5. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1 (Křivkový integrál komplexní funkce)**.** Integrál $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ komplexní funkce f po křivce C se definuje jako křivkový integrál 2. druhu z komplexního pole (f, if) po křivce C, tedy

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C (f_1(x,y)\,\mathrm{d}x - f_2(x,y)\mathrm{d}y) + i\int_C (f_2(x,y)\,\mathrm{d}x + f_1(x,y)\mathrm{d}y).$$

Je-li C orientovaná hladká křivka parametrizovaná funkcí $\Phi = (\varphi, \psi) : [a,b] \to G$ mající spojitou derivaci, lze psát

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi(t) + i\psi(t))(\varphi'(t) + i\psi'(t))\mathrm{d}t.$$

Věta 2 (Vlastnosti integráu)**.** Nechť f a g jsou komplexní funkce definované na příslušných křivkách. Následující platí, má-li pravá strana smysl:

- $\int_C \alpha f(z) + \beta g(z)\,\mathrm{d}z = \alpha\int_C f(z)\,\mathrm{d}z + \beta\int_C g(z)\,\mathrm{d}z$
- $\int_{C_1+C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z$
- $\int -Cf(z)\,\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$

Věta 3. Nechť funkce f má na **jednoduše souvislé oblasti** G **spojité parciální derivace**. Pak je ekvivalentní:

1. f je holomorfní na G,
2. integrály z f po křivkách ležících v G nezávisí na cestě,
3. každý integrál z f po jednoduché uzavřené křivce v G je nulový.

Důsledek 4. Nechť f je holomorfní na jednoduše souvislé otevřené množině G a má na G spojité parciální derivace. Je-li C křivka v G s počátečním bodem P a koncovým bodem Q, pak

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(Q) - F(P),$$

kde F je primitivní funkce k f.

Věta 5 (Cauchy-Goursat)**.** Nechť f je holomorfní na **po částech hladké Jordanově** křivce C a na jejím vnitřku. Potom je

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Věta 6 (Cauchyův vzorec)**.** Nechť C je hladká Jordanova křivka a f je holomorfní uvnitř C a na C. Potom pro každý bod w ve vnitřku C platí

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-w} \, \mathrm{d}z.$$

Důsledek 7. Holomorfní funkce v otevřené množině G má v G derivace všech řádů a platí

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} \, \mathrm{d}z,$$

kde C je po částech hladká Jordanova křivka ležící i s vnitřkem v G.

Věta 8 (Liouville)**.** Každá omezená celistvá funkce je konstantní.

Věta 9. Je-li f holomorfní na $|z-w| \leq r$, pak

$$|f^{(n)}(w)| \leq \frac{n!}{r^n} \max\{|f(z)|; |z-w| = r\}.$$

Věta 10 (Princip maxima modulu)**.** Nechť f je holomorfní na omezené oblasti D a spojitá na uzávěru $\bar{D}$. Pak f nabývá svého maxima vždy na hranici ∂D. Neboli

$$|f(z)| \leq \max_{w \in \partial D} |f(w)|.$$

Fakt:

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$$

Příklady

Není-li řečeno jinak, jsou uzavřené křivky orientovány kladně. Křivka mezi body a a b začíná v bodě a a končí v bodě b.

1. Spočtěte integrál $\int_C f(z) \, \mathrm{d}z$

   (a) $f(z) = \Im z$, C je úsečka z bodu 0 do bodu $1+i$

   (b) $f(z) = \Re z$, C je oblouk paraboly z bodu 0 do bodu 1, s parametrickou rovnicí $z(t) = t + it^2$, $t \in [0,1]$.

   (c) $f(z) = |z|^2$, C je oblouk křivky $y = x^2$, z počátku do bodu $1+i$.

   (d) $f(z) = \frac{1}{z-i}$, C je $|z-i| = \frac{1}{2}$.

