7. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Bod uzávěru definičního oboru funkce f se nazývá *singulární*, jestliže buď f není v tomto bodě definovaná, nebo v tomto bodě není holomorfní.

Singulární bod $w \in \mathbb{C}$ funkce $f$se nazývá *izolovaný singulární bod* (izolovaná singularita), jestliže existuje okolí U bodu w tak, že f je holomorfní na množině $U \setminus w$.

Definice 2. Nechť w je izolovaná singularita funkce f a $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-w)^n$ je Laurentova řada funkce f. Singularita ve w se nazývá

1. *odstranitelná*, jestliže $a_n = 0$ pro všechna záporná n
2. *pól řádu k*, jestliže $a_k \neq 0$ a $a_n 0$ pro všechna $n < -k$
3. *podstatná*, jestliže $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho záporných n.

Věta 3. Nechť w je izolovaná singularita funkce f

1. v bodě w je odstranitelná singularita, právě když $\lim_{z\to w} f(z) \in \mathbb{C}$
2. v bodě w je pól, právě když $\lim_{z\to w} f(z) = \infty$
3. v bodě w je podstatná singularita, právě když $\lim_{z\to w} f(z)$ neexistuje.

Lemma 4. Je-li $z_0 \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitou funkce f, pak je z_0 pólem f tehdy a jen tehdy, jestliže existuje $k \in \mathbb{N}$ a funkce h holomorfní na $U(z_0)$, $h(z_0) \neq 0$, že platí

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} h(z),$$

pro $z \in U^*(z_0)$ (k je pak násobnost pólu).

Definice 5. Nechť je izolovaná singularita funkce f. *Reziduem* funkce f v bodě z_0, píšeme $\operatorname{res}_{z_0} f$, nazýváme koeficient a_{-1} u $(z-z_0)^{-1}$ v Laurentově řadě f v bodě z_0.

Obecný vzorec pro výpočet rezidua

$$a_-1 = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z,$$

kde φ je libovolná jednoduše uzavřená křivka ležící v mezikruží M (z definice Laurentovy řady) a obsahující bod z_0 ve svém vnitřku.

Definice 6. Funkci $f(z)$ nazveme *holomorfní* v ∞, je-li funkce $f(1/z)$ holomorfní v 0. *Laurentovou řadou se středem v* ∞ rozumíme řadu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$

přičemž její *regulární částí* rozumíme $\sum_{n=-\infty}^{0} a_n z^n$ (tedy tu část, která je holomorfní v ∞) a *hlavní částí* řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. *Reziduem v* ∞ rozumíme $-a_1$.

Věta 7. Buď $a \in \mathbb{C}$.

1. Buď f holomorfní v a, g ať má v a jednoduchý pól. Potom

$$\operatorname{res}_a(fg) = f(a) \operatorname{res}_a(g).$$

2. Nechť f, g, jsou holomorfní v a, g ať má v a jednoduchý kořen. Pak

$$\operatorname{res}_a \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

3. Ať f má v a pól násobnosti $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\operatorname{res}_a f = \lim_{z \to a} \frac{1}{(n-1)!} [(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

Věta 8 (L'Hospital)**.** Nechť f a g jsou holomorfní funkce v bodě w a nechť $f(w) = g(w) = 0$. Pak

$$\lim_{z \to w} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to w} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Věta 9. Nechť f je holomorfní v $\mathbb{C}$ až na konečně mnoho izolovaných singularit $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \ldots k$. Pak je

$$\sum_{j=1}^{k} \operatorname{res}_{a_j} f + \operatorname{res}_\infty f = 0.$$

Hint

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{pro } z \in \mathbb{C}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{pro } |z| < 1$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{pro } z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{pro } z \in \mathbb{C}$$

