Nechť je $w = f(z)$ komplexní funkce, jednoznačná a spojitá na křivce Γ. Potom integrál z funkce f po křivce Γ je definován takto:

$$\boxed{\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t.}$$

O integrálu funkce komplexní proměnné platí řada vět analogicky k větám o integrálu reálných funkcí, zejména tyto:

$$\int_\Gamma (f_1(z) + f_2(z))\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma f_1(z)\,\mathrm{d}z + \int_\Gamma f_2(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\int_\Gamma k \cdot f(z)\,\mathrm{d}z = k\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z,$$ skládá-li se Γ z křivek Γ_1 a Γ_2, Γ_1 a Γ_2 mají jediný společný bod

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z,$$ značí-li Γ_1 opačně orientovanou křivku Γ

Příklad 4.1.1. *Vypočtěte integrál* $\int_\Gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je úsečka z bodu -1 do bodu 3.*

Řešení: Parametrická rovnice této úsečky je $z(t) = t,\ t \in \langle -1, 3\rangle$.

Z toho vyjádříme $\bar{z}(t) = t$ a $\mathrm{d}z = 1\,\mathrm{d}t$.

$$\int_\Gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^3 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^3 = \frac{9}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = \underline{\underline{4}}.$$

Příklad 4.1.2. *Vypočtěte* $\int_\Gamma |z|\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je horní půlkružnice z bodu 1 do bodu -1.*

Řešení: Parametrická rovnice půlkružnice je $z(t) = e^{\mathrm{j}t}, \quad t \in \langle 0, \pi\rangle$.

Z toho vyjádříme $|z(t)| = 1$ a $\mathrm{d}z = \mathrm{j}\,e^{\mathrm{j}t}\,\mathrm{d}t$.

$$\int_\Gamma |z|\,\mathrm{d}z = \int_0^\pi \mathrm{j}\,e^{\mathrm{j}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{j}\int_0^\pi e^{\mathrm{j}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{j}\left[\frac{e^{\mathrm{j}t}}{\mathrm{j}}\right]_0^\pi = \left[e^{\mathrm{j}t}\right]_0^\pi = e^{\mathrm{j}\pi} - e^0 =$$
$$\cos\pi + \mathrm{j}\sin\pi - 1 = -1 + \mathrm{j}\cdot 0 - 1 = \underline{\underline{-2}}.$$

Příklad 4.1.3. *Vypočtěte* $\int_\Gamma |z|\,\bar{z}\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je horní půlkružnice z bodu -1 do bodu 1.*

Řešení: Parametrická rovnice půlkružnice je $z(t) = e^{\mathrm{j}t}, \quad t = \pi \to t = 0$.

Z toho vyjádříme $|z(t)|\,\bar{z} = e^{-\mathrm{j}t}$ a $\mathrm{d}z = \mathrm{j}\,e^{\mathrm{j}t}\,\mathrm{d}t$.

$$\int_\Gamma |z|\,\bar{z}\,\mathrm{d}z = \int_\pi^0 e^{-\mathrm{j}t}\mathrm{j}\,e^{\mathrm{j}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{j}\int_\pi^0 1\,\mathrm{d}t = \mathrm{j}\,[t]_\pi^0 = \mathrm{j}\,(0-\pi) = \underline{\underline{-\mathrm{j}\,\pi}}.$$

Příklad 4.1.4. *Vypočtěte* $\int_\Gamma \mathcal{R}e\,z\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je horní půlkružnice z bodu 3 do bodu -3.*

Řešení: Parametrická rovnice půlkružnice je $z(t) = 3e^{\mathrm{j}t}, \quad t \in \langle 0, \pi\rangle$.

Potřebujeme vyjádřit $\mathcal{R}e\,z$ ale z této rovnice půlkružnice to nejde, musíme použít jiný zápis: $z(t) = 3(\cos t + \mathrm{j}\sin t), \quad t \in \langle 0, \pi\rangle$.

Potom $\mathcal{R}e\,z = 3\cos t$, a $\mathrm{d}z = (-3\sin t + \mathrm{j}\,3\cos t)\,\mathrm{d}t$, a $\int_\Gamma \mathcal{R}e\,z\,\mathrm{d}z =$

$$= \int_0^\pi 3\cos t(-3\sin t + \mathrm{j}\,3\cos t)\,\mathrm{d}t = 9\int_0^\pi (-\cos t\,\sin t)\,\mathrm{d}t + 9\mathrm{j}\int_0^\pi \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Nejdřív spočítáme první integral pomocí substituce $u = \cos t$.

Pak $\mathrm{d}u = -\sin t\,\mathrm{d}t$, a pro $t = 0$ je $u = 1$, pro $t = \pi$ je $u = -1$.

Dostaneme $9\int_0^\pi (-\cos t\,\sin t)\,\mathrm{d}t = 9\int_1^{-1} u\,\mathrm{d}u = 9\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^{-1} = 9\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0.$

Pro výpočet druhého integrálu použijeme vzorec : $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

Potom $\int_0^\pi \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \dfrac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi \dfrac{\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t =$

$= \left[\dfrac{t}{2}\right]_0^\pi + \left[\dfrac{\sin 2t}{4}\right]_0^\pi = \dfrac{\pi}{2}$. Dostali jsme, že $\int_\Gamma \mathcal{R}e\,z\,\mathrm{d}z = 0 + 9\mathrm{j}\,\dfrac{\pi}{2} = \underline{\underline{\dfrac{9}{2}\pi\mathrm{j}}}$.

1a

Příklad 4.1.5. *Vypočtěte integrál* $\int_\Gamma \mathcal{I}m\,z\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je úsečka z bodu 0 do bodu* $1+\mathrm{j}$.

2 b.

Řešení: Parametrická rovnice této úsečky je $z(t) = t + \mathrm{j}\,t,\ t \in \langle 0, 1\rangle$.

Z toho $\mathcal{I}m\,z(t) = t$ a $\mathrm{d}z = (1+\mathrm{j})\,\mathrm{d}t$ a $\int_\Gamma \mathcal{I}m\,z\,\mathrm{d}z =$

$$\int_0^1 t\cdot(1+\mathrm{j})\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \mathrm{j}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \mathrm{j}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{j}}}.$$

1b

Příklad 4.1.6. *Vypočtěte* $\int_\Gamma \mathcal{R}e\,z\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je oblouk paraboly z bodu 0 do bodu 1, který má parametrickou rovnici* $z(t) = t + \mathrm{j}\,t^2,\ t \in \langle 0, 1\rangle$.

2 b.

Řešení: $\Gamma : z(t) = t + \mathrm{j}\,t^2,\ t \in \langle 0, 1\rangle$, $\mathcal{R}e\,z(t) = t$ a $\mathrm{d}z = (1 + \mathrm{j}\,2t)\,\mathrm{d}t$.

$$\int_\Gamma \mathcal{R}e\,z\,\mathrm{d}z = \int_0^1 t(1+2\mathrm{j}\,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + 2\mathrm{j}\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + 2\mathrm{j}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 =$$
$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\mathrm{j}}}.$$

1h

Příklad 4.1.7. *Vypočtěte* $\int_\Gamma \mathcal{R}e\, z \,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je lomená čára spojující body 0, 1 a* $1+\mathrm{j}$.

Řešení: Křivka Γ se skládá ze dvou úseček Γ_1 a Γ_2.

$\Gamma_1: z(t) = t,\ t \in \langle 0,1\rangle,\quad \mathcal{R}e\, z(t) = t$ a $\mathrm{d}z = \mathrm{d}t$.

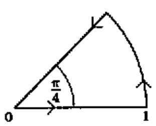
$\Gamma_2: z(t) = 1+\mathrm{j}\,t,\ t \in \langle 0,1\rangle,\quad \mathcal{R}e\, z(t) = 1$ a $\mathrm{d}z = \mathrm{j}\,\mathrm{d}t$.

$$\int_\Gamma \mathcal{R}e\, z\,\mathrm{d}z = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \mathrm{j}\int_0^1 1\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \mathrm{j}\,[t]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}+\mathrm{j}}}.$$

Příklad 4.1.8. *Vypočtěte* $\int_\Gamma |z|\,\overline{z}\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je*

a) kladně orientována kružnice $|z| = 2$

b) daná graficky



Řešení: a) $z(t) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}t},\quad t\in\langle 0,2\pi\rangle,\ |z(t)|\,\overline{z}(t) = 2\cdot 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}$ a $\mathrm{d}z = 2\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}\,\mathrm{d}t$.

$$\int_\Gamma |z|\,\overline{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} 4\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}2\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}\,\mathrm{d}t = 8\mathrm{j}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = 8\mathrm{j}\,[t]_0^{2\pi} = 8\mathrm{j}\,2\pi = \underline{\underline{16\pi\mathrm{j}}}.$$

b) Křivka se skládá ze tři části: $\Gamma = \Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$.

