Máme tak

$$f^{(k+1)}(z) = (k+1)!\frac{(-1)^{k+1}a_1}{z^{k+2}} + (k+2)!\frac{(-1)^k a_2}{z^{k+3}} + \cdots$$

Vynásobením z^{k+2} a limitou $z \to \infty$ získáme

$$\lim_{z\to\infty} z^{k+2} f^{(k+1)}(z) = (-1)^{k+1}(k+1)!\, a_1.$$

Odtud konečně

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = -a_1 = \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\lim_{z\to\infty}\left(z^{k+2}\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}z^{k+1}} f(z)\right).$$

□

3e

Příklad 6.11. (a) Stanovme reziduum funkce $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ v nekonečnu. V tomto případě se jedná o odstranitelnou singularitu s $f(\infty) = 1$. Vyzkoušíme si výpočet podle obou pravidel uvedených v Tvrzení 6.8.

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = \lim_{z\to\infty} z\left(1 - e^{\frac{1}{z}}\right) = \lim_{u\to 0}\frac{1-e^u}{u} = -1.$$

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = \lim_{z\to\infty} z^2\left(e^{\frac{1}{z}}\right)' = \lim_{z\to\infty} z^2 e^{\frac{1}{z}}\cdot -\frac{1}{z^2} = -1.$$

3f

(b) Spočítejme $\operatorname{res}_\infty z e^{\frac{1}{z}}$.
Nevlastní bod je pólem prvního řádu.

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{-1}{2!} z^3\left(z e^{\frac{1}{z}}\right)'' = -\lim_{z\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{z}}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

n = -1

Postup založený na vzorci (6.13) může někdy vést ke zdlouhavému výpočtu. I v našem případě je snažší získat požadované reziduum z Laurentova rozvoje:

$$z e^{\frac{1}{z}} = z\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots\right) = z + 1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{3!z^2} + \cdots .$$

Vidíme tedy, že $a_1 = \frac{1}{2}$, což dá ihned $\operatorname{res}_\infty f(z) = -\frac{1}{2}$.

Věta 9.3. *Platí:*

(i) *Je-li* $z_0 \in \mathbb{C}$ **odstranitelnou singularitou funkce** f, *je* $\operatorname{res} f(z_0) = 0$. [a]

(ii) *Je-li funkce* f *holomorfní v bodě* $z_0 \in \mathbb{C}$ *a má-li funkce* g *v bodě* z_0 **jednoduchý pól**, *je*

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} (f(z)g(z)) = f(z_0) \operatorname*{res}_{z=z_0} g(z).$$

(iii) *Jsou-li funkce* f *a* g *holomorfní v bodě* $z_0 \in \mathbb{C}$ *a je-li bod* z_0 **jednonásobným kořenem** *funkce* g, [b] *je*

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} \left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

(iv) *Je-li bod* $z_0 \in \mathbb{C}$, *resp.* ∞ **pólem násobnosti** k *funkce* f, *je*

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \left(\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \left(f(z)(z-z_0)^k\right)\right),$$

resp.

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \lim_{z\to+\infty} \left(z^{k+2} \frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}z^{k+1}} f(z)\right).$$

(v) *Je-li funkce* f *holomorfní v* $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, *kde* $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ *jsou (navzájem různé) izolované singularity funkce* f, *je*

$$\operatorname{res} f(\infty) + \sum_{i=1}^{n} \operatorname{res} f(z_i) = 0.$$

[a] **Varovný příklad!** Uvažujeme-li funkci $f(z) := \frac{1}{z}$, je ∞ odstranitelnou singularitou funkce f, a přesto platí: $\operatorname{res} f(\infty) = -1 \neq 0$.

[b] Tzn. $g(z_0) = 0 \neq g'(z_0)$.

Cvičení 9.4. Pokuste se o důkaz věty 9.3.

3g 3h 3i

Příklady 9.5. Vypočtěte

a) $\displaystyle\operatorname*{res}_{z=0} \left(z^2 \sin\frac{1}{z}\right)$,

b) $\displaystyle\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{z^3 \sin z}{\cos(2z)}$,

c) $\displaystyle\operatorname*{res}_{z=2\pi i} \frac{1}{(e^z-1)^2}$.

Řešení.

Ad a)

Pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí

$$z^2 \sin\frac{1}{z} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n-1}},$$

a proto

$$\operatorname*{res}_{z=0} \left(z^2 \sin\frac{1}{z}\right) = \frac{-1}{3!} = -\frac{1}{6}.$$

Ad b)

Protože $\frac{\pi}{4}$ je zřejmě jednonásobným kořenem funkce

$$g(z) := \cos(2z),$$

je [1]

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{z^3 \sin z}{\cos(2z)} = \left[\frac{z^3 \sin z}{-2\sin(2z)}\right]_{z=\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}\pi^3}{256}.$$

Ad c)

Protože $2\pi i$ je zřejmě pólem násobnosti 2 funkce, jejíž reziduum počítáme, je [2]

$$\operatorname*{res}_{z=2\pi i} \frac{1}{(e^z-1)^2} = \frac{1}{1!} \lim_{z\to 2\pi i} \left[\frac{(z-2\pi i)^2}{(e^z-1)^2}\right]' = \dots = -1.$$

▲

9.2 Reziduová věta

Věta 9.6 (Reziduová). *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je jednoduše souvislá oblast, nechť* γ *je jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka v* Ω *a nechť funkce* f *je holomorfní na* $\Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, *kde* $\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \in \operatorname{int}\gamma$ *jsou (navzájem různé) izolované singularity funkce* f.
Potom platí:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{res} f(z_i).$$

Důkaz je snadným důsledkem definice rezidua a vět 5.10 a 8.2. □

[1] Viz větu 9.3 – část (iii).