Příklady

1. Pomocí Laurentova rozvoje klasifikujte následující singularity

   (a) $\frac{1}{z^2(1-z)}$, $z_0 = 0$

   (b) $\frac{\sin z}{z}$, $z_0 = 0$

   (c) $e^{1/z}$, $z_0 = 0$

2. Klasifikujte následující singularity (ne nutně Laurentovým rozvojem)

   (a) $z^2 e^{1/z}$, $z_0 = \infty$

   (b) $\sin z$, $z_0 = \infty$

   (c) $\frac{\sin z}{z^2}$, $z_0 = 0$

3. Určete residuum

   (a) $\mathrm{res}_0 \frac{\sin z}{z^3}$

   (b) $\mathrm{res}_\infty z^2 e^{1/z}$

   (c) $\mathrm{res}_{2i} \frac{z+2}{(z-2i)^2(z+1)}$

   (d) $\mathrm{res}_{k\pi} z \mathrm{cotg}\, z$, $k \in \mathbb{Z}$

   (e) $\mathrm{res}_\infty e^{1/z}$

   (f) $\mathrm{res}_\infty z e^{1/z}$

   (g) $\mathrm{res}_0 z^2 \sin \frac{1}{z}$

   (h) $\mathrm{res}_{\pi/4} \frac{z^3 \sin z}{\cos 2z}$

   (i) $\mathrm{res}_{2\pi i} \frac{1}{(e^z-1)^2}$

   (j) $\mathrm{res}_0 \frac{1-\cos z}{z^3}$

   (k) $(z+1)e^{\frac{z-1}{z}}$ v bodech 0 a ∞ (l'Hospital)

   (l) $\mathrm{res}_{3i} \frac{e^z}{z^2(z^2+9)} + \frac{\cos \pi z}{4z^2-1}$ (residuum součtu je součet residuí)

4. Vypočítejte residuum funkce v jejích pólech, určete jejich řád

   (a) $\frac{1}{z(1-z^2)}$

   (b) $\frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$

   (c) $\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z-1)}$

   (d) $\frac{1}{z^3-z^5}$

   (e) $\frac{1}{\sin z}$

   (f) $\frac{1}{1+z^4}$

   (g) $\frac{1}{1+z^n}$, $z \in \mathbb{N}$

   (h) $\frac{z^2}{(1+z^2)^2}$

   (i) $\frac{1}{e^z-1}$

   (j) $\frac{1}{1+z^3}$

   (k) $\frac{1}{\cos z}$

   Výsledky příkladů (a)-(d) vepište do tabulky a zkontrolujte součet reziduí ve všech pólech:

	1. pól	**2. pól**	**3. pól**	**Součet**
(a)				
(b)				
(c)				
(d)				

5. Nalezněte a klasifikujte izolované singulární body funkce $\operatorname{tg} z$.

6. Rozhodněte, zda ∞ je izolovaný singulární bod funkce $\sin z^2 \cos \frac{1}{z}$ a stanovte typ singularity.

   (má limitu v nekonečnu? A co na to Heine?)

7. Rozhodněte, zda ∞ je izolovaný singulární bod funkce $\frac{\sin z \cos \frac{1}{z}}{z^5}$ a stanovte typ singularity.

   (Má limitu v nekonečnu? Co když jdeme do nekonečna po reálné a co když po imaginární ose?)

8. Nechť z_0 je izolovaná singularita funkce f a g. Ukažte, že

$$\operatorname{res}_{z_0} \alpha f + \beta g = \alpha \operatorname{res}_{z_0} f + \beta \operatorname{res}_{z_0} g, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

9. Nechť je z_0 pól násobnosti k funkce $f(z)$. Ukažte, že z_0 je pól násobnosti $l + k$ funkce $\frac{f(z)}{(z-z_0)^l}$, $l \in \mathbb{N}$.

10. Nechť funkce f má podstatnou singularitu v bodě z_0 a funkce g tam nemá podstatnou singularitu. Jakou singularitu má v bodě z_0 funkce $f + g$?

11. Charakterizujte funkce, které jsou holomorfní v $\mathbb{C}$ a mají v ∞ odstranitelnou singularitu. Dokažte pomocí toho Liouvilleovu větu víte-li, že každá omezená holomorfní funkce má v nekonečnu odstranitelnou singularitu.

    (Čím se vyznačuje Laurentova řada holomorfní funkce?)