$\Gamma_1: z(t) = t,\quad t\in\langle 0,1\rangle,\ |z(t)|\,\overline{z}(t) = t\cdot t = t^2$ a $\mathrm{d}z = \mathrm{d}t$.

$$\int_{\Gamma_1} |z|\,\overline{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$\Gamma_2: z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}t},\quad t\in\langle 0,\frac{\pi}{4}\rangle,\ |z(t)|\,\overline{z}(t) = e^{-\mathrm{j}t}$ a $\mathrm{d}z = \mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}\,\mathrm{d}t$.

$$\int_{\Gamma_2} |z|\,\overline{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{j}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t = \mathrm{j}\,[t]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\mathrm{j}.$$

$\Gamma_3: z(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}t + \mathrm{j}\,\frac{\sqrt{2}}{2}t = \frac{\sqrt{2}}{2}t(1+\mathrm{j}),\qquad \mathrm{d}z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{j})\,\mathrm{d}t$

a $|z(t)|\,\overline{z}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}t\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}t(1-\mathrm{j}) = \frac{\sqrt{2}}{2}t^2(1-\mathrm{j})$.

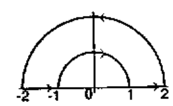
$$\int_{\Gamma_3} |z|\,\overline{z}\,\mathrm{d}z = \int_1^0 t^2\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{j})\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{j})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1-\mathrm{j})(1+\mathrm{j})\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^0 = -\frac{1}{3}.$$

$$\int_\Gamma |z|\,\overline{z}\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1}|z|\,\overline{z}\,\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2}|z|\,\overline{z}\,\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_3}|z|\,\overline{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}\mathrm{j}-\frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}\mathrm{j}}}.$$

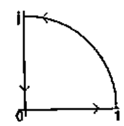
2

Příklad 4.1.9. *Vypočtěte integrály, když integrační cesta je daná graficky*

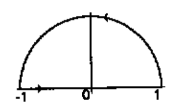
a) $\int_\Gamma |z|\,\overline{z}\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je:*



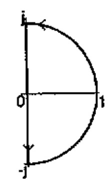
b) $\int_\Gamma |z|\,z\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je:*



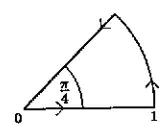
c) $\int_\Gamma \frac{z}{\overline{z}}\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je:*



d) $\int_\Gamma |z|^2\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je:*



e) $\int_\Gamma \frac{\overline{z}}{z}\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je čtvrtkružnice:*



Řešení: a) $5\pi\mathrm{j}$; b) $-\frac{1}{3}$; c) $\frac{4}{3}$; d) $\frac{4}{3}\mathrm{j}$; e) $1+(\sqrt{2}-1)\mathrm{j}$.

Ve všech příkladech v této kapitole jsme integrovali funkce, které nejsou holomorfní na $\mathbb{C}$. Byly to funkce $\mathcal{R}e\, z, \mathcal{I}m\, z, |z|, \overline{z}$, anebo funkce z nich složené. Budeme-li chtít integrovat holomorfní funkce, anebo funkce které jsou holomorfní až na konečný počet bodů v $\mathbb{C}$, nemusíme křivku parametrizovat, ale využíváme Cauchyovou větu, Cauchyův vzorec případně reziduovou větu.

4.2 Cauchyův vzorec a Cauchyova věta

Cauchyova věta. Jestliže funkce $f(z)$ je holomorfní v jednoduše souvislé oblasti v níž leží křivka Γ, potom hodnota integrálu $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ nezávisí na tvaru křivky Γ, pouze na jejich krajných bodech. V takovém případě

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1),$$

kde z_1 je počáteční a z_2 koncový bod křivky Γ, a pro funkci $F(z)$ platí, že $F'(z) = f(z)$.

Pro uzavřenou křivku Γ v této oblasti platí, že $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Cauchyův vzorec. Jestliže funkce $f(z)$ je holomorfní v jednoduše souvislé oblasti Ω v níž leží uzavřená křivka Γ, potom platí

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi\mathrm{j}\, f(z_0), & \text{jestliže } z_0 \text{ leží uvnitř } \Gamma, \\ 0, & \text{jestliže } z_0 \text{ leží vně } \Gamma. \end{cases}$$

3a **Příklad 4.2.1.** *Vypočtěte následující integrály*

- *a)* $\int_\Gamma z^2\,\mathrm{d}z$, *kde* $\Gamma : |z - 3 + 5\mathrm{j}| = \frac{1}{2}$ *je kladně orientovaná kružnice*
- 3c *b)* $\int_\Gamma e^z\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je obvod obdélníka s vrcholy* $z_1 = -1$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1+\mathrm{j}$, $z_4 = -1+\mathrm{j}$, *kladně orientovaný*
- 3b *c)* $\int_\Gamma \sin \mathrm{j}z\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je libovolná křivka spojující body* 0 *a* $\pi\mathrm{j}$
- 3d *d)* $\int_\Gamma \frac{e^z}{z-\mathrm{j}}\,\mathrm{d}z$, $\Gamma : |z+\mathrm{j}| = 1$ *je kladně orientovaná kružnice*
- 6d *e)* $\int_\Gamma \frac{z}{z+2\mathrm{j}}\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je trojúhelník spojující body* $0, 2\mathrm{j}$ *a* $3+\mathrm{j}$

Řešení: a) z^2 je holomorfní funkce na množině $\mathbb{C}$, a proto $\int_\Gamma z^2\,\mathrm{d}z = \underline{\underline{0}}$.

b) e^z je holomorfní funkce na množině $\mathbb{C}$, a proto $\int_\Gamma e^z\,\mathrm{d}z = \underline{\underline{0}}$.

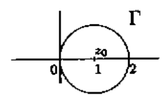
c) $\int_\Gamma \sin \mathrm{j}z\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{\mathrm{j}}\left[\cos \mathrm{j}z\right]_0^{\pi\mathrm{j}} = \mathrm{j}\,(\cos(-\pi) - \cos 0) = \mathrm{j}\,(-1-1) = \underline{\underline{-2\mathrm{j}}}$.

d) $\int_\Gamma \frac{e^z}{z-\mathrm{j}}\,\mathrm{d}z = 0$; e) $\int_\Gamma \frac{z}{z+2\mathrm{j}}\,\mathrm{d}z = 0$.

Příklad 4.2.2. *Využitím Cauchyho vzorce vypočtěte následující integrály*

- *a)* $\int_\Gamma \frac{e^z}{z-1}\,\mathrm{d}z$, *kde* $\Gamma : |z-1| = 1$ *je kladně orientovaná kružnice*
- 4a *b)* $\int_\Gamma \frac{z^2+2z+2}{z-2}\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je daná rovnicí* $|z| = 3$, *kladně orientovaná*
- *c)* $\int_\Gamma \frac{e^{\mathrm{j}z}}{z}\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je daná rovnicí* $|z+1| = 2$, *kladně orientovaná*
- 4c *d)* $\int_\Gamma \frac{\cos z}{z}\,\mathrm{d}z$, $\Gamma : |z| = 1$ *je kladně orientovaná kružnice*
- *e)* $\int_\Gamma \frac{z^2}{z+5-2\mathrm{j}}\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je daná rovnicí* $|z+\mathrm{j}| = 1$, *kladně orientovaná*

Řešení: a) $f(z) = e^z$ je holomorfní funkce na množině $\mathbb{C}$, a bod $z_0 = 1$ leží uvnitř křivky Γ.



Dle Cauchyho vzorce $\int_\Gamma \frac{e^z}{z-1}\,\mathrm{d}z = \underline{\underline{2\pi\mathrm{j}\,e}}$.

b) V tomto případě $f(z) = z^2 + 2z + 2$ a $z_0 = 2$ leží uvnitř křivky Γ.
Podle Cauchyho vzorce $\int_\Gamma \frac{z^2+2z+2}{z-2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j}\,(4+4+2) = \underline{\underline{20\pi\mathrm{j}}}$.

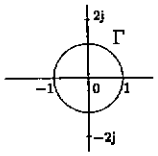
c) $\int_\Gamma \frac{e^{\mathrm{j}z}}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j}$; d) $\int_\Gamma \frac{\cos z}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j}$; e) $\int_\Gamma \frac{z^2}{z+5-2\mathrm{j}}\,\mathrm{d}z = 0$.