[2] Viz větu 9.3 – část (iv).

11

• **Úloha**: Charakterizujte funkce, které jsou holomorfní v $\mathbb{C}$ a mají v ∞ odstranitelnou singularitu. Dokažte pomocí toho Liouvilleovu větu.

Řešení: Každou funkci f holomorfní v $\mathbb{C}$ je možno reprezentovat mocninnou řadou se středem v bodě 0

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Na druhé straně, odstranitelná singularita v ∞ znamená, že f má Laurentův rozvoj v ∞

$$f(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Opět platí, že poloměr konvergence této řady je ∞. Máme tedy rovnost

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Díky jednoznačnosti koeficientů Laurentovy řady musí platit

$$a_0 = b_0, \qquad a_n = b_n = 0 \qquad \text{pro všechna } n \neq 0.$$

Jinými slovy, $f(z) = a_0$ je konstantní funkce. Vzhledem k tomu, že každá omezená holomorfní funkce má v nekonečnu odstranitelnou singularitu (Věta 6.1), je Liouvilleova věta okamžitým důsledkem.

Úloha: Charakterizujte funkce f holomorfní v $\mathbb{C}$, pro které platí

$$|f(z)| \le M|z|^k \qquad \text{pro všechna } z \text{ v jistém okolí nekonečna,}$$

kde k je přirozené číslo a $M \ge 0$.

Řešení: Podle předpokladu je funkce $\frac{f(z)}{z^k}$ omezená v nějakém okolí nekonečna. Díky Větě 6.1 má tato funkce v nekonečnu vlastní limitu. Má tedy Laurentův rozvoj

$$\frac{f(z)}{z^k} = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots$$

pro všechna $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tedy

$$f(z) = b_0 z^k + b_1 z^{k-1} + b_2 z^{k-2} + \cdots + b_k + \frac{b_{k+1}}{z} + \cdots. \tag{6.14}$$

pro všechna $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Funkce f je holomorfní v $\mathbb{C}$, a proto řada v (6.14) je současně rozvojem funkce f v bodě 0. To ale dle jednoznačnosti koeficientů rozvoje znamená, že $0 = b_n$ pro všechna $n \ge k+1$. Odtud

$$f(z) = b_0 z^k + b_1 z^{k-1} + b_2 z^{k-2} + \cdots + b_k.$$

Funkce f je tedy polynomem stupně nejvýše k.

32

• **Úloha**: Nalezněte reziduum funkce $f(z) = (z+1)e^{\frac{z-1}{z}}$ v bodech (a) $z_0 = 0$, (b) $z_0 = \infty$.

Řešení: (a) Bod $z_0 = 0$ je podstatnou singularitou (ověřte!), a proto jediný způsob jak nalézt reziduum je stanovit Laurentův rozvoj v bodě 0. Využitím standardního rozvoje pro exponenciální funkci a algebraických úprav máme

$$f(z) = (z+1)e^{\frac{z-1}{z}} = zee^{\frac{-1}{z}} + ee^{\frac{-1}{z}} = = e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n-1}n!} + e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n n!}.$$

Sečtením koeficientů u mocniny $1/z$ v obou řadách máme

$$\mathrm{res}_0 f(z) = e\frac{(-1)^2}{2!} + e\frac{(-1)}{1} = -\frac{1}{2}e.$$

(b) Reziduum v nekonečnu můžeme rychle získat z bodu (a). Vzhledem k tomu, že f nemá jiné singularity než 0 a ∞ je Laurentova řada v nekonečnu současně Laurentovou řadou v bodě nula. Reziduum v nekonečnu je pak záporně vzatým koeficientem u $1/z$. Proto

$$\mathrm{res}_\infty f(z) = -\,\mathrm{res}_0 f(z) = \frac{1}{2}e.$$

V další kapitole ukážeme obecnější pravidlo říkající, že součet všech reziduí funkce s konečně mnoha singularity je nulový. Konečně poznamenejme, že bod ∞ je jednonásobným pólem funkce f, neboť

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = e.$$

K výpočtu rezidua tedy můžeme použít i vztahu (6.13). Tento postup však vede k delšímu derivování.

37

• **Úloha**: Vypočtěte $\mathrm{res}_0 \frac{1-\cos z}{z^3}$.

Řešení: Bod 0 je pól násobnosti jedna funkce $\frac{1-\cos z}{z^3}$ (ověřte!) Podle vztahu (6.6) je

$$\mathrm{res}_0 \frac{1-\cos z}{z^3} = \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{2z} = \frac{1}{2}.$$

(Při výpočtu jsme použili l'Hospitalova pravidla.)

