STUDIJNÍ JEDNOTKA

TEORIE REZIDUÍ

Cíle studijní jednotky. V této části ukážeme, jak se dá komplexní funkce rozvinout v mocninnou řadu. Také se naučíte rozpoznat singulární body funkce a určovat reziduum v těchto bodech. Nakonec ukážeme, jak pomocí reziduí počítat komplexní integrály.

5 Teorie reziduí

5.1 Laurentova řada

Nechť je Ω mezikruhová oblast se středem v bodě z_0. Jestliže komplexní funkce $f(z)$ je holomorfní v oblasti Ω, potom pro každé $z \in \Omega$ je možno funkci $f(z)$ vyjádřit **Laurentovou řadou:**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde konstanty a_n jsou určeny vzorci

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

a Γ je libovolná kružnice ležící v mezikruží Ω.

Část $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ se nazývá **hlavní část Laurentovy řady.**

Je vidět, že Taylorova řada je zvláštním případem Laurentovy řady, kde hlavní část se rovná 0.

Poznámka. Pro rozvoj racionální komplexní funkce v Laurentovu řadu využíváme vzorec na součet geometrické řady raději než výpočet jednotlivých koeficientů pomocí křivkového integrálu, jak jsme to uvedli v definici. Je to mnohem rychlejší a přehlednější. Zopakujme si proto geometrickou řadu.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_0 q^n\}_{n=0}^{\infty}$ se nazývá **geometrická posloupnost.**

Je-li $|q| > 1$, geometrická řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n$ diverguje.

Je-li $|q| < 1$, je geometrická řada konvergentní a $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = \dfrac{a_0}{1-q}$.

1a

Příklad 5.1.1. *Pro funkci* $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$ *určete Laurentovu řadu se středem v bodě*

a) $z_0 = 0$ *b)* $z_0 = -1$ *c)* $z_0 = 1$

Řešení: a) Pro $|z| < 1$ je funkce $f(z)$ součtem geometrické řady,

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$$

Tato řada je Taylorovou řadou.

Pro $|z| > 1$ je $|\frac{1}{z}| < 1$, a proto vyjdeme z jiného vyjádření funkce $f(z)$,

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z}} = \frac{\frac{1}{z}}{1-(-\frac{1}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z} \cdot (-\frac{1}{z})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$$

b) V tomto případě funkce $f(z) = \dfrac{1}{1+z} = \dfrac{1}{z-(-1)}$ je dána přímo Laurentovou řadou, která se redukuje na jeden člen.

Laurentova řada funkce je tedy $f(z) = (z+1)^{-1}$.

c) Funkci upravíme, abychom dostali součet geometrické řady, kde kvocient se dá vyjádřit pomocí $z - 1$.

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1+(z-1)+1} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{2(1+\frac{z-1}{2})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}.$$

Pro $|\frac{z-1}{2}| < 1$ platí

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{z-1}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}.$$

Pro $|\frac{z-1}{2}| > 1$ upravujeme podobně jako v části a).

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{\frac{1}{z-1}}{1+\frac{2}{z-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z-1} \cdot \left(-\frac{2}{z-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^{n+1}}.$$

Navíc se dá ukázat, že součet f Laurentovy řady (♠) je funkce holomorfní na $P(z_0, r, R)$ a že pro každé $p \in \mathbb{N}$ a $z \in P(z_0, r, R)$ platí

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{\mathrm{d}^p\left((z-z_0)^n\right)}{\mathrm{d}z^p}.$$

ii) Při rovnosti $r = R$ Laurentova řada (♠) diverguje v každém bodě množiny

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \neq r = R\}.$$

iii) V posledním z případů, tj. je-li $r > R$, neexistuje žádné $z \in \mathbb{C}$, ve kterém Laurentova řada (♠) konverguje.

Situace je podobná té z podkapitoly 7.1. Ukázali jsme, že součtem Laurentovy řady je (samozřejmě za předpokladu $r < R$) funkce holomorfní na mezikruží $P(z_0, r, R)$. Následující věta říká, že **každá** funkce holomorfní na mezikruží $P(z_0, r, R)$ je součtem jisté Laurentovy řady.

Věta 8.2 (o rozvoji holomorfní funkce do Laurentovy řady). *Nechť funkce f je holomorfní na $P(z_0, r, R)$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$ a $0 \leqq r < R \leqq +\infty$. Pak existuje* **právě jedna** *Laurentova řada* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *taková, že pro každé $z \in P(z_0, r, R)$ platí*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Navíc, je-li ϱ libovolné reálné číslo takové, že $r < \varrho < R$, platí pro koeficienty výše uvedené Laurentovy řady (tzv. Laurentova rozvoje funkce f), že

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z,$$

kde

$$\gamma(t) := z_0 + \varrho e^{it}, \ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$
$$(n \in \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}).$$

15

Příklad 8.3. Najděte Laurentův rozvoj funkce

$$f(z) := \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

na všech maximálních mezikružích se středem $z_0 = 0$, na nichž je f holomorfní.

Řešení. Laurentův rozvoj funkce f máme zřejmě najít na těchto třech mezikružích:

$$P(0,0,1), \quad P(0,1,2), \quad P(0,2,+\infty).$$

Nejdříve si uvědomme, že pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$ je

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Nyní přistupme zvlášť k jednotlivým mezikružím.

a) Protože platí implikace:

$$|z| < 2 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{z-2} = -\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\tfrac{1}{2^{n+1}} z^n,$$
$$|z| < 1 \quad \Rightarrow \quad -\tfrac{1}{z-1} = \tfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

je pro každé $z \in P(0,0,1) = \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < |z| < 1\}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

(Všimněme si, že jsme našli – jak bylo lze čekat – Taylorovu řadu.)

b) Již víme (viz část a), že pro každé $z \in \mathbb{C}$ takové, že $1 < |z| < 2$, platí

$$\frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^{n+1}} z^n.$$

Protože navíc platí

$$|z| > 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{z^{n+1}},$$

je pro každé $z \in P(0,1,2) = \{z \in \mathbb{C} : \ 1 < |z| < 2\}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^{n+1}} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{z^n}.$$

c) Z implikace uvedené v části b) a z pozorování

$$|z| > 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

snadno plyne, že pro každé $z \in P(0, 2, +\infty) = \{z \in \mathbb{C} : \ 2 < |z|\}$ platí

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{n-1} - 1\right)\frac{1}{z^n}.$$

▲

9. Laurentovy řady

Nekonečná řada, která je obecně tvořena mocninami dvojčlenu $(z - z_0)$ nejen s kladnými, ale i se zápornými exponenty, se nazývá **Laurentova řada se středem v bodě** z_0 (čti Loránova). Obecný zápis této řady má tvar $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$. Říkáme, že Laurentova řada konverguje v bodě z_1, jestliže konvergují současně řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z_1-z_0)^n}$. První z těchto řad se nazývá **regulární část Laurentovy řady** a druhá se nazývá **hlavní část Laurentovy řady**.

Dá se dokázat, že pro libovolnou funkci f, která je holomorfní v mezikruhové oblasti $\mathcal{D} = \{z \in \mathcal{C} : r_1 < |z-z_0| < r_2\}$, existuje jediná Laurentova řada, která pro všechna $z \in \mathcal{D}$ konverguje k funkční hodnotě $f(z)$. Lze také odvodit vzorce pro výpočet koeficientů a_k pomocí integrálů funkce f. Toto vyjádření funkční hodnoty $f(z)$ má tvar

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k, \text{ kde } a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{k+1}}.$$

Křivka C je libovolná kružnice $|z-z_0| = r$, kde $r_1<r<r_2$ a kružnice tedy leží v dané mezikruhové oblasti. Uvedený výsledek platí i pro zvláštní případy, kdy $r_1 = 0$ nebo $r_2 = \infty$.