Příklad 4.2.3. *Využitím Cauchyho vzorce vypočtěte následující integrály*

- 4b *a)* $\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z(z^2+4)}$, *kde* $\Gamma : |z| = 1$ *je kladně orientovaná kružnice*
- 4d *b)* $\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$, *kde* Γ *je daná rovnicí* $|z-\mathrm{j}| = 1$, *kladně orientovaná*
- *c)* $\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z+1)^2}$, *kde* Γ *je daná rovnicí* $|z-1-\mathrm{j}| = 2$, *kladně orientovaná*
- *d)* $\int_\Gamma \frac{z^2+2z-1}{z(z+2)}\,\mathrm{d}z$, *kde* Γ *je daná rovnicí* $|z+2| = 1$, *kladně orientovaná*
- 6b *e)* $\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$, *kde* Γ *je daná rovnicí* $|z| = 3$, *kladně orientovaná*

4bd
6f

Řešení: a) Funkce $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+4)}$ je holomorfní na $\mathbb{C} - \{0, 2\mathrm{j}, -2\mathrm{j}\}$.



Bod $z_0 = 0$ leží uvnitř křivky Γ, další body, ve kterých funkce není holomorfní leží mimo křivku. Proto funkci upravíme takto:

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+4)} = \frac{\frac{1}{z^2+4}}{z}.$$

Funkce $f(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$ spolu s křivkou Γ a bodem $z_0 = 0$ splňují předpoklady k použití Cauchyho vzorce. Můžeme psát

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z(z^2+4)} = \int_\Gamma \frac{\frac{1}{z^2+4}}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j}\,\frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\pi\mathrm{j}}}.$$

b) Funkce $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{(z+\mathrm{j})(z-\mathrm{j})}$ je holomorfní na $\mathbb{C} - \{\mathrm{j}, -\mathrm{j}\}$.

Bod $z_0 = \mathrm{j}$ leží uvnitř křivky Γ, bod $z_1 = -\mathrm{j}$ leží mimo křivku.

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = \int_\Gamma \frac{\frac{1}{z+\mathrm{j}}}{z-\mathrm{j}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{j}\,\frac{1}{2\mathrm{j}} = \underline{\underline{\pi}}.$$

c) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z+1)^2} = \int_\Gamma \frac{\frac{1}{(z+\mathrm{j})(z+1)^2}}{z-\mathrm{j}}\,\mathrm{d}z = -\frac{\pi}{2}\mathrm{j}$; d) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z^2+2z-1}{z(z+2)}\,\mathrm{d}z = \pi\mathrm{j}$.

e) Funkce $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{(z+\mathrm{j})(z-\mathrm{j})}$ je holomorfní na $\mathbb{C} - \{\mathrm{j}, -\mathrm{j}\}$.

Body $z_0 = \mathrm{j}$, a $z_1 = -\mathrm{j}$ leží uvnitř křivky Γ a nemůžeme použít Cauchyův vzorec pro tuto funkci ani po úpravě. Rozložíme funkci na parciální zlomky.

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{A}{z+\mathrm{j}} + \frac{B}{z-\mathrm{j}}$$

$$1 = A(z-\mathrm{j}) + B(z+\mathrm{j}) \quad\Rightarrow\quad A = \frac{\mathrm{j}}{2},\ B = -\frac{\mathrm{j}}{2}$$

Potom máme

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = \frac{\mathrm{j}}{2}\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z+\mathrm{j}} - \frac{\mathrm{j}}{2}\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-\mathrm{j}} = \frac{\mathrm{j}}{2}2\pi\mathrm{j} - \frac{\mathrm{j}}{2}2\pi\mathrm{j} = \underline{\underline{0}}.$$

(Použili jsme Cauchyův vzorec na každý integrál zvlášť.)

(20) $\int_\Gamma |z|^2$

$e^{i\varphi}$ $\quad \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$x = \cos\varphi \qquad x' = -\sin\varphi$

$y = (1)\sin\varphi \qquad y' = (1)\cos\varphi$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)(-\sin\varphi + i\cos\varphi)\, d\varphi =$$

$$= [\cos\varphi]_{-\pi/2}^{\pi/2} + i\,[\sin\varphi]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0 + i(1+1) = \underline{2i}$$

$x = 0$

$y = t \qquad t \in [1, -1]$

$$\int_{1}^{-1} t^2 (0 + 1i)\, dt = -i \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \underline{\underline{-i\,\frac{2}{3}}}$$

celkem $\underline{\underline{\frac{4}{3}i}}$

$z_0 \in int\ C$ (vnitřní oblast křivky) platí **Cauchyův integrální vzorec** a jeho zobecnění

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)\, dz}{z - z_0}\,, \qquad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{n+1}}\,.$$

Tento zajímavý výsledek ukazuje, že hodnoty holomorfní funkce uvnitř jednoduché uzavřené křivky jsou jednoznačně určené hodnotami této funkce na hraniční křivce.

V příkladech 8.1 - 8.22 počítejte hodnoty integrálů po daných orientovaných křivkách. Pro uzavřené křivky se rozumí orientace křivky vždy v kladném smyslu; opačná orientace by musela být výslovně uvedena.

8.1. $\int_C |z|^2\, dz$, kde C je orientovaná úsečka, která má počáteční bod $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ a koncový bod $z_2 = -1 + 3\mathrm{i}$.

Řešení : Funkce není holomorfní, takže je třeba provést přímý výpočet. K tomu je třeba využívat metody analytické geometrie v rovině. Krajní body dané úsečky mají souřadnice $[1,1]$, $[-1,3]$ a určují směrový vektor $(-2,2)$. Parametrické rovnice orientované úsečky dané bodem a směrovým vektorem mají tvar

$x = 1 - 2t\,,\ y = 1 + 2t\,,\ t \in < 0,1 >$. Odtud $dx = -2\, dt,\ dy = 2\, dt$ a můžeme dosadit do integrálu

$$\int_C |z|^2 dz = \int_C (x^2 + y^2)(dx + \mathrm{i}\, dy) = \int_0^1 [(1-2t)^2 + (1+2t)^2]\cdot$$
$$\cdot(-2+2\mathrm{i})dt = 2(\mathrm{i}-1)\int_0^1 (2+8t^2)\, dt = 4(\mathrm{i}-1)\left(1 + \frac{4}{3}\right) = \frac{28}{3}(\mathrm{i}-1)\,.$$

8.2. $\int_C \bar{z}\, dz$, kde C je orientovaná úsečka s počátečním bodem $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ a s koncovým bodem $z_2 = 2 + \mathrm{i}$.

Výsledek : Hodnota integrálu je $\frac{3}{2}(1 + 2\mathrm{i})$.

6e • **8.3.** $\int_C \frac{dz}{1 + |z|^2}$, kde C je orientovaná úsečka s počátečním bodem $z_1 = \mathrm{i}$ a s koncovým bodem $z_2 = 1 + 2\mathrm{i}$.

Řešení : Integrovaná funkce není holomorfní, takže je třeba provést přímý výpočet. Pro vyjádření úsečky s krajními body $[0,1]$, $[1,2]$ můžeme místo parametrických rovnic použít explicitní rovnici $y = x + 1\,,\ x \in < 0,1 >$ a dosadit

$$\int_C \frac{dz}{1 + |z|^2} = \int_0^1 \frac{dx + \mathrm{i}\, dx}{1 + x^2 + (x+1)^2} = (1 + \mathrm{i})\int_0^1 \frac{dx}{2(x^2 + x + 1)} =$$
$$= \frac{1 + \mathrm{i}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{1 + \mathrm{i}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{3}{\sqrt{3}} - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$
$$= \frac{1 + \mathrm{i}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{\pi}{3} - \mathrm{arctg}\,\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi(1 + \mathrm{i})\sqrt{3}}{36}\,.$$

8.4. $\int_C |z|\, dz$, kde C je orientovaná úsečka s počátečním bodem v počátku a s koncovým bodem $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$.

Výsledek : Po dosazení explicitní rovnice orientované úsečky $y = 2x$, $x \in < 0,1 >$ vyjde hodnota integrálu $\frac{\sqrt{5}}{2}(1 + 2\mathrm{i})$.

6a • **8.5.** $\int_C |z|^2\, dz$, kde C je orientovaný oblouk křivky $y = \frac{1}{x}$, který odpovídá hodnotám nezávisle proměnné $x \in < 1,2 >$.

Řešení : Integrovaná funkce není holomorfní, takže je třeba provést přímý výpočet

$$\int_C |z|^2\, dz = \int_C (x^2 + y^2)(dx + \mathrm{i}\ dy) = \int_0^2 (x^2 + \frac{1}{x^2})(dx - \mathrm{i}\,\frac{dx}{x^2}) =$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} - \mathrm{i}\left(x - \frac{1}{3x^3}\right)\right]_0^2 = \frac{17}{6} - \mathrm{i}\,\frac{31}{24}\,.$$

1c • **8.6.** $\int_C |z|^2\, dz$, kde C je orientovaný oblouk paraboly $y = x^2$ z počátku do bodu $z_0 = 1 + \mathrm{i}$.

