6. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1. Nechť je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ a $\rho = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$. Pak uvedená řada konverguje absolutně pro $|z-z_0| < \rho$, diverguje pro $|z-z_0| > \rho$.

Pro libovolné kladné $r < \rho$ konverguje stejnoměrně pro $|z-z_0| \leq r$.

Věta 2. Pro řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{(z-z_0)^n}$ existuje číslo $\rho \in [0,\infty]$ takové, že tato řada konverguje absolutně na množině $K = \{z; |z-z_0| > \rho\}$ a stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině K.

Platí $\rho = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

Definice 3. *Laurentova řada* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ se definuje rovností

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n}.$$

První část Laurentovy řady se nazývá *regulární část*, druhá se nazývá *hlavní část.*

Laurentova řada konverguje, konvergují-li obě její části.

Věta 4. Pro Laurentovu řadu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ existují čísla $0 \leq r \leq R \leq \infty$ tak, že řada konverguje absolutně na množině $M = \{z, r < |z-z_0| < R$ a stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině M.

Součtem této řady je holomorfní funkce v mezikruží M, její derivace a primitivní funkce se získají derivováním a integrováním řady člen po členu.

Věta 5. Nechť $0 \leq r \leq R \leq \infty$ a funkce f je holomorfní v mezikruží M o středu z_0 a poloměrech r, R. Potom

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

pro nějaká $a_n \in \mathbb{C}$ a všechna $z \in M$.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z,$$

kde φ je libovolná jednoduše uzavřená křivka ležící v mezikruží M a obsahující bod z_0 ve svém vnitřku.

Definice 6. Funkci $f(z)$ nazveme *holomorfní* v ∞, je-li funkce $f(1/z)$ holomorfní v 0. *Laurentovou řadou se středem v* ∞ rozumíme řadu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$

přičemž její *regulární částí* rozumíme $\sum_{n=-\infty}^{0}$ (tedy tu část, která je holomorfní v ∞) a *hlavní částí* řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. *Reziduem v* ∞ rozumíme $-a_{-1}$.

Hint

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{pro } z \in \mathbb{C}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{pro } |z| < 1$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{pro } z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{pro } z \in \mathbb{C}$$

Příklady

1. Rozviňte funkci do Laurentovy řady (pomůže znalost geometrického rozvoje)

   (a) $f(z) = \frac{1}{1+z}$ na oblastech, kde to lze, v bodech
      i. $z_0 = 0$
      ii. $z_0 = -1$
      iii. $z_0 = 1$

   (b) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ v $z_0 = 0$ na
      i. $P(0; 0, 1)$
      ii. $P(0; 1, 2)$
      iii. $P(0; 2, \infty)$

   (c) $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$
      i. v $z_0 = -1$,
      ii. v $z_0 = -2$,
      iii. v $z_0 = 1$,

      na oblastech, kde to lze.

   (d) $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$
      i. v $z_0 = 1$
      ii. v $z_0 = -1$
      iii. v $z_0 = 0$

      na oblastech, kde to lze.

2. Rozviňte funkci do Laurentovy řady

   (a) $f(z) = \frac{\cos z}{z}$ v $z_0 = 0$

   (b) $f(z) = z^3 \mathrm{e}^{1/z}$ v $z_0 = 0$

   (c) $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)^2}$ v $z_0 = 1$

   (d) $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)^2}$ v $z_0 = 2$ (derivace)

   (e) $f(z) = \frac{2z+1}{z(z+1)^2}$ v $z_0 = 0$

3. Zjistěte obor konvergence Laurentovy řady

   (a)
   $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|}(z-1)^n$$

   (b)
   $$\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n$$

(c)
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}(z-1)^n$$

(d)
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}(z-i)^n$$

4. Najděte Laurentovu řadu o středu $z_0 = 0$ funkce $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$ v oblasti $P(0; 2, 3)$.

   Využijte ji k výpočtu integrálů
$$\int_C \frac{f(z)}{z^{10}}\,\mathrm{d}z$$
   a
$$\int_C f(z) z^{10}\,\mathrm{d}z,$$
   kde C je $|z| = 5/2$.

5. Najděte rozvoj funkce v bodě ∞ funkce
$$f(z) = z^2 e^{1/z}.$$

6. Rozhodněte, zda lze dané funkce rozvést v Laurentovy řady se středem z_0 v mezikruží $P(z_0; 0, \infty)$
   (a) $\cos \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$
   (b) $\cos \frac{1}{z}$, $z_0 = \infty$
   (c) $\operatorname{tgh} \frac{1}{z}$, $z_0 = \infty$
   (d) $\operatorname{Ln} z$, $z_0 = \infty$
   (e) $\operatorname{Ln} z$, $z_0 = 1$

7. Najděte Laurentovu řadu funkce $f(z)$ v bodě z_0 na dané oblasti:
   (a) $f(z) = \frac{1}{(z-i)^2}$, $z_0 = 1$ $|z-1| > \sqrt{2}$
   (derivace)
   (b) $f(z) = \frac{e^z}{z(z^2+1)}$, $0 < |z| < 1$
   (střed je třeba odhadnout z oblasti)
   (c) $f(z) = \operatorname{cotg} z$, $z_0 = 0$, na prstencovém okolí, stačí prvních pár koeficientů
   (oblast je třeba uhodnout z definičního oboru cotg , samotný rozvoj se řeší dělením (jako u Taylora v reálném oboru))
   (d) $f(z) = z \sin \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$, určete a_{-2} a a_{10}
   (e) $f(z) = z \sin \frac{1}{z}$, $z_0 = \infty$ určete a_{-2} a a_{10}

8. Najděte Laurentovu řadu funkce $f(z) = \frac{1}{z-a}$, $a \neq 1$ se středem bodě 1 a to na všech možných oblastech.

9. Nechť $0 < r < R < \infty$. Najděte Laurentovy řady konvergující na

   (a) $\{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$
   (b) $\{z \in \mathbb{C}; |z| > r\}$
   (c) $\{z \in \mathbb{C}; r < |z| < R\}$

10. Nechť je funkce f hlomorfní v mezikruží $P(0, r, R)$, $r < R$, pro kterou platí

$$f(z) = f(-z), \qquad \forall z \in P(0, r, R).$$

Charakterizujte funkci f pomocí koeficientů v jejím Laurentově rozvoji.