   (e) $f(z) = e^z$, C je oblouk elipsy $x^2+4y^2 = 4$ s počátečním bodem $-i$ a koncovým bodem i.

   (f) $f(z) = z^2$, C je oblouk paraboly $y = 1 - x^2$ s počátečním bodem -1 a koncovým bodem 1.

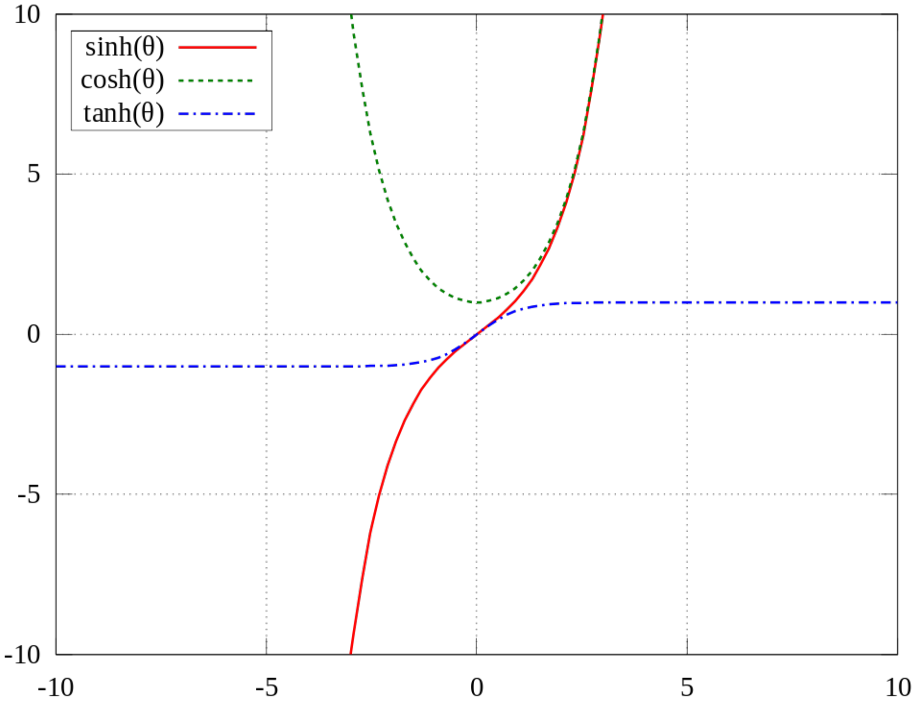
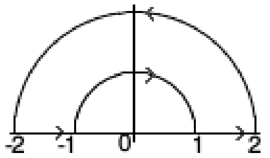


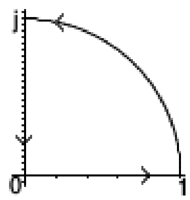
Figure 1: Hyperbolické funkce

Příklad 4.1.9. *Vypočtěte integrály, když integrační cesta je daná graficky*

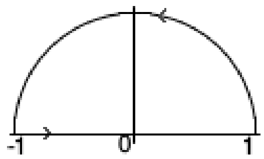
a) $\displaystyle\int_\Gamma |z|\ \overline{z}\,\mathrm{d}z,$ *kde* Γ *je:*



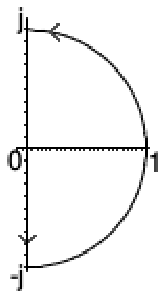
b) $\displaystyle\int_\Gamma |z|\ z\,\mathrm{d}z,$ *kde* Γ *je:*



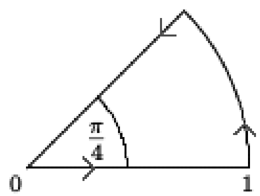
c) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z}{\overline{z}}\,\mathrm{d}z,$ *kde* Γ *je:*



d) $\displaystyle\int_\Gamma |z|^2\,\mathrm{d}z,$ *kde* Γ *je:*



e) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\overline{z}}{z}\,\mathrm{d}z,$ *kde* Γ *je čtvrtkružnice:*



(g) $f(z) = z^2$, C je obvod obdélníka s vrcholy $1+i$, $2i$, -2 a $-1-i$.
(h) $f(z) = \Re z$, C je lomená čára spojující body 0, 1 a $1+i$.
(i) $f(z) = e^z$, C je oblouk paraboly mezi body $1+i$ a $2+4i$.
(j) $f(z) = \frac{1}{z}$, C je lomená čára mezi body 1, i, -2, $-2i$, $2+2i$.