8

• **Úloha**: Předpokládejme, že z_0 je izolovaný singulární bod funkcí f_1 a f_2. Ukažte, že

$$\mathrm{res}_{z_0}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha\,\mathrm{res}_{z_0} f_1 + \beta\,\mathrm{res}_{z_0} f_2 \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Řešení: Linearita v chování rezidua jako zobrazení na prostoru funkcí vyplývá bezprostředně z jeho definice. Je-li totiž

$$f_1(z) = \sum_{n-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{a} \quad f_2(z) = \sum_{n-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n,$$

pak

$$\alpha f_1(z) + \beta f_2(z) = \sum_{n-\infty}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)(z - z_0)^n.$$

Odtud ihned vyplývá dokazovená rovnost pro rezidua, která se často používá v konkrétních případech.

3l

• **Úloha**: Vypočtěte reziduum $\operatorname{res}_{3j}\left(\frac{e^z}{z^2(z^2+9)} + \frac{\cos \pi z}{4z^2-1}\right)$.

Řešení: Bod 3j je jednonásobným pólem funkce $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$. Funkce $\frac{\cos \pi z}{4z^2-1}$ je v bodě 3j holomorfní. To znamená, že podle předchozí Úlohy je

$$\operatorname{res}_{3j}\left(\frac{e^z}{z^2(z^2+9)} + \frac{\cos \pi z}{4z^2-1}\right) = \operatorname{res}_{3j}\frac{e^z}{z^2(z^2+9)} = \frac{e^{3j}}{(3j)^2 2\cdot 3j} = j\frac{e^{3j}}{54}.$$

Pro hodnotu jsme použili vzorec z Tvrzení 6.6.

Úloha: Vypočtěte rezidua funkce $f(z) = \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$.

Řešení: Vlastní singularity dostaneme jako řešení rovnice

$$\sin\frac{1}{z} = 0.$$

Nulové body této funkce jsou body $z_k = \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Funkce není také definována v nule. Tento bod však není *izolovanou* singularitou neboť v každém jeho okolí leží nějaký bod z_k. Další singularitou je bod ∞. Podíváme se nejdříve na rezidua v bodech z_k. V těchto bodech má funkce $\sin(1/z)$ kořen násobnost jedna. Aplikací (6.9) máme

$$\operatorname{res}_{z_k}\frac{1}{\sin\frac{1}{z}} = \frac{1}{(\sin\frac{1}{z})'}\Big|_{z=z_k} = -\frac{1}{\frac{1}{z_k^2}\cos\frac{1}{z_k}} = -\frac{1}{k^2\pi^2\cos k\pi} = (-1)^{k+1}\frac{1}{k^2\pi^2}.$$

Pokusme se nyní stanovit typ singularity v nekonečnu. Je zřejmé, že se jedná o pól, protože

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{\sin(\frac{1}{z})} = \infty.$$

Protože hodnoty funkce $\sin\frac{1}{z}$ jsou pro velká z přibližně rovna $\frac{1}{z}$, vede nás k intuice k pólu násobnosti jedna. Formální zdůvodnění je následující

$$f(z) = z\frac{1}{z\sin\frac{1}{z}} = zg(z),$$

kde g je holomorfní funkce s limitou $\lim_{z\to\infty} g(z) = \lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u} = 1$.

Jednu z možností výpočtu rezidua v nekonečnu nabízí vzorec (6.13). V našem případě dá pro $k = 1$

$$\operatorname{res}_\infty f(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{1}{2}z^3 f''(z).$$

Tento postup však vede k delšímu derivování a pak k těžkopádnému výpočtu limity několikanásobným použitím l'Hospitolova pravidla. Elegantnějším způsobem výpočtu je stanovení koeficientů u mocniny z^{-1} v Laurentově rozvoji. Víme, že

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \cdots.$$

První členy Laurentova rozvoje funkce f ve nekonečnu můžeme získat algoritmem dělení.

$$\begin{array}{l}
1 \qquad : \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \cdots\right) = z + \frac{1}{6z} + \cdots \\
-\left(1 - \frac{1}{6z^2} + \frac{1}{5!z^4} + \cdots\right) \\
\qquad \frac{1}{6z^2} - \frac{1}{5!z^4} + \cdots \\
\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Odtud $\operatorname{res}_\infty f(z) = -\frac{1}{6}$.

Úloha: Určete $\operatorname{res}_{\pi j}(e^z + 1)^{-2}$.

Řešení: Jedná se o reziduum v pólu druhého řádu. Postupujeme-li podle vzorce (6.5) je

$$\operatorname{res}_{\pi j}(e^z+1)^{-2} = \lim_{z\to\pi j}\left(\frac{(z-\pi j)^2}{(e^{\pi z}+1)^2}\right)'.$$

Pokud bychom počítali vzniklou limitu přímo, čekalo by nás nepříjemné derivování a poté trojnásobné použití l'Hospitalova pravidla. Těmto obtížím se vyhneme, jestliže nalezneme část Laurentova rozvoje obsahující mocninu $(z-\pi j)^{-1}$. Taylorův rozvoj funkce $e^z + 1$ v bodě πj je

$$\begin{aligned}
e^z + 1 &= e^{z-\pi j}e^{\pi j} + 1 = -e^{z-\pi j} + 1 = -\frac{(z-\pi j)}{1!} - \frac{(z-\pi j)^2}{2!} - \cdots \\
&= -(z-\pi j)\left(1 + \frac{(z-\pi j)}{2!} + \frac{(z-\pi j)^2}{3!} + \cdots\right).
\end{aligned}$$