Je zřejmé, že pro funkci f, která je holomorfní ve vnitřní oblasti kružnice $|z-z_0| < r$, $r \in \mathcal{R}^+$, vyjde pro záporná $k=-n$, $n\in\mathcal{N}$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{-n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\oint f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}\,d\zeta = 0,$$

protože integrovaná funkce je v dané oblasti holomorfní. Pro nezáporné indexy platí v tomto případě podle zobecnění Cauchyova integrálního vzorce

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}}{k!}.$$

Tento výsledek je totožný se vzorcem pro výpočet koeficientů Taylorovy řady, takže Laurentova řada pro funkci, která je holomorfní pro všechny body vnitřní oblasti kružnice, je totožná s Taylorovou řadou. Taylorova řada je tedy zvláštním případem Laurentovy řady, která má nulovou hlavní část.

V příkladech 9.1 - 9.17 najděte všechny možné Laurentovy řady daných funkcí f s daným středem z_0. Daná funkce může být zřejmě holomorfní ve více

mezikruhových oblastech s daným středem a mohou tedy vzniknout různé Laurentovy řady. K výpočtu koeficientů používejte vzorec pro součet geometrické řady $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$ při respektování podmínky konvergence $|q|<1$.

1ci

9.1. $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$, $z_0=-1$.

Řešení: Funkci rozložíme na parciální zlomky $f(z) = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}$. Singulární body $z_1=-1$ a $z_2=-2$ dané funkce vymezují dvě různé mezikruhové oblasti se středem v bodě $z_0 = z_1$.

Pro $0<|z+1|<1$ můžeme zapsat

$$f(z) = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{1+z+1} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{1-[-(z+1)]} =$$

$$= \frac{1}{z+1} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+1)^n = \sum_{k=-1}^{\infty}(-1)^{k+1}(z+1)^k,$$

kde první zlomek je členem hledané Laurentovy řady (neboť je to mocnina $z+1$) a druhý zlomek představuje holomorfní funkci ve vnitřní oblasti kružnice $|z+1|=1$, takže se dá v dané oblasti vyjádřit jednoznačně jako Taylorova řada. Koeficienty této řady nebyly získány integrováním podle vzorce, ale pomocí konvergentní geometrické řady ($q=-(z+1)$).

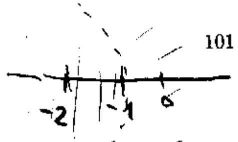
Pro $|z+1|>1$ také využijeme součet konvergentní geometrické řady. K tomu je třeba upravit druhý zlomek tak, aby kvocient obsahoval výraz $z+1$ ve jmenovateli a aby v dané vnější oblasti kružnice byla splněna podmínka konvergence ($|z+1|>1 \Leftrightarrow \frac{1}{|z+1|}<1$)

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z+1+1} = \frac{\frac{1}{z+1}}{1+\frac{1}{z+1}} = \frac{\frac{1}{z+1}}{1-\frac{-1}{z+1}} =$$

$$= \frac{1}{z+1}\left[1 - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} - \dots\right] = \sum_{k=-1}^{-\infty}(-1)^{k+1}(z+1)^k.$$

Pro danou funkci $f(z)$ a danou podmínku $|z+1|>1$ platí

$$f(z) = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{(z+1)^3} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z+1)^n}.$$



1c ii

• **9.2.** $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+2)}$, $z_0 = -2$.

Řešení : Funkci rozložíme na parciální zlomky $f(z) = \dfrac{1}{z+1} - \dfrac{1}{z+2}$. Singulární body dané funkce vymezují dvě různé mezikruhové oblasti se středem v bodě $z_0 = -2$. Pro $0 < |z+2| < 1$ můžeme zapsat

$$f(z) = -\frac{1}{-z-1} - \frac{1}{z+2} = -\frac{1}{1-(z+2)} - \frac{1}{z+2} =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}(z+2)^n - \frac{1}{z+2} = -\sum_{k=-1}^{\infty}(z+2)^k ,$$

kde druhý zlomek je členem hledané Laurentovy řady,neboť je to mocnina $z+2$. První zlomek je holomorfní funkce v oblasti $|z+2| < 1$, takže se dá v této oblasti vyjádřit jednoznačně ve tvaru Taylorovy řady. Koeficienty této řady získáme pomocí konvergentní geometrické řady ($q = z+2$).

Pro $|z+2| > 1$ využijeme také součet konvergentní geometrické řady. K tomu je třeba upravit druhý zlomek tak, aby kvocient obsahoval výraz $z+2$ ve jmenovateli a aby v dané vnější oblasti kružnice byla splněna podmínka konvergence ($|z+2| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{|z+2|} < 1$) :

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z+2-1} = \frac{\frac{1}{z+2}}{1-\frac{1}{z+2}} =$$

$$= \frac{1}{z+2}\left[1 + \frac{1}{z+2} + \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{1}{(z+2)^3} + \dots\right] =$$

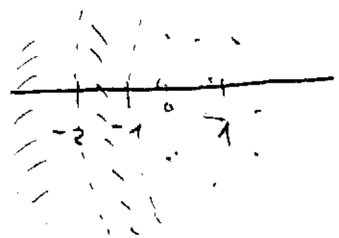
$$= \frac{1}{z+2} + \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{1}{(z+2)^3} + \dots$$

Pro danou funkci f v dané oblasti $|z+2| > 1$ platí

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{1}{(z+2)^3} + \dots - \frac{1}{z+2} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(z+2)^n} .$$

1c iii

• **9.3.** $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+2)}$, $z_0 = 1$.



Řešení : Danou funkci rozložíme opět na parciální zlomky. V tomto případě singulární body dané funkce vymezují tři mezikruhové oblasti, ve kterých má daná funkce navzájem různá vyjádření ve tvaru Laurentovy řady se středem $z_0 = 1$. Hranice mezi nimi tvoří kružnice se středem v bodě z_0 , na kterých leží singulární body dané funkce.

Pro $|z-1| < 2$ provedeme takové úpravy, aby kvocient obsahoval výraz $z-1$ v čitateli

$$f(z) = \frac{1}{2+z-1} - \frac{1}{3+z-1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{2}\right)} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{3}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n (z-1)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n (z-1)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)(z-1)^n .$$

První část je geometrická řada, která konverguje k danému zlomku pro $|z-1| \le 2$, druhá řada konverguje pro $|z-1| < 3$. Současná konvergence obou řad je tedy zaručena pro průnik $|z-1| < 2$. Výsledná řada je tedy Taylorova řada s oblastí konvergence $|z-1| < 2$.

Pro $2 < |z-1| < 3$ je třeba první zlomek upravit jinak

$$f(z) = \frac{1}{z-1+2} - \frac{1}{3+z-1} = \frac{\frac{1}{z-1}}{1-\frac{-2}{z-1}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{z-1}{3}\right)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}(z-1)^n =$$

$$= \sum_{k=-1}^{-\infty}(-2)^{-(k+1)}(z-1)^k + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{3^{k+1}}(z-1)^k .$$

První řada konverguje pro $|z-1| > 2$, druhá řada konverguje pro $|z-1| < 3$, obě řady konvergují v průniku $2 < |z-1| < 3$.

Pro $|z-1| > 3$ je třeba i druhý zlomek upravit jiným způsobem

$$f(z) = \frac{1}{z-1+2} - \frac{1}{z-1+3} = \frac{\frac{1}{z-1}}{1-\frac{-2}{z-1}} - \frac{\frac{1}{z-1}}{1-\frac{-3}{z-1}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}[2^{n-1} - 3^{n-1}]}{(z-1)^n} = \sum_{k=-1}^{-\infty}(-1)^{k+1}[2^{-(k+1)} - 3^{-(k+1)}](z-1)^k .$$

9.4. $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+2)}$, $z_0 = 0$.