Výsledek : Hodnota integrálu je $\frac{8}{15} + \frac{5}{6}\,\mathrm{i}$.

8.7. $\int_C |z + 1 - \mathrm{i}|^2\, dz$, kde křivka C je dána graficky na obr. 14 a.

Řešení : Integrovaná funkce není holomorfní, takže je třeba provést přímý výpočet. Pro body na dané polokružnici ($r = 1$) použijeme tomto případě exponenciální tvar $z = r\,e^{\mathrm{i}t}$, $\bar{z} = r\,e^{-\mathrm{i}t}$, $dz = \mathrm{i}re^{\mathrm{i}t}$, kde $r = 1$ a $t \in < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$. Takže

$$\int_C \frac{1}{\bar{z}}\,dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}t}\,dt}{e^{-\mathrm{i}t}} = \mathrm{i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2\mathrm{i}t}dt = \frac{\mathrm{i}}{2}\,\left[e^{2\mathrm{i}t}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = e^{\pi\mathrm{i}} - e^{-\pi\mathrm{i}} = 0.$$

8.9. $\int_C |z|^2\,dz$, kde křivka C je dána graficky na obr. 14 b.

Řešení : Přímý výpočet je třeba rozdělit na tři části

$$\int_C |z|^2 dz = \int_0^1 x^2\,dx + \mathrm{i}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\mathrm{i}t}dt - \mathrm{i}\int_0^1 y^2 dy = \frac{2}{3}\,(\mathrm{i}-1).$$

8.10. $\int_C \frac{z}{\bar{z}}\,dz$, kde křivka C je dána graficky na obr. 14 c.

Výsledek : Hodnota integrálu je $\frac{4}{3}$.

8.11. $\int_C \bar{z}\,dz$, kde křivka C je dána graficky na obr. 14 d.

Řešení : Přímý výpočet je třeba rozdělit na tři části

$$\int_C \bar{z}\,dz = \int_0^1 x\,dx + \mathrm{i}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\mathrm{i}t}\,e^{\mathrm{i}t}\,dt - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (x - \mathrm{i}x)(1+\mathrm{i})\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\pi}{2} - 2\,\frac{1}{4} = \frac{\pi\,\mathrm{i}}{4}\,.$$

6g • **8.12.** $\oint_C \mathrm{Re}\;z\,dz$, kde C je kladně orientovaná kružnice $|z| = r$.

Řešení : Je třeba provést přímý výpočet, nejlépe z parametrických rovnic kružnice $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in < 0, 2\pi >$

$$\int_C \mathrm{Re}\,z\,dz = \int_C x(dx + \mathrm{i}\,dy) = r^2\int_0^{2\pi}(-\cos t\sin t + \mathrm{i}\,\cos^2 t)dt = \mathrm{i}\,\pi r^2.$$

1f • **8.13.** $\int_C z^2\,dz$, kde C je oblouk paraboly $y = 1 - x^2$ s počátečním bodem $z_1 = -1$ a s koncovým bodem $z_2 = 1$.

Řešení : Integrovaná funkce je holomorfní v celé Gaussově rovině, takže můžeme tvar křivky libovolně změnit (např. na úsečku $y = 0$).

Výpočet je potom jednoduchý $\int_C z^2\,dz = \int_{-1}^1 x^2\,dx = \frac{2}{3}$.
Je možné také využít znalosti primitivní funkce, která je stejně jako v reálném oboru $F(z) = \frac{z^3}{3}$.

Potom $\int_C z^2\,dz = F(1) - F(-1) = \frac{1}{3} - (-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$.

1g • **8.14.** $\int_C z^2\,dz$, kde C je obvod obdélníku s vrcholy $z_1 = 1+\mathrm{i}$, $z_2 = 2\mathrm{i}$, $z_3 = -2$, $z_4 = -1-\mathrm{i}$.

Řešení : Integrovaná funkce je holomorfní v celé Gaussově rovině. Proto integrál po uzavřené křivce je roven nule (ověřte výpočtem).

1i • **8.15.** $\int_C e^z\,dz$, kde C je orientovaný oblouk paraboly s počátečním bodem $z_1 = 1+i$ a s koncovým bodem $z_2 = 2+4i$.

Řešení : Integrovaná funkce je holomorfní v celé Gaussově rovině. Můžeme využít znalosti primitivní funkce ($F(z) = e^z$), takže $\int_C e^z\,dz =$
$= e^{2+4\mathrm{i}} - e^{1+\mathrm{i}} = e^2\,(\cos 4 + \mathrm{i}\,\sin 4) - e(\cos 1 + \mathrm{i}\,\sin 1) \doteq -6,2985 -$
$- 7,8794\,\mathrm{i}$.

1e • **8.16.** $\int_C e^z\,dz$, kde C je orientovaný oblouk elipsy $x^2 + 4y^2 = 4$ s počátečním bodem $z_1 = -\mathrm{i}$ a s koncovým bodem $z_2 = \mathrm{i}$.

Výsledek : Hodnota integrálu je $2\mathrm{i}\,\sin 1 \doteq 1,682942\,\mathrm{i}$.

6j • **8.17.** $\int_C \frac{dz}{z}$, kde C je kružnice $|z| = 1$ (kladně orientovaná).

Řešení: Funkce není holomorfní v bodě $z_0 = 0 \in intC$, takže nejsou splněny podmínky Cauchyovy věty. Z exponenciálního vyjádření dostaneme $z = r\,e^{\mathrm{i}t}$, $dz = \mathrm{i}\,r\,e^{\mathrm{i}t}$ a $\int_C \frac{dz}{z} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{i}\,r\,e^{\mathrm{i}t}\,dt}{r\,e^{\mathrm{i}t}} = 2\pi\mathrm{i}$.

Poznámka : K funkci $f : w = \frac{1}{z}$ existuje primitivní funkce (Ln z), ale vzhledem k její mnohoznačnosti by bylo třeba chápat C jako křivku na příslušné Riemannově ploše. Ukazuje se, že takto chápaná křivka není uzavřená. Těmito problémy se dále nebudeme zabývat.

1j • **8.18.** $\int_C \frac{dz}{z}$, kde C je lomená čára $z_1 = 1$ (počáteční bod), $z_2 = \mathrm{i}$, $z_3 = -2$, $z_4 = -2\mathrm{i}$, $z_5 = 2+2\mathrm{i}$ (koncový bod).

Návod : Podle modifikace Cauchyovy věty můžete křivku C nahradit např. kružnicí $|z| = 1$ a úsečkou z bodu 1 do bodu $2 + 2\mathrm{i}$.

Výsledek : Hodnota integrálu je $\frac{3}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\mathrm{i} + 2\pi\mathrm{i}$.

8.19. $\oint_C \frac{dz}{z - \mathrm{i}}$, kde C je kružnice $|z| = \frac{1}{2}$.

Výsledek : V tomto případě jsou splněny podmínky Cauchyovy věty, takže hodnota integrálu je rovna nule.

1d **8.20.** $\oint_C \frac{dz}{z - \mathrm{i}}$, kde C je kružnice $|z - \mathrm{i}| = \frac{1}{2}$.

Řešení : Protože integrovaná funkce není holomorfní v bodě $z_0 = \mathrm{i}$, který leží ve vnitřní oblasti křivky C , provedeme přímý výpočet. Nejvhodnější je komplexní číslo $z - \mathrm{i}$ vyjádřit v exponenciálním tvaru $z - i = |z - \mathrm{i}|\, e^{\mathrm{i}t}$, $t \in < -\pi, \pi >$.
Po dosazení $|z - \mathrm{i}| = \frac{1}{2}$ a $dz = \mathrm{i}\, \frac{1}{2}\, e^{\mathrm{i}t}\, dt$ vyjde

$$\oint_C \frac{dz}{z - \mathrm{i}} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{i}\, e^{\mathrm{i}t}\, dt}{e^{\mathrm{i}t}} = \mathrm{i}\int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi\mathrm{i}\ .$$

Daný integrál můžeme chápat také jako zvláštní případ Cauchyova integrálního vzorce pro funkci $f(z) = 1$ (viz př. 8.23 a další).

8.21. $\oint_C \frac{dz}{(z + 1 + \mathrm{i})^3}$, kde C je kružnice $|z + 1 + \mathrm{i}| = 1$.