Tedy

$$\frac{1}{(e^z+1)^2} = \frac{1}{(z-\pi j)^2\left(1 + \frac{(z-\pi j)}{2!} + \frac{(z-\pi j)^2}{3!} + \cdots\right)^2}.$$

Pro zkrácení zápisu označme $w = z - \pi j$. Pak první členy druhé mocniny řady jsou

$$\left(1 + \frac{w}{2} + \frac{w^2}{6} + \cdots\right)^2 = 1 + w + \frac{7w^2}{12} + \cdots.$$

4

• **Příklad 5.2.1.** *Vypočítejte rezidua v pólech funkce* $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$.

d

Řešení: Funkce $f(z)$ je racionální lomená funkce, takže má za singularity pouze póly, a to jsou kořeny jmenovatele.
Řešíme rovnici $z^3 - z^5 = 0$, $z^3(1 - z^2) = 0$, $z^3(1 - z)(1 + z) = 0$. Máme dva jednoduché kořeny $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, a jeden trojnásobný kořen $z_3 = 0$.
Funkce $f(z)$ má v bodech $z_1 = 1$ a $z_2 = -1$ póly prvního řádu a v bodě $z_3 = 0$ pól třetího řádu.

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{z^3 - z^5} = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)}{z^3(1-z)(1+z)} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{-z^3(1+z)} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{1}{z^3 - z^5} = \lim_{z\to -1}\frac{(z+1)}{z^3(1-z)(1+z)} = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(z^3\frac{1}{z^3 - z^5}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z^3}{z^3(1-z^2)}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{1-z^2}\right)'' =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{2z}{(1-z^2)^2}\right)' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{2(1-z^2)^2 + 2z2(1-z^2)2z}{(1-z^2)^4} = 1.$$

• **Příklad 5.2.2.** *Vypočítejte rezidua v pólech funkce* $f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2}$.

h

Řešení: Řešíme rovnici $(1 + z^2)^2 = 0$, $(z + \mathrm{j})^2(z - \mathrm{j})^2 = 0$.
Funkce $f(z)$ má v bodech $z_1 = \mathrm{j}$ a $z_2 = -\mathrm{j}$ póly druhého řádu.

$$\operatorname*{res}_{z=\mathrm{j}} f(z) = \lim_{z\to \mathrm{j}}\left((z-\mathrm{j})^2\frac{z^2}{(1+z^2)^2}\right)' = \lim_{z\to \mathrm{j}}\left(\frac{z^2(z-\mathrm{j})^2}{(z-\mathrm{j})^2(z+\mathrm{j})^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to \mathrm{j}}\left(\frac{z^2}{(z+\mathrm{j})^2}\right)' = \lim_{z\to \mathrm{j}}\frac{2z\mathrm{j}}{(z+\mathrm{j})^3} = \frac{1}{4\mathrm{j}} = -\frac{\mathrm{j}}{4},$$

$$\operatorname*{res}_{z=-\mathrm{j}} f(z) = \lim_{z\to -\mathrm{j}}\left((z+\mathrm{j})^2\frac{z^2}{(1+z^2)^2}\right)' = \lim_{z\to -\mathrm{j}}\frac{-2z\mathrm{j}}{(z-\mathrm{j})^3} = \frac{-1}{4\mathrm{j}} = \frac{\mathrm{j}}{4}.$$

• **Příklad 5.2.3.** *Vypočítejte rezidua v pólech funkce* $f(z) = \frac{1}{\sin z}$.

e

Řešení: Funkce $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, kde $\varphi(z) = 1$ a $\psi(z) = \sin z$ jsou holomorfní funkce na $\mathbb{C}$, funkce $\varphi(z) = 1$ je nenulová všude a $\psi(z) = \sin z = 0$ v bodech $z_k = k\pi$, k celé. Navíc $\sin' z = \cos z$ je v bodech z_k nenulové.
Funkce $f(z)$ má tehdy v bodech $z_k = k\pi$, k celé, póly prvního řádu a

$$\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{\sin' k\pi} = \frac{1}{\cos k\pi} = \frac{1}{(-1)^k} = (-1)^k.$$

• **Příklad 5.2.4.** *Vypočítejte rezidua v pólech daných funkcí*

f a) $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ b) $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$ g

Řešení: a) Funkce $f(z)$ je podílem dvou holomorfních funkcí, kde $\varphi(z) = 1$ je nenulová na $\mathbb{C}$. Musíme vyřešit rovnici $1 + z^4 = 0$. Je to binomická rovnice, po úpravě máme $z^4 = -1$. Při řešení této rovnice využijeme zápis komplexních čísel v goniometrickém tvaru na obou stranách rovnice a Moivreovou větu.

Dostaneme kořeny $z_k = \frac{(2k+1)\pi\mathrm{j}}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Navíc $(1 + z^4)' = 4z^3$ je v bodech z_k nenulové.