Výsledek : Existují tři různá vyjádření dané funkce ve tvaru Laurentovy řady se středem v bodě $z_0 = 0$ podle volby mezikruhové oblasti

$$|z| < 1 \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n ,$$

$$1 < |z| < 2 \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} (-1)^{k+1} z^k + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} z^k ,$$

$$|z| > 2 \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} (-1)^{k-1} (1 - 2^{k-1}) z^k .$$

1d i

• **9.5.** $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$, $z_0 = 1$. $\quad \dfrac{1/2}{z-1} + \dfrac{-1/2}{z+1}$

Výsledek : Existují dvě Laurentovy řady se středem v bodě $z_0 = 1$:

$$0 < |z-1| < 2 \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sum_{k=-1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+2}} (z-1)^k , \qquad \frac{1}{z+1} = \frac{1}{2+z-1} = \frac{1}{2\left(1-\left(-\frac{z-1}{2}\right)\right)}$$

$$|z-1| > 2 \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sum_{k=-2}^{-\infty} (-1)^k 2^{-(k+2)} (z-1)^k . \qquad \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-1+2} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{-2}{z-1}\right)}$$

1d ii

• **9.6.** $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$, $z_0 = -1$. $\quad \dfrac{1/2}{z-1} + \dfrac{-1/2}{z+1}$

Výsledek : Existují dvě Laurentovy řady se středem v bodě $z_0 = -1$:

$$0 < |z+1| < 2 \quad \Rightarrow \quad f(z) = -\sum_{k=-1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} (z+1)^k , \qquad \frac{1}{z-1} = \frac{1}{-2+z+1} = \frac{1}{-2\left(1-\frac{(z+1)}{2}\right)}$$

$$|z+1| > 2 \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sum_{k=-2}^{-\infty} 2^{-(k+2)} (z+1)^k . \qquad \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z+1-2} = \frac{1}{1-\frac{2}{z+1}} , \frac{1}{z+1}$$

1d iii

• **9.7.** $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$, $z_0 = 0$. $\quad \dfrac{1/2}{z-1} + \dfrac{-1/2}{z+1}$

Výsledek : Existují dvě Laurentovy řady se středem v bodě $z_0 = 0$:

$$|z| < 1 \quad \Rightarrow \quad f(z) = -\sum_{k=0}^{+\infty} z^{2k} . \qquad \frac{-1/2}{1-z} + \frac{-1/2}{1-(-z)}$$

$$|z| > 1 \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} z^{2k} . \qquad \frac{1/2}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} + \frac{-1/2}{z\left(1-\left(\frac{-1}{z}\right)\right)}$$

9.8. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, $z_0 = 0$.

Výsledek : Existují dvě Laurentovy řady se středem v bodě $z_0 = 0$:

$$|z| < 1 \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^{2k} ,$$

$$|z| > 1 \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} (-1)^{k+1} z^{2k} .$$

9.9. $f(z) = \dfrac{2}{z(z+2)}$, $z_0 = 0$.

Výsledek : Existují dvě Laurentovy řady se středem v bodě $z_0 = 0$:

$$0 < |z| < 2 \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sum_{k=-1}^{+\infty} (-1)^{k+1} 2^{-(k+1)} z^k ,$$

$$|z| > 2 \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sum_{k=-2}^{-\infty} (-1)^k 2^{-(k+1)} z^k .$$

9.10. $f(z) = \dfrac{2}{z(z+2)}$, $z_0 = -2$.

Výsledek : Existují dvě Laurentovy řady se středem v bodě $z_0 = -2$:

$$0<|z+2|<2 \quad \Rightarrow \quad f(z)=-\sum_{k=-1}^{+\infty} 2^{-(k+1)}(z+2)^k\,,$$

$$|z+2|>2 \quad \Rightarrow \quad f(z)=\sum_{k=-2}^{-\infty} 2^{-(k+1)}(z+2)^k\,.$$

2a

9.11. $f(z)=\dfrac{\cos z}{z}\,,\ z_0=0\,.$

Řešení : Pro všechna $z \neq 0$ existuje jediné vyjádření dané funkce ve tvaru Laurentovy řady se středem v bodě $z_0=0$, ke kterému použijeme Taylorovu řadu pro funkci $\cos z$

$$f(z)=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k-1}\,.$$

2b

9.12. $f(z)=z^3\,e^{\frac{1}{z}}\,,\ z_0=0\,.$

Výsledek : Pro všechna $z\neq 0$ existuje jediné vyjádření dané funkce ve tvaru Laurentovy řady se středem v bodě $z_0=0$

$$f(z)=z^3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!\,z^n}=\sum_{k=3}^{-\infty}\frac{1}{(3-k)!}\,z^k\,.$$

2c

9.13. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-1)^2}\,,\ z_0=1\,.$

Řešení : Provedeme rozklad dané funkce na parciální zlomky

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-1)^2}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-1)^2}\,.$$

Singulární body dané funkce vymezují dvě různé mezikruhové oblasti, ve kterých vyjádříme danou funkci ve tvaru Laurentovy řady se středem v bodě $z_0=1$. Druhé dva zlomky v obou případech není třeba upravovat, protože jsou to přímo požadované mocniny $z-1$.

Pro $0<|z-1|<1$ můžeme první zlomek podobně jako v př. 9.1 vyjádřit jako součet konvergentní geometrické řady ($a_1=-1$, $q=z-1$), takže platí

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-1)^2}=\sum_{k=-2}^{+\infty}(z-1)^k\,.$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{-1+z-1}=\frac{-1}{1-(z-1)}$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-1-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}\cdot\frac{1}{z-1}$$

Pro $|z-1|>1$ je třeba vyjádřit první zlomek také jako součet konvergentní geometrické řady ($a_1=\frac{1}{z-1}$, $q=\frac{1}{z-1}$, kde ve zvolené oblasti je splněna podmínka $|q|<1$), takže můžeme zapsat

$$f(z)=\frac{1}{z-1}\left(1+\frac{1}{z-1}+\ \dots\ \right)-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-1)^2}=\sum_{k=-3}^{-\infty}(z-1)^k\,.$$

2d

9.14. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-1)^2}\,,\ z_0=2\,.$

Řešení : Jako v př. 9.13 provedeme rozklad na parciální zlomky a opět existují dvě různé Laurentovy řady se středem v bodě $z_0=2$ podle volby mezikruží. První zlomek v obou případech není třeba upravovat, protože je to přímo požadovaná mocnina $z-2$.

Pro $0<|z-2|<1$ můžeme vyjádřit druhý zlomek podobně jako v př. 9.2 ve tvaru součtu konvergentní geometrické řady ($a_1=1$, $q=-(z-2)$). Třetí zlomek můžeme vyjádřit ve tvaru řady pomocí derivace předcházející konvergentní geometrické řady

$$\left(\frac{1}{1+z-2}\right)'=\frac{-1}{(z-2)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n n(z-2)^{n-1}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+1}(k+1)(z-2)^k.$$

Po dosazení a úpravách (především znamének) dostaneme

$$f(z)=\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(n+1)(z-2)^n=$$

$$=\sum_{k=-1}^{+\infty}(-1)^{k+1}(k+2)(z-2)^k\,.$$

Pro $|z-2|>1$ můžeme druhý zlomek vyjádřit jako součet konvergentní geometrické řady ($a_1=\frac{1}{z-2}$, $q=\frac{-1}{z-2}$)

$$\frac{1}{1+z-2}=\frac{\frac{1}{z-2}}{1-\frac{-1}{z-2}}=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^n}=$$

$$=\sum_{k=-1}^{-\infty}(-1)^{k+1}(z-2)^k\,.$$

Pro třetí zlomek je třeba opět provést derivaci předcházející konvergentní geometrické řady a vyjde

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \sum_{k=-1}^{-\infty} (-1)^k (z-2)^k + \sum_{k=-1}^{-\infty} (-1)^{k+1} k (z-2)^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=-2}^{-\infty} (-1)^k (z-2)^k + \sum_{k=-2}^{-\infty} (-1)^k (k+1)(z-2)^k = \sum_{k=-2}^{-\infty} (-1)^k k (z-2)^k .$$

9.15. $f(z) = \dfrac{2z+1}{z(z+1)^2}$, $z_0 = -1$.