Řešení : V exponenciálním tvaru dostaneme

$$\oint_C \frac{dz}{(z + 1 + \mathrm{i})^3} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{i}\, e^{\mathrm{i}t}\, dt}{e^{3\mathrm{i}t}} = \mathrm{i}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-2\mathrm{i}t}\, dt = \left[\frac{\mathrm{i}\, e^{-2\mathrm{i}t}}{-2\mathrm{i}}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0\ .$$

8 **8.22.** $\oint_C (z - z_0)^n\, dz$, $n \in \mathcal{Z}$, kde C je kružnice $|z - z_0| = r$, $r \in \mathcal{R}^+$.

Řešení : Jde o zobecnění předcházejících příkladů (všimněme si, že výsledek nezáleží na velikosti poloměru).
Pro $n \geq 0$ je integrovaná funkce holomorfní v celé Gaussově rovině a

podle Cauchyovy věty je integrál po uzavřené křivce roven nule.
Pro $n < -1$ se postupuje podobně jako v př. 8.21

$$\int_C (z - z_0)^n\, dz = \mathrm{i}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(n+1)\mathrm{i}t}\, dt = \left[\frac{e^{(n+1)\mathrm{i}t}}{n + 1}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0\ .$$

Pro $n = -1$ se postupuje podobně jako v př. 8.20

$$\int_C (z - z_0)^{-1}\, dz = \int_{-\pi}^{\pi} r^{-1}\, e^{-\mathrm{i}t}\ \mathrm{i}\ r\, e^{\mathrm{i}t}\, dt = \mathrm{i}\ [t]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi\mathrm{i}\ .$$

Je třeba zdůraznit, že mezi všemi integrály tohoto daného typu vychází nenulová hodnota pouze pro $n = -1$.

-- -- -- -- --

V příkladech 8.23 - 8.42 využijte k výpočtu integrálů Cauchyův integrální vzorec nebo jeho zobecnění. Přitom je podstatné vždy ověřit podmínky platnosti těchto vzorců. Křivky jsou zadávány jako kružnice; jiné uzavřené křivky by bylo možné podle modifikace Cauchyovy věty nahradit vhodnými kružnicemi. Všechny dané kružnice jsou chápány jako kladně orientované.

4e **8.23.** $\oint_C \frac{e^z\, dz}{z - 1}$, kde křivka C je dána rovnicí $|z - 1| = 1$.

Řešení : V Cauchyově integrálním vzorci zvolíme $f(z) = e^z$ a $z_0 = 1$. Funkce $f(z) = e^z$ je holomorfní v celé Gaussově rovině a $z_0 = 1$ leží ve vnitřní oblasti dané křivky C . Z Cauchyova integrálního vzorce dostaneme

$$f(1) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^z\, dz}{z - 1} \quad \Rightarrow \quad \oint_C \frac{e^z\, dz}{z - 1} = 2\pi i\, e\ .$$

8.24. $\oint_C \frac{z^2 + 2z + 2}{z + 2}\, dz$, kde křivka C je dána rovnicí $|z| = 3$.

Výsledek : Hodnota integrálu je $4\pi\mathrm{i}$.

4l **8.25.** $\oint_C \frac{\cos z}{z-\mathrm{i}}\,dz$, kde křivka C je dána rovnicí $|z+1+\mathrm{i}|=2$.

Řešení : V Cauchyově integrálním vzorci zvolíme $f(z)=\cos z$ a $z_0=\mathrm{i}$. Funkce $f(z)=\cos z$ je holomorfní v celé Gaussově rovině, ale je třeba zjistit, zda bod $z_0=\mathrm{i}$ leží ve vnitřní oblasti křivky C . V tomto případě neleží, protože $|z_0+1+\mathrm{i}|=|\mathrm{i}+1+\mathrm{i}|=\sqrt{5}>2$. Hodnota integrálu je proto rovna nule.

8.26. $\oint_C \frac{\cos z}{z-\mathrm{i}}\,dz$, kde křivka C je dána rovnicí $|z|=2$.

Výsledek : Hodnota integrálu je $2\pi i\cos\mathrm{i}=2\pi\mathrm{i}\cosh 1 \doteq 9,695\ \mathrm{i}$.

6b **8.27.** $\oint_C \frac{dz}{z\cos z}$, kde křivka C je dána rovnicí $|z|=1$.

Řešení : Zvolíme funkci $f(z)=\frac{1}{\cos z}$ a $z_0=0$. Funkce $f(z)$ není holomorfní pouze pro $z_k=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$. Protože pro všechna $k\in Z$ je $|z_k|>1$, splňuje funkce $f(z)$ podmínky Cauchyova integrálního vzorce. Hodnota integrálu je $2\pi\mathrm{i}\frac{1}{\cos 0}=2\pi\mathrm{i}$.

8.28. $\oint_C \frac{dz}{z^2+1}$, kde křivka C je dána rovnicí $|z-1+\mathrm{i}|=2$.

Řešení : Nejprve rozložíme jmenovatel integrované funkce na součin. Aby bylo možné použít Cauchyův integrální vzorec, je třeba volit bod z_0 tak, aby ležel ve vnitřní oblasti křivky C a podle toho zvolit vhodně funkci $f(z)$. V tomto případě $z_0=-\mathrm{i}$ a $f(z)=\frac{1}{z-\mathrm{i}}$, takže

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+1}=\oint_C \frac{dz}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}=\oint_C \frac{\frac{dz}{z-\mathrm{i}}}{z+i}=2\pi\mathrm{i}\frac{1}{-\mathrm{i}-\mathrm{i}}=-\pi .$$

6i **8.29.** $\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z+1)^2}$, kde křivka C je dána rovnicí $|z-1-2\mathrm{i}|=2$.

Řešení : Je třeba volit $z_0=\mathrm{i}$ a provést úpravy

$$\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z+1)^2}=\oint_C \frac{\frac{dz}{(z+\mathrm{i})(z+1)^2}}{z-i}=2\pi i\frac{1}{(\mathrm{i}+\mathrm{i})(\mathrm{i}+1)^2}=\frac{\pi}{2\mathrm{i}}=-\frac{\pi}{2}\,\mathrm{i} .$$

8.30. $\oint_C \frac{z\,dz}{z^2-2z+2}$, kde křivka C je dána rovnicí $|z+2\mathrm{i}|=2$.

Výsledek : Hodnota integrálu je $2\pi(\mathrm{i}-1)$.

5a **8.31.** $\oint_C \frac{\sin 2z}{z^2}\,dz$, kde křivka C je dána rovnicí $|z|=1$.

Řešení : Funkce $f(z)=\sin 2z$ je holomorfní v celé Gaussově rovině a bod $z_0=0$ leží uvnitř dané kružnice. Podle zobecnění Cauchyova integrálního vzorce (n=1) vyjde

$$\oint_C \frac{\sin 2z}{z^2}\,dz=2\pi\mathrm{i}\ f'(0)=2\pi\mathrm{i}\ 2\cos 0=4\pi\mathrm{i} .$$

6h **3.32.** $\oint_C \frac{e^z\,dz}{(z^2+1)(z+1)^2}$, kde křivka C je dána rovnicí $|z+2|=2$.

Řešení : Zvolíme bod $z_0=-1$, který leží uvnitř dané kružnice. Funkce

$$f(z)=\frac{e^z}{z^2+1}\,,\quad \left(f'(z)=\frac{e^z(z^2+1)-2z\,e^z}{(z^2+1)^2} \right)$$

má pouze dva singulární body $z_1=\mathrm{i}$, $z_2=-\mathrm{i}$, které neleží uvnitř dané kružnice. Jsou tedy splněny podmínky pro užití zobecněného Cauchyova integrálního vzorce

$$\oint_C \frac{e^z\,dz}{(z^2+1)(z+1)^2}=\oint_C \frac{\frac{e^z}{z^2+1}}{(z+1)^2}\,dz=2\pi\mathrm{i}\ f'(-1)=\frac{2\pi\mathrm{i}}{e} .$$

5c **8.33.** $\oint_C \frac{z\cos z}{(z-1)^2}\,dz$, kde křivka C je dána rovnicí $|z|=2$.

Výsledek : Hodnota integrálu je $2\pi(\cos 1-\sin 1)\,\mathrm{i}\doteq -1,8923\ \mathrm{i}$.

8.34. $\oint_C \frac{e^z\,dz}{(z^2+2z+2)^2}$, kde křivka C je dána rovnicí $|z+\mathrm{i}|=2$.