Funkce $f(z)$ má tehdy v bodech $z_1 = \frac{\pi}{4}\mathrm{j}$, $z_2 = \frac{3\pi}{4}\mathrm{j}$, $z_3 = \frac{5\pi}{4}\mathrm{j}$ a $z_4 = \frac{7\pi}{4}\mathrm{j}$

póly prvního řádu a $\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{z_k}{4z_k^4} = \frac{z_k}{4(-1)} = -\frac{z_k}{4}$.

b) Postupujeme podobně jako v části a). Řešíme binomickou rovnici $1+z^n = 0$.

Dostaneme kořeny $z_k = \frac{(2k+1)\pi\mathrm{j}}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Derivace $(1+z^n)' = nz^{n-1}$ je v bodech z_k nenulové. Jsou to póly prvního řádu.

$$\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{nz_k^{n-1}} = \frac{z_k}{nz_k^n} = \frac{z_k}{n(-1)} = -\frac{z_k}{n}.$$

• **Příklad 5.2.5.** *Určete u daných funkcí řád pólů a vypočítejte rezidua v těchto pólech*

a a) $f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)}$ b) $f(z) = \frac{1}{1+z^3}$ b c) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$

c d) $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z-1)}$ e) $f(z) = \frac{1}{\cos z}$, f) $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$

Řešení: a) $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 1$, $\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = -\frac{1}{2}$, $\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = -\frac{1}{2}$;

b) $\operatorname*{res}_{z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}} f(z) = -\frac{1}{6}(1+\sqrt{3}\mathrm{j})$, $\operatorname*{res}_{z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}} f(z) = -\frac{1}{6}(1-\sqrt{3}\mathrm{j})$

$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{3}$; c) $\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = 1$, $\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = -1$;

d) $\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{4}$, $\operatorname*{res}_{z=\mathrm{j}} f(z) = -\frac{1}{8}$, $\operatorname*{res}_{z=-\mathrm{j}} f(z) = -\frac{1}{8}$;

e) $\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi} f(z) = (-1)^{k+1}$, k celé; f) $\operatorname*{res}_{z=2k\pi\mathrm{j}} f(z) = 1$, k celé.

4 Cvičení

• **Úloha:** Nalezněte a klasifikujte izolované singulární body funkce $f(z) = \operatorname{tg} z$.

5

Řešení: Funkce f má singularity v nekonečně mnoha bodech

$$z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Bod z_k není kořenem funkce $\sin z$ a je jednonásobným kořenem funkce $\cos z$. Všechny body z_k jsou tedy jednonásobnými póly. Bod ∞ není v tomto případě izolovanou singularitou, neboť v každém jeho okolí leží nějaká singularita funkce f.

X • **Úloha:** Nalezněte a klasifikujte singularity funkce $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2(e^z + \cosh z)^2}$.

Řešení: Vyhledáme nejdříve nulové body jmenovatele, tj. vyřešíme rovnici

$$z^2(e^z + \cosh z)^2 = 0,$$

která implikuje, že $z = 0$ nebo

$$e^z + \cosh z = 0.$$

Z poslední rovnice plyne

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = -e^z,$$

a tedy $e^{2z} = -\frac{1}{3}$. Proto

$$2z \in \operatorname{Ln}\left(-\frac{1}{3}\right) = \left\{\ln\frac{1}{3} + \mathrm{j}(\pi + 2k\pi) \,\Big|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Tím dostáváme nekonečně mnoho nulových bodů

$$z_k = -\frac{1}{2}\ln 3 + \mathrm{j}\frac{\pi}{2} + \mathrm{j}k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Protože bod 0 je jednonásobným kořenem funkce $\sin z$ a dvojnásobným kořenem funkce $z^2(e^z + \cosh z)^2$, znamená to, že nula je jednonásobným pólem funkce $f(z)$. Jelikož

$$e^{z_k} + \cosh z_k = 0, \quad \text{zatímco derivace} \quad e^{z_k} + \sinh z_k \neq 0,$$

vidíme, že z_k je jednonásobný kořen funkce $e^z + \cosh z$, a tedy dvojnásobným kořenem funkce $z^2(e^z + \cosh z)^2$. Protože z_k není kořenem funkce $\sin z$ (čitatele zkoumaného výrazu), je tento bod dvojnásobným pólem funkce $f(z)$. Bod ∞ není v tomto případě izolovaným singulárním bodem ze stejných důvodů jako v předchozí úloze.

Úloha: Nechť funkce $f(z)$ má podstatnou singularitu v bodě $z_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a funkce $g(z)$ je holomorfní v jistém prstencovém okolí bodu z_0, přičemž $\lim_{z\to z_0} g(z) \neq 0$. Ukažte, že součin

$$h(z) = f(z)g(z)$$

má podstatnou singularitu v bodě z_0.

Řešení: Neexistence limity funkce f v bodě z_0 znamená, že existují dvě posloupnosti (z_k) a (w_k) konvergující k bodu z_0, takové, že $\lim_{k\to\infty} f(z_k) \neq \lim_{k\to\infty} f(w_k)$. Pak ovšem

$$\lim_{k\to\infty} h(z_k) \neq \lim_{k\to\infty} h(w_k).$$

Funkce h tedy nemá v bodě z_0 limitu.

6

• **Úloha:** Rozhodněte, zda ∞ je izolovaný singulární bod funkce $f(z) = \sin z^2 \cos\dfrac{1}{z}$ a v kladném případě stanovte typ singularity!