Výsledek: Existují dvě Laurentovy řady se středem v bodě $z_0 = -1$:

$$0 < |z+1| < 1 \quad \Rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{z+1} - \sum_{k=0}^{+\infty} (z+1)^k ,$$

$$|z+1| > 1 \quad \Rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} + \sum_{k=2}^{-\infty} (z+1)^k .$$

2e

o **9.16.** $f(z) = \dfrac{2z+1}{z(z+1)^2}$, $z_0 = 0$. $\quad \dfrac{1}{z} + \dfrac{-1}{z+1} + \dfrac{1}{(z+1)^2}$

Výsledek : Existují dvě Laurentovy řady se středem v bodě $z_0 = 0$:

$$0 < |z| < 1 \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sum_{k=-1}^{+\infty} (-1)^{k+1} (k+2)\, z^k ,$$

$$|z| > 1 \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sum_{k=-2}^{-\infty} (-1)^{k+1}\, k\, z^k .$$

9.17. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)^2}$, $z_0 = 1$.

Výsledek : Existují dvě Laurentovy řady se středem v bodě $z_0 = 1$:

$$0 < |z-1| < 2 \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sum_{k=-2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+4}} (k+3)\, (z-1)^k ,$$

$$|z-1| > 2 \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sum_{k=-4}^{-\infty} (-1)^k\, 2^{-k-4} (-k-3)\, (z-1)^k .$$

-- -- -- -- --

9.18. Pro libovolnou funkci $f(z)$, která je holomorfní v mezikruhové oblasti $0 < |z-z_0| < R$, vypočítejte integrací příslušné Laurentovy řady (člen po členu) integrál $\oint_C f(z)\, dz$, kde C je kružnice $|z-z_0| = r$, $0 < r < R$.

Řešení : V dané oblasti existuje jednoznačně určená Laurentova řada, která konverguje k dané funkci. Integrál z takové funkce můžeme dostat integrací jednotlivých členů řady. Výpočtem se zjistí, že tyto integrály jsou (až na jeden pro $k = -1$) rovny nule (viz př. 8.22). Platí tedy

$$\oint_C f(z)\, dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \oint_C a_k (z-z_0)^k\, dz = \oint_C a_{-1} (z-z_0)^{-1}\, dz = 2\pi \mathrm{i}\; a_{-1} .$$

Kapitola 5

Reprezentace holomorfní funkce Laurentovou řadou

1 Úvod

V předchozí kapitole jsme viděli, že každou holomorfní funkci je možné lokálně rozvést v mocninnou řadu. Tento rozvoj umožňuje efektivní popis holomorfní funkce i její numerický výpočet. Omezující je ovšem skutečnost, že mocninná řada konverguje vždy v kruhu. Z toho vyplývá, že na množinách, které nejsou kruhy, není možno holomorfní funkce globálně vyjádřit jako součet jediné mocninné řady. K důležitým příkladům takovýchto množin patří např. kruh s vyjmutým středem odpovídající situaci, kdy je funkce holomorfní na okolí daného bodu s výjimkou bodu samotného. Podívejme se na následující funkci

$$f(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Tato funkce je holomorfní v množině $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Standardní rozvoj funkce f v mocninnou řadu se středem v počátku je

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots, \qquad |z| < 1.$$

Geometrická řada na pravé straně konverguje právě když $|z| < 1$. Tím jsme získali rozvoj pouze v jednotkovém kruhu se středem v počátku. Funkce f je ovšem holomorfní i na vnějšku jednotkového kruhu $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$, tedy za hranicí konvergence dané mocninné řady. Zde již není možno vyjádřit f jako součet mocninné řady se středem v nule. Kdyby totiž taková řada existovala, musela by konvergovat i v $z = 1$. To je však nemožné, neboť f nemá vlastní limitu v bodě 1.

Na druhé straně, vzdáme-li se požadavku mít f pouze ve tvaru mocninné řady, je možno pro $|z| > 1$ psát

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{z}\frac{1}{\frac{1}{z}-1} = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right) \\ &= -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \qquad |z| > 1. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že funkci f je možno vyjádřit pomocí řady, která obsahuje záporné mocniny z. Jakmile připustíme záporné mocniny dostáváme nový typ řady, který umožní rozvoje na takových oblastech „s dírami" jako je například mezikruží.

2 Laurentovy řady

Definice 5.1. *Řada tvaru*

$$(5.1) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \cdots \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots,$$

se nazývá ***Laurentova řada*** *se středem v bodě z_0 a koeficienty a_n, $n \in \mathbb{Z}$. Řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

se nazývá ***regulární část*** *Laurentovy řady, řada*

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$$

se nazývá ***hlavní část*** *Laurentovy řady.*

Řada (5.1) konverguje v daném bodě $z \in \mathbb{C}$, konverguje-li současně v tomto bodě její hlavní i regulární část. Její součet je přitom definován jako součet regulární a hlavní části, tj.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Stejná terminologie se týká absolutní konvergence a konvergence stejnoměrné.

Obor konvergence Laurentovy řady je průnikem oborů konvergence její hlavní a regulární části, což dává i návod na jeho nalezení.

3a

Příklad 5.1. Zjistíme obor konvergence Laurentovy řady

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|}(z-1)^n.$$

Podíváme se nejdříve na regulární část

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}(z-1)^n.$$

Jedná se obyčejnou mocninnou řadu. Ze vztahu (4.6) ve Větě 4.2 je její poloměr konvergence

$$R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{2^{-n}}} = 2.$$

Na hranici $\partial U(1;2)$ kruhu konvergence regulární část nekonverguje v žádném bodě, neboť v těchto bodech je $2^{-n}|z-1|^n = 1$, tudíž členy řady nekonvergují k nule.

Nyní se podíváme na hlavní část. Nejprve provedeme záměnu sčítacího indexu $n=-m$:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-|n|}(z-1)^n = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}\frac{1}{(z-1)^m}.$$

Tuto řadu pomocí substituce $u = \frac{1}{1-z}$ převedeme na mocninnou řadu

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}u^m.$$

Její poloměr konvergence je 2. Hlavní část tedy konverguje absolutně pro

$$\left|\frac{1}{z-1}\right| < 2 \quad \text{tj.}\quad |z-1| > \frac{1}{2}.$$

Jde o vnějšek kruhu se středem v bodě $z=1$ a poloměrem $\frac{1}{2}$. Stejně jako v předchozím případě můžeme ukázat, že na hranici tohoto kruhu řada nekonverguje v žádném bodě.