Řešení : Jmenovatel má kořeny $z_1=-1+\mathrm{i}$, $z_2=-1-\mathrm{i}$. Zvolíme $z_0=z_2$ (leží uvnitř dané kružnice) a funkci

$$f(z)=\frac{e^z}{(z-z_1)^2}\,,\quad \left(f'(z)=\frac{e^z(z-z_1-2)}{(z-z_1)^3}\right).$$

Podle zobecněného Cauchyova integrálního vzorce

$$\oint_C \frac{e^z\,dz}{(z^2+2z+2)^2}=2\pi\,\mathrm{i}\,f'(z_2)=2\pi\,\mathrm{i}\,\frac{e^{z_2}(z_2-z_1-2)}{(z_2-z_1)^3}=$$

$$=-\frac{\pi}{2e}\left[(\cos 1+\cos 1)+\mathrm{i}\,(\cos 1-\sin 1)\right]\doteq -0{,}7985+0{,}174\,\mathrm{i}\,.$$

5d

8.35. $\oint_C \frac{\sin z}{z^4}\,dz$, kde křivka C je dána rovnicí $|z-\mathrm{i}|=2$.

Řešení: Pro holomorfní funkci $f(z)=\sin z$ a $z_0=0$ uvnitř dané křivky je možné použít zobecnění Cauchyova integrálního vzorce a vyjde

$$\oint \frac{\sin z}{z^4}\,dz=\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{3!}f'''(0)=\frac{-\pi\,\mathrm{i}}{3}\,.$$

8.36. $\oint_C \frac{z\,dz}{e^z\,(z+1)^3}$, kde křivka C je dána rovnicí $|z+\mathrm{i}|=2$.

Výsledek : Hodnota integrálu je $\pi\,\mathrm{i}\,(ze^{-z})''_{z=-1}=2\pi e^{-1}\mathrm{i}$.

3b

8.37. $\oint_C \frac{e^z\,dz}{z(1-z)^3}$, kde křivka C je dána rovnicí $|z-2+\mathrm{i}|=2$.

Řešení: Bod $z_0=1$ leží ve vnitřní oblasti dané křivky a funkce $f(z)=-\frac{e^z}{z}$ není holomorfní pouze pro $z=0$. Jsou tedy splněny podmínky pro použití zobecněného Cauchyova integrálního vzorce ($n=2$)

$$\oint_C \frac{e^z\,dz}{z(1-z)^3}=\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{2!}f''(1)=-\pi e\ \mathrm{i}\,.$$

6b

8.38. $\oint_C \frac{z+1}{(z+2)^3}\,dz$, kde křivka C je dána rovnicí $|z+1+\mathrm{i}|=1$.

Řešení : Jediný singulární bod integrované funkce leží ve vnější oblasti křivky C , takže platí Cauchyova věta a integrál je roven nule.

6c

8.39. $\oint_c \frac{z+1}{(z+2)^3}\,dz$, kde křivka C je dána rovnicí $|z+1+\mathrm{i}|=2$.

Řešení : Bod $z_0=-2$ leží uvnitř křivky C a funkce $f(z)=z+1$ je holomorfní v celé Gaussově rovině. Ale $f''(z)=0$, takže hodnota integrálu je rovna nula.

8.40. $\oint_C \frac{\cos z}{(z-\mathrm{i})^3}\,dz$, kde křivka C je dána rovnicí $|z-\mathrm{i}|=1$.

Výsledek : Hodnota integrálu je $-\mathrm{i}\,\pi\cosh 1$.

8.41. $\oint_C \frac{z^2+2z-1}{(z+2)^4}\,dz$, kde křivka C je dána rovnicí $|z+1|=2$.

Výsledek : Hodnota integrálu je rovna nule.

14

8.42. $\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}$ pro $n\in\mathcal{N}$ a $|a|<|b|$, kde křivka C je dána rovnicí $|z|=r$, $|a|<r<|b|$.

Řešení : Za daných podmínek můžeme použít pro funkci $f(z)=\frac{1}{z-b}$ zobecnění Cauchyova integrálního vzorce pro $n-1$

$$f^{(n-1)}(z)=(-1)^{n-1}(n-1)!(z-b)^{-n}\,,$$

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}=\frac{(-1)^{n-1}2\pi\,\mathrm{i}}{(a-b)^n}=-\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{(b-a)^n}\,.$$

-- -- -- -- --

8.43. Pro $a\in\mathcal{C}$, $R\in\mathcal{R}$ a funkci $f(z)$, která je holomorfní v oblasti $|z-a|<R$, dokažte pro $r<R$ větu o střední hodnotě ve tvaru

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+r\,e^{\mathrm{i}t})\,dt=f(a)\,.$$

Řešení : Počítejme integrál $\oint_C \frac{f(a+z)}{\mathrm{i}z}\,dz$, kde křivka C je kružnice $|z|=r$, $r<R$. Funkce $\frac{f(a+z)}{\mathrm{i}}$ je holomorfní v oblasti $|z|<R$

a pro bod $z_0 = 0$ a pro tuto kružnici můžeme použít Cauchyův integrální vzorec. Potom z rovnice kružnice $z = r\,e^{\mathrm{i}t}$, $dz = \mathrm{i}\,r\,e^{\mathrm{i}t}\,dt$ dosadíme do integrálu

$$2\pi\,\mathrm{i}\,\frac{f(a)}{\mathrm{i}} = \oint_C \frac{f(a+z)}{\mathrm{i}\,z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{i}\,re^{\mathrm{i}t}dt}{\mathrm{i}re^{\mathrm{i}t}} = \int_0^{2\pi} f(a+re^{\mathrm{i}t})dt.$$

Z této rovnosti je již snadno vidět požadovaný výsledek.

8.44. Pro $a_1 + a_2\mathrm{i} \in \mathcal{C}$, $R \in \mathcal{R}$ a pro funkci $u(x,y)$, která je harmonická v oblasti $(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 < R^2$, dokažte, že pro libovolné $r < R$ platí

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a_1 + r\cos t, a_2 + r\sin t)\;dt = u(a_1, a_2)\;.$$

Řešení: K harmonické funkci $u(x,y)$ lze v dané oblasti najít sdružené harmonické funkce $v(x,y) + c$ a utvořit holomorfní funkce $f(z) = = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y) + \mathrm{i}\,c$, $c \in \mathcal{R}$. Pro libovolnou z těchto funkcí použijeme výsledek předcházejícího příkladu, kde $a_1 + \mathrm{i}\,a_2 = a \in \mathcal{C}$ a parametrické vyjádření kružnice vezmeme ve tvaru

$x = a_1 + r\cos\,t,\ y = a_2 + r\sin t\ ,\ t \in <\ 0, 2\pi\ >$.

Z rovnosti pro komplexní výrazy plyne také rovnost pro reálné části, a to je právě požadovaná rovnost.

8.45. Dokažte, že absolutní hodnota nekonstantní funkce komplexní proměnné ($f(z)$), která je holomorfní v oblasti $\mathcal{D}$, nemůže nabývat maximální hodnoty v žádném vnitřním bodě oblasti $\mathcal{D}$.

Řešení : Pro každý vnitřní bod $a \in \mathcal{D}$ musí existovat kruhové okolí s poloměrem $R < 1$, v němž je funkce $f(z)$ holomorfní. Podle př. 8.43 platí

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + r\,e^{\mathrm{i}t})\;dt\;,\;\; r < R < 1\;.$$

Použijeme obecný výsledek z integrálního počtu :

Absolutní hodnota integrálu z komplexní funkce po křivce je menší nebo rovna součinu délky křivky a maxima z absolutní hodnoty integrované funkce.

Takže pro absolutní hodnotu funkce dostaneme

$$|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(a + r\,e^{\mathrm{i}t})\;dt\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a + r\,e^{\mathrm{i}t})|dt \le$$

$$\le \frac{2\pi r}{2\pi}\;M = r\;M < M\;,$$

kde M je maximální hodnota funkce $|f(z)|$ na kružnici $|z-a| = r$. Ke každé hodnotě $|f(a)|$ lze tedy najít v oblasti $\mathcal{D}$ větší hodnotu.

8.46. Dokažte, že nekonstantní funkce $u(x,y)$, která je harmonická v oblasti $\mathcal{D}$, nemůže nabývat extrémní hodnoty v žádném vnitřním bodě této oblasti $\mathcal{D}$.

Návod : Tvrzení je založeno na výsledku př. 8.44 a dokáže se podobně jako v předcházejícím příkladu.

První integrál je žádaného typu (3.9) pro $f(z) = z/(z^2-1)$ a $z_0 = \mathrm{j}$; druhý s toutéž funkcí, ale pro $z_0 = -\mathrm{j}$. Závěrem

$$\int_C \frac{z}{z^4-1} = \frac{1}{2\mathrm{j}}2\pi\mathrm{j}\frac{\mathrm{j}}{-2} - \frac{1}{2\mathrm{j}}2\pi\mathrm{j}\frac{-\mathrm{j}}{-2} = -\pi\mathrm{j}.$$

Úloha: Pomocí Věty 3.6 – Princip maxima modulu – odvoďte její protějšek pro minimum, tzv. Princip minima modulu:

Je-li f holomorfní, nekonstantní a nenulová na oblasti D, pak $|f|$ nenabývá svého minima v žádném bodě $z \in D$.