Řešení: Funkce $f(z)$ má vlastní singularitu pouze v nule, a proto je holomorfní v oblasti $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jelikož funkce $\sin z^2$ nemá limitu v nekonečnu a $\lim_{z\to\infty} \cos\frac{1}{z} = 1$, vidíme podle předchozí úlohy, že ∞ je podstatnou singularitou funkce f.

7

• **Úloha:** Rozhodněte zda funkce $f(z) = \dfrac{\sin z \cos\frac{1}{z}}{z^5}$ má v ∞ izolovanou singularitu a určete její typ.

Řešení: Bod ∞ je singularitou ze stejných důvodů jako v předchozí úloze. Protože $\cos(1/z) \to 1$ při $z \to \infty$, vyšetříme funkci $h(z) = \dfrac{\sin z}{z^5}$. Pohybujeme-li se po reálné ose k nekonečnu je

$$\lim_{\substack{t\to\infty\\ t\in\mathbb{R}}} h(t) = 0.$$

Podívejme se nyní na chování funkce $h(z)$ na imaginární ose. Zde máme

$$\lim_{\substack{t\to\infty\\ t\in\mathbb{R}}} h(\mathrm{j}t) = \lim_{\substack{t\to\infty\\ t\in\mathbb{R}}} \frac{\sin jt}{j^5 t^5} = \lim_{\substack{t\to\infty\\ t\in\mathbb{R}}} -\frac{e^{-t} - e^t}{2t^5} = \infty.$$

Funkce h tedy limitu v nekonečnu nemá, a proto je ∞ podstatnou singularitou.

X • **Úloha:** Stanovte typ singularity $z_0 = 3$ funkce $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{z^2 - 9} \cos\dfrac{1}{z-3}$.

Řešení: Fuknci rozepíšeme na $\dfrac{\sin \pi z}{z-3} \cdot \dfrac{1}{z+3} \cos\dfrac{1}{z-3}$. Pro první část máme

$$\lim_{z\to 3} \frac{\sin \pi z}{z-3} = \lim_{z\to 3} \pi \cos \pi z = -\pi \neq 0,$$

zatímco zbylá část $\dfrac{1}{z+3} \cos\dfrac{1}{z-3}$ nemá v bodě 3 limitu. Bod 3 je proto bodem podstatné singularity.

Algoritmem pro dělení polynomů získáváme

$$
\begin{array}{l}
1 \quad : \left(1 + w + \frac{7w^2}{12} + \cdots\right) = 1 - w + \cdots \\
-\left(1 + w + \frac{7w^2}{12} + \cdots\right) \\
\quad - w - \frac{7w^2}{12} - \cdots \\
\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

Závěrem získáváme počáteční členy Laurentova rozvoje

$$\frac{1}{w^2(e^w+1)^2} = \frac{1}{w^2} - \frac{1}{w} + \cdots .$$

Tedy

$$\operatorname{res}_{\pi j} \frac{1}{(e^z+1)^2} = -1.$$

• **Úloha**: Nechť $P(z)$ a $Q(z)$, $Q \neq 0$ jsou polynomy stejného stupně. Určete $\operatorname{res}_\infty \dfrac{P(z)}{Q(z)}$.

Řešení: Označme

$$
\begin{aligned}
P(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \qquad a_n \neq 0. \\
Q(z) &= b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_0, \qquad b_n \neq 0.
\end{aligned}
$$

Jelikož

$$\lim_{z\to\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n}{b_n}$$

je nekonečno odstranitelnou singularitou. Podle (6.11) platí

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res}_\infty \frac{P(z)}{Q(z)} &= \lim_{z\to\infty} z\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{P(z)}{Q(z)}\right) = \lim_{z\to\infty} \frac{z(a_n Q(z) - b_n P(z))}{b_n Q(z)} = \\
&= \frac{a_n b_{n-1} - b_n a_{n-1}}{b_n^2}.
\end{aligned}
$$

• **Úloha**: Charakterizujte ryze lomené racionální funkce, které mají nulové reziduum v nekonečnu!

Řešení: Reprezentujme ryze lomenou funkci ve tvaru podílu dvou polynomů

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

kde polynom Q má větší stupeň než polynom P. Označme jako a a b koeficienty u nejvyšších mocnin polynomů P a Q. Jelikož $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$ máme podle (6.11)

$$\operatorname{res}_\infty R(z) = -\lim_{z\to\infty} z\frac{P(z)}{Q(z)} = \begin{cases} \frac{-a}{b}, & \text{je-li } stQ = stP + 1 \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{6.15}$$

Závěrem tedy máme, že $\operatorname{res}_\infty R(z) = 0$ právě tehdy když stupeň polynomu ve jmenovateli je alespoň o dva větší než stupeň polynomu v čitateli.