Závěrem tedy máme, že obor konvergence je mezikruží se středem v bodě 1, vnitřním poloměrem 1/2 a vnějším poloměrem 2, tj. množina

$$\left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;\frac{1}{2}<|z-1|<2\right\}.$$

Postup v předchozím příkladě je zcela obecný. Regulární část Laurentovy řady je mocninná řada s jistým poloměrem konvergence R. Z Kapitoly 4 víme, že tato řada konverguje absolutně v otevřeném kruhu $\{z\in\mathbb{C} \mid |z-z_0|<R\}$ a diverguje ve všech bodech množiny $\{z \in \mathbb{C}\mid |z-z_0|>R\}$. Hlavní část Laurentovy řady (5.1) není řada mocninná, lze ji nicméně na mocninnou řadu převést pomocí substituce

$$u=\frac{1}{z-z_0}.$$

Dostaneme tak řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}u^n.$$

Nechť K je poloměr konvergence této mocninné řady a položíme

$$r=\frac{1}{K}.$$

(Opět pokládáme $\frac{1}{0}=\infty$, $\frac{1}{\infty}=0$.) Pak hlavní část konverguje absolutně pro všechna z splňující nerovnost

$$\left|\frac{1}{z-z_0}\right|<K \quad\text{tj.}\quad |z-z_0|>r.$$

V bodech množiny $\{z\in\mathbb{C}\mid |z-z_0|<r\}$ hlavní část diverguje. Číslo r budeme nazývat poloměr konvergence hlavní části Laurentovy řady. Celkově tedy máme, že Laurentova řada (5.1) konverguje absolutně v každém bodě množiny

$$\{z\in\mathbb{C}\mid r<|z-z_0|<R\}$$

a nekonverguje v žádném bodě množiny

$$\{z\in\mathbb{C}\mid |z-z_0|<r\}\cup\{z\in\mathbb{C}\mid |z-z_0|>R\}.$$

Kvůli pohodlí si pro množiny vznikající jako obory absolutní konvergence Laurentových řad zavedeme značení

$$P(z_0;r,R)=\{z\in\mathbb{C}\mid r<|z-z_0|<R\},$$

kde $0\le r,R\le\infty$. V závislosti na možných hodnotách r a R je množina $P(z_0;r,R)$ buď mezikruží se středem v bodě z_0 a poloměry r a R ($0<r<R$) nebo kruh bez svého středu ($r=0<R$) nebo vnějšek kruhu ($r>0, R=\infty$) nebo $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ ($r=0,R=\infty$) nebo prázdná množina ($r\ge R$). Závěr této úvahy shrneme ve větě o konvergenci Laurentových řad, která je zobecněním Věty 4.2.

Věta 5.1. *Nechť $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ je Laurentova řada. Je-li R poloměr konvergence regulární části a r poloměr konvergence hlavní části, pak Laurentova řada konveguje absolutně na množině $P(z_0;r,R)$ a stejnoměrně na každém mezikruží $P(z_0;\varrho_1,\varrho_2)$, kde $0<r<\varrho_1<\varrho_2<R$, viz obr. 5.1. Je-li $r\neq R$, pak Laurentova řada diverguje v každém bodě mimo uzávěr množiny $P(z_0;r,R)$.*

Poznámka 5.1. Obsahem Věty 5.1 je skutečnost, že množina $P(z_0;r,R)$ je maximální otevřenou množinou, na které konverguje Laurentova řada absolutně. Budeme ji nazývat *mezikruží konvergence* Laurentovy řady. Vyšetřování řady na hranici této množiny je obecně komplikované. Pro naše účely však postačí stanovit parametry r a R.

Ve druhé části Věty 5.1 je předpoklad $r\neq R$ důležitý. Je-li totiž $r=R$, pak sice $P(z_0;r,R)=\emptyset$, nicméně se může stát, že na kružnici $\{z\in\mathbb{C}\mid |z-z_0|=r=R\}$ Laurentova řada v nějakém bodě konverguje. (Viz cvičení 1.(c).)

Důkaz. Jediné, co ještě vyžaduje argument, je stejnoměrná konvergence Laurentovy řady. Znamená stejnoměrnou konvergenci hlavní i regulární části. Víme již, že regulární část konverguje stejnoměrně na každém kruhu $\{z\in\mathbb{C}\mid |z-z_0|<\varrho_2\}$, kde $\varrho_2<R$.

Podívejme se tedy na hlavní část

(5.2) $$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

Pro $|z-z_0|>\varrho_1>r$ platí odhad

(5.3) $$\left|\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}\right|<\frac{|a_{-n}|}{\varrho_1^n}.$$

5

- **Příklad 5.3.** Nalezněme Laurentův rozvoj se středem v bodě ∞ funkce

$$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}.$$

Příklad vede na použití mocninného rozvoje exponenciální funkce v počátku.

$$\begin{aligned} z^2 e^{\frac{1}{z}} &= z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = z^2 + z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n! z^{n-2}} = \\ &= z^2 + z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \cdot \frac{1}{z^n}, \qquad |z| > 0. \end{aligned}$$

(V posledním kroku jsme provedli změnu sčítacího indexu $n \to n+2$.) Tedy

$$a_{-2} = a_{-1} = 1, \qquad a_n = \frac{1}{(n+2)!}, \qquad \text{pro } n \geq 0.$$

Daný Laurentův rozvoj má konečnou hlavní část $z^2 + z$ a nekonečnou regulární část

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z} + \frac{1}{4!} \frac{1}{z^2} + \cdots$$

3 Cvičení

- **Úloha**: Stanovte obor konvergence Laurentovy řady

3b

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n.$$

Řešení: Všimneme si, že hlavní i regulární část jsou geometrické řady s kvocienty $\frac{1}{2z}$ a $3z$. Hlavní část tedy konverguje právě, když

$$\left| \frac{1}{2z} \right| < 1 \quad \text{tj.} \quad |z| > \frac{1}{2}.$$

Pro absolutní konvergenci regulární části je nutná a postačující podmínka

$$|3z| < 1 \quad \text{tj.} \quad |z| < \frac{1}{3}.$$

Vidíme tedy, že obory konvergence se neprotnou a tedy obor konvergence zadané řady je prázdná množina.

- **Úloha**: Stanovte obor konvergence Laurentovy řady

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} (z-1)^n.$$

Řešení: Podívejme se nejdříve na regulární část

3c

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} (z-1)^n.$$

Použijeme odmocninového kritéria absolutní konvergence

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0, \text{ tj. } R = \infty.$$

Regulární část konverguje v celé komplexní rovině.

Konvergence hlavní části je ekvivalentní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} \frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} u^n, \quad \text{kde } u = \tfrac{1}{z-1}.$$

Opětovným použitím odmocninového kritéria dostáváme

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Hlavní část tedy konverguje pro všechna $u \in \mathbb{C}$, tj. pro všechna $z \neq 1$. Oborem konvergence zadané řady je celá komplexní rovina vyjma bodu 1, formálně $\boxed{P(1; 0, \infty)}$. Rozmyslete si, že komplexní rovina bez bodu je maximální množina konvergence Laurentovy řady s nenulovou hlavní částí!

- **Úloha**: Vyšetřete konvergenci Laurentovy řady

3d

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1} (z - \mathrm{j})^n.$$

Řešení: Použitím podílového kritéria pro regulární část $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}(z - \mathrm{j})^n$ máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^{n+1}+1}}{\frac{1}{3^n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n+1}{3^{n+1}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+3^{-n}}{3+3^{-n}} = \frac{1}{3}.$$

Regulární část tedy konverguje absolutně pro $|z - \mathrm{j}| < 3$. Pro hlavní část přepsanou do tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{-n}+1} \frac{1}{(z-\mathrm{j})^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{-n}+1} u^n, \quad \text{kde } u = \tfrac{1}{z-\mathrm{j}},$$

je limita v podílovém kritériu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^{-n-1}+1}}{\frac{1}{3^{-n}+1}} = 1.$$

Tato část konverguje absolutně pro $|u| < 1$, tj. $|z - \mathrm{j}| > 1$. Obor konvergence zadané řady je mezikruží

$$P(\mathrm{j}; 1, 3) = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - \mathrm{j}| < 3\}.$$

Klíčovým pozorováním je nyní skutečnost, že integrál $\int_C (w - z_0)^m$ je roven nule vyjma případu $m = -1$. Je-li $m \geq 0$, je integrovaná funkce holomorfní na celé komplexní rovině. Podle Cauchyovy věty je integrál nulový. Je-li $m < 0$, užijeme zobecněný Cauchyův integrální vzorec (4.28) pro konstantní funkci $f(z) = 1$. Dostaneme tak, že vyšetřovaný integrál je nenulový pouze pro $m = -1$ a jeho hodnota je $2\pi\mathrm{j}$. Řada na levé straně rovnosti (5.12) má tedy nejvýše jeden nenulový člen a to pro index $k = n$. Rovnice (5.12) se tak redukuje na vztah

$$2\pi\mathrm{j}\, a_n = \int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}w,$$

což dává integrální vyjádření koeficientů a ukončuje důkaz. □

Poznámka 5.2. Laurentova řada ve Větě 5.3 se nazývá ***Laurentovou řadou funkce f*** v mezikruží $P(z_0; r, R)$.