Řešení: Protože $f(z) \neq 0$ pro všechna $z \in D$, je funkce

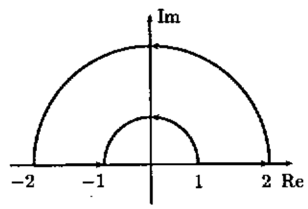
$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

holomorfní a nekonstantní na D. Podle Věty 3.6 $|g|$ nenabývá v žádné bodě $z \in D$ svého maxima. Jinými slovy, $|f|$ nenabývá svého minima na D.

Stejně jako Důsledek 3.2 Principu maxima modulu, má i Princip minima modulu podobný důsledek, viz cvičení 12.

1. Vypočtěte integrály podél zadaných křivek.

(a) $\int_C \mathrm{Re}(z)$, $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$, kladně orientovaná;
(b) $\int_C |z|$, C je úsečka $[0, 2-\mathrm{j}]$;
(c) $\int_C |z|\bar{z}$, $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\} \cup [-1, 1]$, kladně orientovaná;
(d) $\int_C f$, f je hlavní hodnota logaritmu, $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$, kladně orientovaná;
(e) $\int_C e^{-z}$, $C = \{t + 2\mathrm{j}t \mid t \in \langle 1, \infty)\}$;
(f) $\int_C \frac{\bar{z}}{z}$, C je na obr.3.5;
(g) $\int_C (z-\mathrm{j})^2$, $C = \{t + \mathrm{j}t^2 \mid t \in \langle -1, 1\rangle\}$. Zjistěte hodnotu integrálu jednak přímým výpočtem a jednak integrací podél úsečky $[-1+\mathrm{j}, 1+\mathrm{j}]$ a aplikací Cauchyovy věty.



Obr. 3.5.

15

2. Pro která $z \in \mathbb{C}$ platí

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sin(tz)\,\mathrm{d}t = 0$, (b) $\displaystyle\int_{-2}^1 z e^{\mathrm{j}tz}\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{j}$.

12

3. Nechť C je jednoduchá uzavřená kladně orientovaná křivka neprocházející bodem $z_0 \in \mathbb{C}$. Zjistěte, jakých možných hodnot může nabývat integrál

$$\int_C (z - z_0)^n$$

v závislosti na $n \in \mathbb{Z}$ a poloze bodu z_0 vůči křivce C.

7

4. Nechť C je uzavřená jednoduchá kladně orientovaná křivka. Vypočtěte hodnoty integrálu

$$\int_C \frac{1}{z^2+9}$$

v případě, že

(a) bod $3\mathrm{j}$ je uvnitř a bod $-3\mathrm{j}$ vně C;
(b) bod $-3\mathrm{j}$ je uvnitř a bod $3\mathrm{j}$ vně C;
(c) oba body $3\mathrm{j}$ a $-3\mathrm{j}$ leží vně C;
(d) oba body $3\mathrm{j}$ a $-3\mathrm{j}$ leží uvnitř C.

9

5. Nechť $P(z)$ je polynom

$$P(z) = (z - z_1)\cdots(z - z_n),$$

kde $z_1, \ldots, z_n$ jsou navzájem různá čísla. Nechť C je uzavřená jednoduchá křivka kladně orientovaná neprocházející žádným z bodů $z_1, \ldots, z_n$. Jaký je maximální počet různých hodnot integrálu

$$\int_C \frac{1}{P(z)}$$

v závislosti na poloze křivky C vůči bodům $z_1, \ldots, z_n$?

6. Nechť C je uzavřená jednoduchá a kladně orientovaná křivka neprocházející body $\pm\mathrm{j}a$, $a > 0$. Zjistěte všechny hodnoty integrálu

$$\int_C \frac{e^z}{z^2+a^2}$$

v závislosti na křivce C.

7. Nechť $f(z) = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{t-z}\,\mathrm{d}t$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

(a) Je $\operatorname{Re} f$ omezená funkce na $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$?
(b) Je $\operatorname{Im} f$ omezená funkce na $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$?
(c) Je f holomorfní na $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$?
(d)* Existuje $\lim_{z\to\infty} z f(z)$?
(e)* Spočtěte $\int_C f$ přes uzavřenou jednoduchou a kladně orientovanou křivku C mající ve svém vnitřku úsečku $[-1,1]$.

10

8. Nechť f je holomorfní na $\mathbb{C}$ taková, že existuje $a > 0$ s vlastností

$$f(z) = f(z+a) = f(z+\mathrm{j}a)$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Ukažte, že f musí být nutně konstantní.

13

9. Nalezněte všechny funkce f holomorfní na $\mathbb{C}$ takové, že
   (a) f má omezenou primitivní funkci;
   (b) f má omezenou derivaci $f^{(k)}$ řádu $k \geq 0$.

10. Ukažte přímo bez užití Věty 3.6, že funkce $|e^z|$ nabývá svého maxima na hranici omezené oblasti D.

11

11. Vypočtěte minima a maxima absolutních hodnot následujících funkcí
   (a) $f(z) = z^2 - z$ na $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$;
   (b) $f(z) = \sin z$ na $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| \leq \pi,\ |\operatorname{Im} z| \leq 1\}$.

12. Z Principu minima modulu vyvoďte jeho následující verzi:

    Nechť f je holomorfní v omezené oblasti D spojitá na uzávěru $\overline{D}$. Pak buď $f(z) = 0$ pro nějaké $z \in D$ nebo $|f|$ nabývá své minimum na hranici ∂D.

× 13. Nechť f je holomorfní a nekonstantní na oblasti $U(0;1)$ a spojitá na $\overline{U(0;1)}$. Nechť $|f(z)| = 1$ pro $|z| = 1$. Ukažte, že pak f musí mít kořen v $U(0;1)$.

Výsledky.

1.(a) $\pi \mathrm{j} r^2$, (b) $\sqrt{5}(1-\mathrm{j}/2)$, (c) $\pi\mathrm{j}$, (d) $-2\pi\mathrm{j}r$, (e) $-1-2\mathrm{j}$, (f) $4/3$, (g) $2/3$; 2.(a) $z = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, (b) $z = (2k+1)\pi$, $z = 2k\pi - \mathrm{j}\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $z = (2k+1)\pi - \ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 3. 0 pro $n \neq -1$, $2\pi\mathrm{j}$ pro $n = -1$ a z_0 uvnitř C, 0 pro $n \neq -1$ a z_0 vně C; 4. (a) $\pi/3$, (b) $-\pi/3$, (c) 0, (d) 0; 5. $2^n - 1$ pro $n > 1$ a 2 pro $n = 1$; 6. $2\pi\mathrm{j}\frac{\sin a}{a}$ pro $\pm\mathrm{j}a$ uvnitř C, 0 pro $\pm\mathrm{j}a$ vně C, $\frac{\pi}{a}e^{\mathrm{j}a}$ pro $\mathrm{j}a$ uvnitř a $-\mathrm{j}a$ vně C, $-\frac{\pi}{a}e^{\mathrm{j}a}$ pro $-\mathrm{j}a$ uvnitř a $\mathrm{j}a$ vně C; 7. (a) neomezená, (b) omezená, (c) z Cauchy-Riemannových podmínek plyne, že f je holomorfní, (d) existuje a je rovna 2, využijte toho, že $|zf(z)+2| = \left|\int_{-1}^{1} \frac{t}{t-z}\,dt\right|$, (e) $-4\pi\mathrm{j}$, zaměňte

pořadí integrace v $\int_C \int_{-1}^{1} \frac{dt}{t-z}\,dz$; funkce f je $f(z) = \ln_0 \frac{z-1}{z+1}$; 8. Funkce f je omezená na $\mathbb{C}$, užijte Větu 3.4; 9. (a) $f = 0$, (b) f je polynom stupně k; 11. (a) minimum je v bodě $z = 0$, maximum v bodě $z = -1$, (b) minimum je v bodech $0, \pm\pi$, maximum v bodech $\pm\pi/2 \pm \mathrm{j}$; 12. Protože $|f|$ je spojitá na omezené uzavřené množině $\overline{D}$, nabývá na ní svého minima. Je-li $f \neq 0$ na D a nekonstantní, pak nenabývá minima na D. Odtud plyne, že minima se nabývá na $\overline{D} \setminus D = \partial D$; 13. Z Důsledku 3.2 a cvičení 12 plyne, že nemá-li f kořen v $U(0;1)$, pak ke $|f| = 1$ na $U(0;1)$. Cvičení 13 (b) v Kapitole 2 dává, že pak f =konst.