1. Nalezněte a klasifikujte izolované singulární body následujících funkcí:
   - (a) $z^3 - 2z + \mathrm{j}$
   - (b) $\dfrac{z+\pi}{z^2 \sin z}$
   - (c) $\dfrac{1}{z - z^3}$
   - (d) $\dfrac{1}{(z^2+\mathrm{j})^3}$
   - (e) $\dfrac{1}{\sin z}$
   - (f) $\dfrac{\operatorname{tg} z - 1}{z - 1}$
   - (g) $\dfrac{1}{\sin z + \cos z}$
   - (h) $z^2 e^{-z}$
   - (ch) e^z
   - (i) $e^{\frac{1}{z-2\mathrm{j}}}$
   - (j) $\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z - 1}$
   - (k) $e^{\frac{1}{z}} \dfrac{1}{z(z^2 - 2\mathrm{j})^2}$
   - (l) $\dfrac{\sin \pi z \cos \frac{1}{z-3}}{(z^2-9)(z^2+1)^3(z-1)}$
   - (m) $e^{\operatorname{tg} \frac{1}{z}}$
   - (n) $\operatorname{tgh} z$

• 2. Nechť z_0 je pól násobnosti k funkce $f(z)$. Ukažte, že z_0 je pól násobnosti $l+k$ funkce $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^l}$, $l \in \mathbb{N}$!

3. Předpokládejme, že funkce $f(z)$ má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ singularitu a g je funkce holomorfní v prstencovém okolí bodu z_0 s nenulovou limitou $\lim_{z\to z_0} g(z)$. Ukažte, že součin $f(z)g(z)$ má v z_0 singularitu stejného typu jako funkce f. Platí tvrzení i v případě, kdy je limita funkce g nulová?

4. Předpokládejme, že $h(z) = f(z) + g(z)$, funkce $f(z)$ má v z_0 pól násobnosti k a funkce $g(z)$ má v bodě z_0 pól násobnosti $l \neq k$. Ukažte, že funkce $h(z)$ má v bodě z_0 pól násobnosti $\max\{l, k\}$. Platí tvrzení i pro $l = k$?

5. Předpokládejme, že $h(z) = f(z) + g(z)$, $f(z)$ má podstatnou singularitu v bodě z_0 a $g(z)$ nemá podstanou singularitu v bodě z_0. Jakou singularitu má funkce $h(z)$ v bodě z_0?

6. Charakterizujte funkce holomorfní v $\mathbb{C}$ mající v ∞ pól násobnosti k !

7. Charakterizujte funkce holomorfní v $\mathbb{C}$, pro které platí následující podmínky růstu

$$C_1|z|^k \leq |f(z)| \leq C_2|z|^l, \text{ pro všechna } z \in \mathbb{Z},$$

kde $C_1, C_2 > 0, k \leq l, k, l \in \mathbb{N}$!

8. Nechť $z_0 = 0$ je podstatná singularita funkce $f(z)$. Ukažte, že existuje posloupnost bodů (z_k) konvergující k z_0 tak, že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(z_k)}{z_k} = \infty.$$

9. Existuje funkce holomorfní v prstencovém okolí bodu nula, pro kterou platí v daném prstencovém okolí

$$\text{a) } \frac{C_2}{\sqrt{|z|}} \geq |f(z)| \geq \frac{C_1}{\sqrt{|z|}},$$

$$\text{b) } \frac{C_2}{|z|^2} \geq |f(z)| \geq \frac{C_1}{|z|^2},$$

kde $0 < C_1 < C_2$?

10. Funkce $f(z)$ je holomorfní v prstencovém okolí bodu 0 a splňuje tam nerovnost

$$|f(z)| \leq \sqrt{|z|} + \frac{1}{\sqrt{|z|}}.$$

Ukažte, že f je konstantní!

11. Nalezněte všechny funkce holomorfní v $\mathbb{C}$, pro které platí

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{|z|}} \text{ pro všechna } z \in \mathbb{C}.$$

12. Ukažte pomocí Pickardovy věty (Věta 6.2), že nekonstantní funkce holomorfní v $\mathbb{C}$ zobrazí komplexní rovinu na komplexní rovinu nebo na komplexní rovinu bez bodu.

13. Vypočtěte rezidua následujících funkcí:

(a) $\operatorname{res}_1 \left(\frac{z^2+z-1}{(z-1)z^2} + \frac{\sin z}{z^2} \right)$

(b) $\operatorname{res}_0 \left(\frac{z^2+z-1}{(z-1)z^2} + \frac{\sin z}{z^2} \right)$

(c) $\operatorname{res}_\infty \left(\frac{z^2+z-1}{(z-1)z^2} + \frac{\sin z}{z^2} \right)$

(d) $\operatorname{res}_0 \frac{z^3 \sin z}{(1-\cos z)\sinh z}$

(e) $\operatorname{res}_{2k\pi} \frac{z^3 \sin z}{(1-\cos z)\sinh z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.

(f) $\operatorname{res}_\infty e^{-\frac{1}{z^2}}$

(g) $\operatorname{res}_\infty \cos \frac{1}{z}$

(h) $\operatorname{res}_\pi \frac{1}{\sin z}$

(ch) $\operatorname{res}_1 \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$

(i) $\operatorname{res}_\infty z^3 \cos \frac{1}{z-2}$

(j) $\operatorname{res}_0 \sin z \sin \frac{1}{z}$

(k) $\operatorname{res}_{k\pi} \operatorname{cotg}^2 z$, $k \in \mathbb{Z}$.