Jednoznačnost koeficientů v Laurentově rozvoji implikuje, že funkci holomorfní v $P(z_0; r, R)$ je možno „zakódovat" do posloupnosti koeficientů (a_n) jejího Laurentova rozvoje. To také znamená, že pro Laurentovy řady se stejným součtem jsou odpovídající koeficienty stejné. Přesněji, rovnost

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

na jistém otevřeném mezikruží implikuje $a_n = b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}$. Tento princip budeme často využívat.

4

Příklad 5.2. Nalezneme Laurentovu řadu o středu $z_0 = 0$ funkce

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

v oblasti $P(0; 2, 3)$ a využijme ji k výpočtu integrálů

$$\int_C \frac{f(z)}{z^{10}}\, \mathrm{d}z \quad \text{a} \quad \int_C f(z) z^{10}\, \mathrm{d}z,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice zadaná vztahem $|z| = 5/2$.

Funkce f je holomorfní ve všech bodech $\mathbb{C}$ kromě bodů 2 a 3. Je tedy holomorfní v mezikruží $P(0; 2, 3)$ a úloha má řešení. Při hledání Laurentova rozvoje racionální funkce se standardně využívá rozkladu na parciální zlomky. V našem případě je

$$f(z) = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}.$$

U jednotlivých zlomků využijeme součtu geometrické řady. Dostaneme tak

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \qquad \text{pro } |z| < 3,$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-n-1} z^n \text{ pro } |z| > 2.$$

Závěrem máme

$$f(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-n-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} \qquad \text{pro } 2 < |z| < 3.$$

Získaná Laurentova řada má tedy nenulovou hlavní i regulární část. U prvního z částečných zlomků $\frac{1}{z-3}$, $\frac{1}{z-2}$ jsme nalezli vyjádření pomocí mocninné řady a u druhého pomocí řady se zápornými mocninami. Tento výsledek je možno odhadnout předem. Funkce $\frac{1}{z-3}$ je totiž holomorfní v kruhu $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 3\}$ obsahujícím dané mezikruží. Její Laurentova řada bude proto pouze obyčejná mocninná řada. Naproti tomu funkce $\frac{1}{z-2}$ je holomorfní v množině $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}$, což je doplněk kruhu, a proto zde musíme hledat Laurentův rozvoj obsahující záporné mocniny.

Máme-li k dispozici Laurentovu řadu můžeme okamžitě nalézt oba zadané integrály, které souvisí s koeficienty Laurentova rozvoje. Z integrálního vyjádření

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, \mathrm{d}z$$

plyne pro $n = 9$ a $n = -11$, že

$$\int_C \frac{f(z)}{z^{10}}\, \mathrm{d}z = a_9 \cdot 2\pi\mathrm{j} = -2\pi\mathrm{j} \cdot \frac{1}{3^{10}}$$

$$\int_C f(z) z^{10}\, \mathrm{d}z = a_{-11} \cdot 2\pi\mathrm{j} = -2^{11}\pi\mathrm{j}.$$

V závěru této části se zmíníme o Laurentově řadě se středem $z = \infty$.

Definice 5.2. *Řada*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = \cdots + a_{-2}z^2 + a_{-1}z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots,$$

*kde $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, se nazývá **Laurentovou řadou se středem v bodě** ∞ (nebo také s nevlastním středem) a koeficienty a_n. Část*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \quad \left(\textit{resp.} \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{a_n}{z^n}\right)$$

*se nazývá **regulární část Laurentovy řady**,(resp. **hlavní část Laurentovy řady**).*

Řada s nevlastním středem je vlastně jenom jinak zorganizovanou Laurentovou řadou se středem v bodě 0. Na rozdíl od středu ve vlastním bodě obsahuje hlavní část nezáporné mocniny a regulární část mocniny záporné. Na první pohled to vypadá jako uměle zavedený pojem. Skutečně nepřináší žádnou novou informaci o Laurentově řadě, nicméně výhodnost této konvence se ukáže posléze.

2. Nalezněte Laurentovu řadu která a) konverguje právě v mezikruží $P(0,1,2)$ b) konverguje právě v uzavřeném mezikruží $\overline{P(0,1,2)}$.

3. Nalezněte Laurentovy rozvoje zadaných funkcí v uvedených oblastech

(a) $\frac{1}{z^2+2z-8}$ v $P(-2,2,4)$,

(b) $\frac{3z}{(2z-1)(2-z)}$ v $P(0,0,\frac{1}{2})$

(c) $\frac{3z}{(2z-1)(2-z)}$ v $P(0,\frac{1}{2},2)$

(d) $\frac{3z}{(2z-1)(2-z)}$ v $P(0,2,\infty)$

(e) $3z\sin\frac{\pi z}{z+5}$ v maximálním mezikruží se středem $z_0=-5$

(f) $\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ v $P(0,1,2)$

(g) $\frac{1}{(z^2+1)^2}$ v $P(\mathrm{j},0,2)$

(h) $\frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$ pro $1<|z|<2$

(ch) $\sin\frac{z}{z-1}$, pro $|z-1|>1$.

(i) $e^{\frac{z}{z+2}}$, $z_0=\infty$, pro $|z|>2$

(j) $\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, pro $|z-2|>0$.

4. Rozhodněte zda lze dané funkce rozvést v Laurentovy řady se středem z_0 v mezikruží $P(z_0,0,\infty)$.

6

(a) $\cos\frac{1}{z}$, $z_0=0$

(b) $\cos\frac{1}{z}$, $z_0=\infty$

(c) $\mathrm{tg}\,\frac{1}{z}$, $z_0=\infty$ pól že v bodech $z=\frac{(2k+1)\pi}{2}$ $k\in\mathbb{Z}$

$\frac{1}{z}\in\mathbb{R}^-$

$z=0$

(d) $\mathrm{Ln}\,z$, $z_0=\infty$

(e) $\mathrm{Ln}\,z$, $z_0=1$.

5. Rozviňte funkci $f(z)=\frac{z}{1+z^3}$ a) v mocninou řadu s nezápornými mocninami z, b) v Laurentovu řadu se zápornými mocninami z. Určete obory konvergence!

6. Rozviňte funkci $f(z)=\mathrm{Ln}\,\frac{z+\mathrm{j}}{z-\mathrm{j}}$ v Laurentovu řadu se středem v bodě ∞ v maximální možné oblasti!

7. Nalezněte první tři členy Laurentova rozvoje funkce $f(z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$ se středem v bodě 0 a určete oblast konvergence této řady!

8. Ukažte, že funkce holomorfní v mezikruží $P(0,r,R)$, $r<R$, je součtem $f=f_1+f_2$, kde f_1 je holomorfní pro $|z|<R$ a f_2 je holomorfní pro $|z|>r$!

9. Ukažte, že řada $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}$ konverguje v jistém okolí nekonečna právě tehdy když existují konstanty $M\geq 0, c>0$ tak, že

$$|a_n|\leq Mc^n \qquad \text{pro všechna } n\geq 0.$$

10

10. Nechť f je funkce holomorfní v mezikruží $P(0,r,R), r<R$, pro kterou platí

$$f(z)=f(-z) \text{ pro všechna } z\in P(0,r,R).$$

Charakterizujte funkci f pomocí koeficientů v jejím Laurentově rozvoji !