(7)

$$\int_C \frac{1}{z^2+9}\,dz = \int_C \frac{1}{(z-3i)(z+3i)}\,dz$$

(a) $3i$ uvnitř $\qquad -3i$ vně

CVz. $\quad f(z) = \frac{1}{z+3i} \qquad w = 3i$

$$\int = \frac{1}{3i+3i} \cdot 2\pi i = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}$$

(b) $-3i$ uvnitř $\qquad 3i$ vně

$f(z) = \frac{1}{z-3i} \qquad w = -3i$

$$\int = \frac{1}{-3i-3i} \cdot 2\pi i = -\frac{\pi}{3}$$

(c) CV $\qquad 0$

(d) oba uvnitř

$$\frac{A}{z+3i} + \frac{B}{z-3i} = \frac{1}{(z+3i)(z-3i)}$$

$Az - 3iA + Bz + B3i = 1$

$A + B = 0 \qquad A = -B$

$-3iA + B3i = 1$

$2 \cdot 3i B = 1$

$B = \frac{1}{6i} \quad A = -\frac{1}{6i}$

$$\int_C \frac{-\frac{1}{6i}}{z+3i} + \frac{\frac{1}{6i}}{z-3i}\,dz$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$-\frac{1}{6}\,2\pi i + \frac{1}{6}\cdot 2\pi i = \underline{\underline{0}}$$

$P(z) = (z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$

z_i různá

C uz. jedn. kl. orient. $\quad z_i \notin C \quad i=1,\dots,n$

$$\int_C \frac{1}{P(z)}$$

- různé hodnoty závisí na poloze bodů, $n \neq 1$

  možné polohy: $\Sigma = 2^n$

  - $\forall$ body vně křivky $\quad$ C. věta $\int = 0$
  - 1 bod z_i uvnitř $\quad \int = 2\pi i \dfrac{1}{(z_i-z_1)\cdots(z_i-z_{i-1})\cdot(z_i-z_{i+1})\cdot(z_i-z_n)}$
  - 2 body uvnitř $\rightarrow$ rozklad na parc. zlomky

    např. $\left(\dfrac{A}{(z-z_1)} + \dfrac{B}{(z-z_2)}\right) \cdot \dfrac{1}{(z-z_3)(z-z_4)\cdots(z-z_n)}$

    pak $\int = 2\pi i \cdot \left(\dfrac{A}{(z_1-z_3)\cdots(z_1-z_n)} + \dfrac{B}{(z_2-z_3)\cdots(z_2-z_n)}\right)$

  ⋮

  - $\forall$ body uvnitř

    rozklad: $\dfrac{A}{z-z_1} + \dfrac{B}{z-z_2} + \dfrac{C}{z-z_3} + \cdots \dfrac{\cdot}{z-z_n}$

    $\int = 2\pi i\,(A + B + C + \cdots)$

    ale z rozkladu na zlomky vyjde 0

    (a ta už byla)

$\rightarrow$ $\underline{2^n - 1}$ různých hodnot

- pro $n=1$ vyjde $2\pi i$ a 0 $\quad \rightarrow$ $\underline{2 \text{ hodnoty}}$

f holom. na $\mathbb{C}$; $\exists\, a > 0$, $a \in \mathbb{R}$

$$f(z) = f(z+a) = f(z+ia) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Ukažte, že z je konstantní

- kdybychom ukázali, že je funkce omezená, vyplynulo by tvrzení z Liouvilleovy věty
- f je omezená:

- jelikož f se "kopíruje" na čtvercích velikosti $a \times a$, vyšetříme jen čtverec $A = [0,a] \times [0,a]$
- f je holomorfní na $\bar{A}$, na $\bar{A}$ je tedy spojitá

→ spojitá fce na kpt je omezená

$\square$

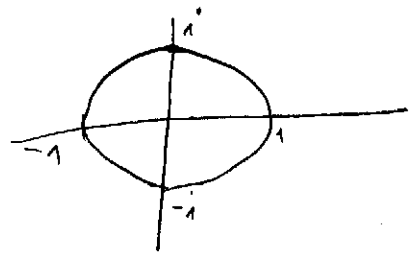
(a) $f(z)=z^2-z$ na $|z|\leq 1$

$|f(z)| = |z|\,|z-1|$

minimum: $z=0$ $f(0)=0$

maximum: fce je holom. na oblasti → maximum je na hranici → $|z|=1$

$|f(z)| = |z-1|$

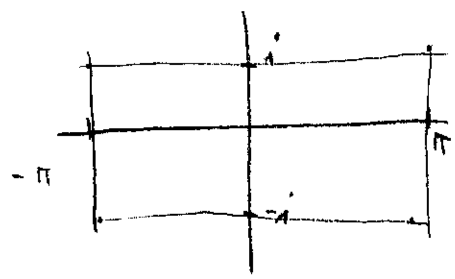


$\max\limits_{|z|=1} |z-1| = |-1-1| = 2$

(b) $f(z) = \sin z$ na $|\mathrm{Re}\, z|\leq \pi$; $|\mathrm{Im}\, z|\leq 1$

minimum: $z=0$ $\sin 0 = 0$

maximum: opět na hranici:



(1) $z = ti + \pi$, $t\in[-1,1]$

(2) $= ti - \pi$

(3) $z = i + t$ $t\in[-\pi,\pi]$

(4) $z = -i + t$ $t\in[-\pi,\pi]$

$2\sin z = e^{iz} - e^{-iz}$

víme: $|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$

po dosazení $\sqrt{\sin^2(\pm\pi) + \sinh^2(t)}$ $t\in[-1,1]$

nebo $\sqrt{\sin^2 u + \sinh^2(\pm 1)}$ $u\in[-\pi,\pi]$

fakt: sinh je lichá fce, rostoucí
sin lichá fce

možnosti: $\left\{\begin{array}{l} \sinh(1) \\ \sqrt{\sinh(1) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} \end{array}\right.$ ⇐ maximum v bodě $\underline{\pm\frac{\pi}{2} \pm i}$

C jednoduchá, uz., kl. orient., neprochází $z_0 \in \mathbb{C}$ (12)

$$\int_C (z-z_0)^n \qquad n \in \mathbb{N}, \quad z_0 \in \mathbb{C}, \ z_0 \notin C$$

(a) $n \geq 0$ fce je holomorfní na $\mathbb{C}$

$\Rightarrow \int = 0$

(b) $n < 0$, $n \neq -1$ přímý výpočet (převod na kružnici)

$z = re^{it} + z_0 \qquad t \in [-\pi, \pi]$ $\qquad z_0$ uvnitř

$$\int_{-\pi}^{\pi} r^n e^{itn} \cdot re^{it} \, dt = \left[\frac{e^{(n+1)it}}{n+1} \right]_{-\pi}^{\pi} = \underline{0}$$

(c) z_0 venku $\Rightarrow_{\forall n \in \mathbb{Z}}$ holomorfní

$\int = 0$

(d) $n = -1$, z_0 uvnitř

$z = z_0 + re^{it} \qquad t \in [-\pi, \pi] \qquad dz = ire^{it}$

$$\int_C \frac{1}{z-z_0} \, dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r \cdot 1}{re^{it}} ie^{it} \, dt = i[t]_{-\pi}^{\pi} = \underline{\underline{2\pi i}}$$

(13)

f holom. na $\mathbb{C}$

(a) f má om. PF F, označme $M = \max |F|$

platí, že pro $\forall$ kruh $|z-w| \leq r$

$$|f(w)| = |F'(w)| \leq \frac{1}{r} \max\{F(z);\ |z-w| = r\} \leq \frac{M}{r} \to 0$$

$\to$ $f(w) = 0$, to ale platí pro $\forall\, w \in \mathbb{C}$

$\to$ $f \equiv 0$

(b) $f^{(k)}$ je omezená, $k \geq 0$

Liouville $\to$ omezená celistvá fce je konstantní

f je holom. $\to$ má der. $\forall$ řádu $\to$ $f^{(k)}$ je tedy

též holomorfní $\to$

$$f^{(k)} = M$$

pak f je je polynom st k

15

$$\int_0^1 \sin tz \, dt = 0$$

$$= \left[\frac{-1}{z} \cdot \cos tz\right]_0^1 = \frac{1}{z}\left[\cos z + \cancel{} 1\right]$$

$\rightarrow \quad \cos z = 1$

$e^{iz} + e^{-iz} = 2 \qquad e^{iz} =: u$

$u + \frac{1}{u} = 2$

$u^2 - 2u + 1 = 0 \qquad e^{iz} = 1$

$(u-1)^2 = 0 \qquad e^{ix-y} = 1(\cos 0 + i \sin 0)$

$e^{-y}(\cos x + i \sin x) = 1(\cos 0 + i \sin 0)$

$\rightarrow \quad y = 0 \qquad x = 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$