(l) $\operatorname{res}_{k\pi} \operatorname{cotg}^3 z$, $k \in \mathbb{Z}$

(m) $\operatorname{res}_\infty \operatorname{Ln} \frac{z-a}{z-b}$

(n) $\operatorname{res}_\infty e^z \operatorname{Ln} \frac{z-a}{z-b}$

(o) $\operatorname{res}_{z_k} \frac{z^{2n}}{1+z^n}$, kde $z_k = e^{(2k+1)\frac{\pi i}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

(p) $\operatorname{res}_0 \frac{z^3+z^2+2}{z(z^2-1)^2}$

(q) $\operatorname{res}_j \frac{e^{\pi z}}{1+z^2}$

(r) $\operatorname{res}_j \left((1+z^2) \cosh \frac{\pi}{2} z \right)^{-1}$

14. Nalezněte reziduum $\operatorname{res}_0 e^z \sin\left(\frac{1}{z}\right)$!

15. Ukažte, že je-li $f(z)$ lichá funkce $(f(z) = -f(-z))$, pak $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \operatorname{res}_{-z_0} f(z)$!

16. Nechť $f(z)$ je funkce holomorfní v z_0 a $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$. Odvoďte, že

$$\operatorname{res}_{z_0} (z-z_0)^{-k} f(z) = \frac{f^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

17. Předpokládejme, že $z_0 \in \mathbb{C}$ je pól násobnosti k funkce $f(z)$. Ukažte, že existuje polynom P tak, že funkce

$$f(z) - P\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$$

je holomorfní v z_0 ! Jakého stupně je polynom P? Odvoďte pomocí toho větu o rozkladu racionální funkce na částečné zlomky.

18. Je dána racionální funkce

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

kde P Q jsou polynomy. Jakým algebraickým algoritmem (tj. bez použití limity) lze určit $\operatorname{res}_\infty R(z)$?

19. Nechť $R(z)$ je racionální funkce tvaru

$$R(z) = \frac{P(z)}{(z - z_0)^k Q(z)},$$

kde P a Q jsou polynomy, $P(z_0) \neq 0$, $Q(z_0) \neq 0$. V rozkladu $R(z)$ na částečné zlomky se objeví zlomek

$$\frac{A}{(z - z_0)^l}, \qquad A \in \mathbb{C}, \qquad 1 \leq l \leq k.$$

Interpretujte koeficient A jako reziduum vhodné funkce odvozené od $R(z)$ a odvoďte na základě tohoto vzorec pro výpočet A !

Výsledky.

1. a) ∞ - pól řádu 3
b) 0 - pól řádu 3, $-\pi$ - odstranitelná singularita, $k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0, -1$, - póly prvního řádu
c) $0, \pm 1$ - pól prvního řádu, ∞ - odstranitelná singularita
d) $\pm$j - pól řádu 1
e) $k\pi, k \in \mathbb{Z}$, - pól řádu 1
f) $\frac{2k+1}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,- pól řádu 1
g) $-\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ - pól řádu 1
h) ∞ - podstatná singularita
ch) ∞ - podstatná singularita
i) 2j - podstatná singularita, ∞ - odstranitelná singularita
j) 1 - podstatná singularita, $2k\pi$j, $k \in \mathbb{Z}$, - pól řádu 1.
k) 0 - podstatná singularita, $\pm(1 + \mathrm{j})$ - pól řádu 2, ∞ - odstranitelná singularita
l) $\pm$j - pól řádu 3, 1 - odstranitelná singularita, -3 - odstranitelná singularita, 3 - podstatná singularita, ∞ - podstatná singularita
m) $\frac{2}{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, - podstatná singularita, ∞ - odstranitelná singularita
n) $k\pi$j, $k \in \mathbb{Z}$, - pól řádu 1
3. Neplatí.

4. Neplatí, položte $g = -f$.
5. Podstatnou singularitu
6. Polynomy stupně k.
7. Polynomy stupně mezi k a l.
8. Využijte toho, že musí existovat posloupnost (z_k) taková, že $f(z_k)$ nekonverguje k nule.
9. a) Neexistuje. b) Existuje, např. násobek $\frac{1}{z^2}$.
11. Pouze konstantní funkce.
12. Návod: diskutujte typ singularity v ∞ a užijte Pickardovu větu.
13. a) 1 b) 1 c) -2 d) 0 e) $\dfrac{16k^3\pi^3}{\sinh 2k\pi}$ f) 0 g) 1 h) -1 ch) $\frac{3}{4}$ i) $\frac{143}{24}$ j) 0 k) 0 l) -1 m) $a - b$
n) $e^a - e^b$ o) $-\frac{z_k}{n}$ p) 2 q) $\frac{\mathrm{j}}{2}$ r) $\frac{\mathrm{j}}{2\pi}$
14. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k)!(2k+1)!}$ Návod: použujte pravidlo pro součin nekonečných řad!
17. Stupně k.
18. Určíme zbytek $P_1(z)$ při dělení polynomů. Pak $\operatorname{res}_\infty R(z) = \operatorname{res}_\infty \dfrac{P_1(z)}{Q(z)}$. Pro výpočet tohoto rezidua použijeme Úlohu .
19. $A = \operatorname{res}_{z_0}(z - z_0)^{l-1}R(z)$, $A = \displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-l)!} \frac{\mathrm{d}^{k-l}}{\mathrm{d}z^{k-l}} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)$