11. Předpokládejme, že funkce f je holomorfní v $P(0,r,R)$, $r<R$. Nechť

$$|f(z)|\leq M \qquad \text{pro všechna } z\in P(0,r,R).$$

Odvoďte následující odhad pro koeficienty (a_n) Laurentova rozvoje $f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_nz^n$:

$$|a_n|\leq\min\left(\frac{M}{r^n},\frac{M}{R^n}\right) \quad \text{pro všechna } n\in\mathbb{Z}.$$

12. Pomocí rozvoje v Laurentovu řadu spočtěte následující integrály $\int_C\frac{1}{z^n(1+z^2)}\,dz, n\in\mathbb{Z}$, kde C je jednoduchá uzavřená křivka ležící v oblasti a) $|z|>1$ b) $|z|<1$, která má nulu ve své vnitřní oblasti.

13. Předpokládejme, že f je funkce holomorfní v oblasti $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Ukažte, že platí-li $f(2z)=f(z)$ pro všechna $z\neq 0$ je f konstantní funkce.

14. Pomocí Laurentových rozvojů nalezněte Fourierovy řady následujících periodických funkcí

(a) $f(x)=\frac{2\sin x}{5-4\cos x}$

(b) $f(x)=\frac{2\cos x-1}{5-4\cos x}$

(c) $f(x)=\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$, $|q|<1$

(d) $f(x)=\frac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}$, $|q|<1$

(e) $f(x)=\frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}$, $|q|<1$

(f) $f(x)=\ln(1-2q\cos x+q^2)$, $|q|<1$!

15. Besselovy funkce J_n , $n \in \mathbb{Z}$, jsou definovány jako koeficient $a_n(b)$ v Laurentově rozvoji funkce

$$f(z) = e^{\frac{1}{2}b(z-\frac{1}{z})}$$

se středem v bodě 0. Vyjádřete $J_n(b)$ pomocí nekonečné řady.

Výsledky.

1. a) $P(0, \frac{1}{e}, 1)$, b) $\emptyset$ c) konverguje pro $|z| = 1$.

2. a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 2^n}$

3. a) $\frac{1}{6}\left(\sum_{-\infty}^{-1}(-1)^n 2^{-1-n}(z+2)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}}(z+2)^n\right)$

b) $-\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$

c) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|n|}} z^n$

d) $\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2^{|n|}} - 2^{|n|}\right) z^n$

e) $3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{5^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{1}{(z+5)^{2n}} - 15\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{5^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{1}{(z+5)^{2n+1}}, |z+5| \neq 0$

f) $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{z^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$

g) $-\frac{1}{4(z-\mathrm{j})^2} - \frac{\mathrm{j}}{4(z-\mathrm{j})} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)\mathrm{j}^n(z-\mathrm{j})^n}{2^{n+4}}$

h) $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+1}} - \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{4^n}$

ch) $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(1 + n\frac{\pi}{2})}{n!(z-1)^n}$

i) $e\left(1 - \frac{2}{z} + \frac{6}{z} + \cdots\right)$

j) $\cos 1 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2^k}{(2k)!(z-2)^{4k}} + \sin 1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!(z-2)^{4k+2}}$

4. a) ano, b) ano c) ne d) ne e) ne

5. a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{3n+1}, |z| < 1$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{z^{3n+2}}, |z| > 1$

6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\mathrm{j}(-1)^{k-1}}{(2k-1)z^{2k-1}}, |z| > 1$

7. $\frac{1}{z} + \pi^2 z + \frac{7\pi^4}{360} z^3 + \cdots$, v $P(0,0,1)$.

9. Použijte odhad integrálu v integrálním vyjádření koeficientů Laurentovy řady !

10. $a_{2n+1} = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{C}$. Využijte jednoznačnost koeficientů Laurentovy řady!

11. Použijte integrálního vyjádření koeficientů !

12. a) $2\pi\mathrm{j}(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ je-li n liché, 0 jinak

b) $2\pi\mathrm{j}(-1)^{\frac{n+1}{2}}$ je-li n liché, 0 jinak.

13. Využijte jednoznačnosti koeficientů v Laurentově rozvoji !

14. a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx$

d) $1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx$

f) $-2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \cos nx}{n}$

(Nejdříve spočtěte Laurentovu řadu derivace pomocné funkce!)

15. $J_n(b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} \frac{1}{k!}(-1)^k \left(\frac{b}{2}\right)^{2k+n}$. (Využijte pravidla pro počítání součinu řad!)

Na P_2 má funkce rozvoj

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{(a-1)^{n+1}} (z-1)^n.$$

7a

- **Úloha**: Nalezněte Laurentův rozvoj o středu $z = 1$ funkce

$$f(z) = \frac{1}{(z-\mathrm{j})^2}$$

v oblasti $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| > \sqrt{2}\}$.

Řešení: Funkce f je holomorfní v zadané množině, která je vnějškem kruhu se středem v bodě 1 a poloměrem $\sqrt{2}$. Očekáváme proto rozvoj do záporných mocnin členu $z-1$. Bod j leží na hranici této oblasti. Nejdříve rozvineme pro $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| > \sqrt{2}\}$ funkci

$$\frac{1}{z-\mathrm{j}} = \frac{1}{z-1+1-\mathrm{j}} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1-\mathrm{j}}{z-1}} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(1-\mathrm{j})^n}{(z-1)^n} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(1-\mathrm{j})^n}{(z-1)^{n+1}}, \quad |z-1| > \sqrt{2}.$$

Vzniklou identitu budeme derivovat podle proměnné z. Vzhledem k tomu, že Laurentova řada konverguje stejnoměrně na každé omezené uzavřené množině obsažené v $P(1;\sqrt{2},\infty)$ můžeme Laurentův rozvoj derivovat člen po členu. Tím dostáváme

$$-\frac{1}{(z-\mathrm{j})^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-\mathrm{j})^n(-n-1)\frac{1}{(z-1)^{n+2}}.$$

Závěrem,

$$\frac{1}{(z-\mathrm{j})^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-\mathrm{j})^n \frac{n+1}{(z-1)^{n+2}} =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{-2} (-1)^{n+1}(1-\mathrm{j})^{-n-2}(n+1)(z-1)^n.$$

Tento příklad ukazuje obecnou početní metodu rozvoje racionální funkce v Laurentovu řadu. Nejdříve danou racionální funkci rozložíme na parciální zlomky typu

$$\frac{A}{(z-a)^k}.$$

Poté rozvineme funkci

$$\frac{A}{z-a}$$

v geometrickou řadu a výsledek $k-1$ krát derivujeme. Kombinací rozvojů parciálních zlomků pak získáme konečný výsledek.

7b

- **Úloha**: Nalezněte první čtyři členy Laurentova rozvoje funkce

$$f(z) = \frac{e^z}{z(z^2+1)}$$

pro oblast $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.

Řešení: Ze zadání plyne, že střed hledané řady je v $z_0 = 0$. Využijeme standardního rozvoje

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

a nalezneme též rozvoj funkce $\frac{1}{z(z^2+1)}$ v $P(0;0,1)$.

$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n-1} =$$
$$= \frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + \cdots.$$

Tedy

$$f(z) = \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots\right)\cdot\left(\frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + \cdots\right).$$

Laurentovy řady můžeme násobit stejně jako polynomy. V součinu na pravé straně předchozí rovnosti tedy dostáváme nejnižší mocninu z^{-1} a po vynásobení

$$f(z) = \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{2}z - \frac{5}{6}z^2 + \cdots.$$

7c

- **Úloha**: Nalezněte několik prvních členů Laurentova rozvoje funkce $f(z) = \operatorname{cotg} z$ v prstencovém okolí bodu 0.

Řešení: Funkce $\operatorname{cotg} z$ je holomorfní v $\mathbb{C}$ kromě bodů $k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Maximální prstencové okolí nuly, ve kterém můžeme rozvinout $\operatorname{cotg} z$ v Laurentovu řadu je tedy $P(0;0,\pi)$. Pro hledaný rozvoj použijeme algoritmu dělení nekonečných polynomů

$$\operatorname{cotg} z = (\cos z) : (\sin z) = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right) : \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right).$$

(Na hranici tohoto mezikruží řada nekonverguje neboť členy řady nekonvergují k nule.)

9

• **Úloha:** Pro zadané poloměry $0 < r < R < \infty$ nalezněte Laurentovy řady, které konvergují právě v následujících množinách
(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$
(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\}$
(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$.

Řešení: Ve všech případech musíme volit nekonečnou řadu. Budeme ji však hledat jako co nejjednodušší, tedy jako řadu geometrickou.
(a) Podmínce vyhovíme mocninnou řadou

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n z^n,$$

která konverguje právě když $|cz| = |c| \cdot |z| < 1$. Ekvivalentně, $|z| < \frac{1}{|c|}$. Volbou $c = \frac{1}{R}$ tak dostaneme řadu, jejíž obor konvergence je právě zadaná množina. To odpovídá řadě

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^n} z^n.}$$

(b) V tomto případě se pokusíme nalézt hlavní část Laurentovy řady ve tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c^n z^n,$$

tedy ve tvaru geometrické řady s kvocientem $\frac{1}{cz}$. Podmínka konvergence dá

$$\left|\frac{1}{cz}\right| < 1 \quad \text{tj.} \quad |z| > \frac{1}{|c|}.$$

Požadovaný obor konvergence tedy získáme například volbou $c = \frac{1}{r}$. Tím máme řadu

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{r^n}.}$$

(c) Na základě výsledků v předchozích částech je možno zvolit Laurentovu řadu

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{r^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^n} z^n.$$

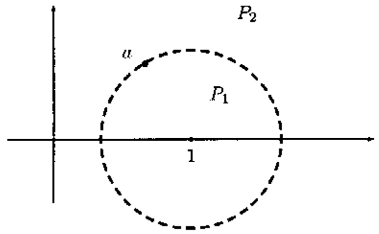
• **Úloha:** Nalezněte Laurentův rozvoj funkce

8

$$f(z) = \frac{1}{z-a}, \qquad a \neq 1$$

se středem v bodě 1 a to ve všech možných oblastech.

Řešení: Zadaná funkce je holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. V úvahu tedy přicházejí dvě oblasti: kruh se středem v bodě 1 a poloměrem $|1-a|$ a vnějšek tohoto kruhu. Na obr. 5.3 jsou označeny jako P_1 a P_2.



Obr. 5.3.

Podívejme se na první případ. Funkci upravíme následujícím způsobem:

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z-1+1-a} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{\frac{z-1}{1-a}+1}.$$

Pro $|z-1| < |1-a|$ je splněna podmínka

$$\left|\frac{z-1}{1-a}\right| < 1,$$

které využijeme k rozvoji v geometrickou řadu

$$\frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{\frac{z-1}{1-a}+1} = \frac{1}{1-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{(a-1)^n}.$$

Máme tedy rozvoj

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{(a-1)^{n+1}}.$$

Nyní se budeme zabývat případem $|z-1| > |1-a|$. V této oblasti platí

$$\left|\frac{1-a}{z-1}\right| < 1,$$

proto využijeme následujících algebraických úprav a rozvoje v geometrickou řadu:

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z-1+1-a} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1-a}{z-1}}$$
$$= \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-1)^n}{(z-1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-1)^n}{(z-1)^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (a-1)^{-n-1} (z-1)^n.$$

Máme tak,

$$
\begin{aligned}
&\left(1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\frac{z^6}{720}+\cdots\right):\left(z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}-\frac{z^7}{5040}+\cdots\right)=z^{-1}-\frac{z}{3}-\frac{z^3}{45}-\cdots\\
&-\left(1-\frac{z^2}{6}+\frac{z^4}{120}-\frac{z^6}{5040}+\cdots\right)\\
&\quad-\frac{z^2}{3}+\frac{z^4}{30}-\frac{z^6}{840}+\cdots\\
&\quad-\left(-\frac{z^2}{3}+\frac{z^4}{18}-\frac{z^6}{360}+\cdots\right)\\
&\qquad-\frac{z^4}{45}+\frac{z^6}{630}-\cdots.
\end{aligned}
$$

Dalším pokračování v dělení (například za pomoci počítače) máme

$$
\operatorname{cotg} z=\frac{1}{z}-\frac{z}{3}-\frac{z^3}{45}-\frac{2z^5}{945}-\frac{z^7}{4725}-\frac{2z^9}{93555}-\cdots. \tag{5.13}
$$

• **Úloha**: Nalezněte rozvoje funkce $f(z)=z\sin\frac{1}{z}$ v Laurentovy řady se středy v bodech 0 a ∞. Stanovte v obou případech koeficienty a_{-2} a a_{10}.

Zde

Řešení: Pro střed v počátku máme

$$
\begin{aligned}
z\sin\frac{1}{z}&=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{z^{2n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{z^{2n}}\\
&=1+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^n}{(-2n+1)!}z^{2n}.
\end{aligned}
$$

To dává $a_{-2}=-\frac{1}{6}$, $a_{10}=0$. Pro střed v nekonečnu použijeme stejného rozvoje

$$
z\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{z^{2n}}.
$$

Odtud $a_{-2}=0, a_{10}=-\frac{1}{11!}$.

• **Úloha**: Pomocí rozvoje v Laurentovu řadu nalezněte následující integrály

$$
I_1=\int_C\frac{2z+1}{(z^2+z-2)z^{100}}\,dz
$$

$$
I_2=\int_C\frac{(2z+1)z^{100}}{z^2+z-2}\,dz,
$$

kde C je kladně orientovaná jednoduchá uzavřená křivka ležící v mezikruží $P(0;1,2)$ a obsahující bod 0 ve svém vnitřku.

Řešení: Z integrálního vztahu pro koeficienty Laurentova rozvoje plyne $I_1=2\pi j a_{99}$, $I_2=2\pi j a_{-101}$, kde a_{99} a a_{-101} jsou koeficienty v Laurentově rozvoji funkce

$$
f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}
$$

v mezikruží $1<|z|<2$. Rozkladem na částečné zlomky máme

$$
\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}.
$$

Rozvojem v řady pak dostáváme

$$
\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}},\qquad |z|<2.
$$

$$
\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}},\qquad |z|>1.
$$

Tedy

$$
\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}\qquad 1<|z|<2,
$$

což dává

$$
\begin{aligned}
I_1&=2\pi j\cdot\frac{-1}{2^{100}}=-\frac{1}{2^{99}}\pi j\\
I_2&=2\pi j a_{-101}=2\pi j.
\end{aligned}
$$

Před poslední úlohou se zmíníme o souvislosti Laurentovy a Fourierovy řady. Nechť funkce $f(t)$ je tvaru

$$
f(t)=R(\cos t,\sin t),
$$

kde $R\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ je racionální funkce ve dvou proměnných, tj. podíl dvou polynomů dvou proměnných. Předpokládáme, že $f(t)$ je definována pro všechna $t\in\langle 0,2\pi\rangle$. Nalezneme metodu výpočtu Fourierovy řady funkce f pomocí Laurentova rozvoje vhodné komplexní funkce. Využijeme Eulerovu identitu $e^{jt}=\cos t+j\sin t, t\in\mathbb{R}$, ze které plyne, že pro $z=e^{jt}$ platí

$$
\begin{aligned}
\cos t&=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}\\
\sin t&=\frac{z-\frac{1}{z}}{2j}=\frac{z^2-1}{2jz}.
\end{aligned}
$$

Definujeme tedy komplexní funkci

$$
\tilde{f}(z)=R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2jz}\right).
$$