2.

3. Cauchyho Věta - Spočtěte integrál $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$

(a) $f(z) = z^2$, C je $|z-3+5i| = \frac{1}{2}$.
(b) $f(z) = \sin iz$, C je libovolná křivka spojující body 0 a πi.
(c) $f(z) = e^z$, C je obvod obdélníka s vrcholy -1, 1, $1+i$, $-1+i$.
(d) $f(z) = \frac{e^z}{z-i}$, C je $|z+i| = 1$.

4. Cauchyův vzorec - Spočtěte integrál $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$

(a) $f(z) = \frac{z^2+2z+2}{z-2}$, C je $|z| = 3$.
(b) $f(z) = \frac{1}{z(z^2+4)}$, C je $|z| = 1$.
(c) $f(z) = \frac{\cos z}{z}$, C je $|z| = 1$.
(d) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, C je $|z-i| = 1$.
(e) $f(z) = \frac{e^z}{z-1}$, C je $|z-1| = 1$.
(f) $f(z) = \frac{\cos z}{z-i}$, C je $|z+1+i| = 2$.

5. Cauchyův zobecněný vzorec - Spočtěte integrál $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$

(a) $f(z) = \frac{\sin 2z}{z^2}$, C je $|z| = 1$
(b) $f(z) = \frac{e^z}{z(1-z)^3}$, C je $|z-2+i| = 2$.
(c) $f(z) = \frac{z\cos z}{(z-1)^2}$, C je $|z| = 2$.
(d) $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$, C je $|z-i| = 2$.

6. Integrály bez návodu

(a) $f(z) = |z|^2$, C je oblouk křivky $y = 1/x$, $x \in [1,2]$.
(b) $f(z) = \frac{1}{z\cos z}$, C je $|z| = 1$
(c) $f(z) = \frac{z+1}{(z+2)^3}$, C je $|z+2+i| = 2$
(d) $f(z) = \frac{z}{z+2i}$, C je trojúhelník spojující body 0, $2i$ a $3+i$.
(e) $f(z) = \frac{1}{1+|z|^2}$, C je úsečka mezi body i a $1+2i$.
(f) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, C je $|z| = 3$.
(g) $f(z) = \Re z$, C je $|z| = r$, $r > 0$.
(h) $f(z) = \frac{e^z}{(z^2+1)(z+1)^2}$, C je $|z+2| = 2$.
(i) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z+1)^2}$, C je $|z-1-2i| = 2$.
(j) $f(z) = \frac{1}{z}$, C je $|z| = 1$.
(k) $f(z) = \frac{z+1}{(z+2)^3}$, C je $|z+1+i| = 1$.

7. Nechť C je jednoduchá uzavřená kladně orientovaná křivka. Spočtěte integrál $\int_C \frac{1}{z^2+9}\,\mathrm{d}z$, jestliže

(a) bod $3i$ je uvnitř a bod $-3i$ vně křivky C
(b) bod $-3i$ je uvnitř a bod $3i$ vně křivky C
(c) oba body jsou vně C
(d) oba body jsou uvnitř C

8. Spočtěte integrál $\int_C (z-z_0)^n \,\mathrm{d}z$, $n \in \mathbb{Z}$, kde C je kružnice $|z-z_0| = r$, $r > 0$.

9. Nechť $P(z)$ je polynom

$$P(z) = (z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n),$$

kde z_i jsou navzájem různá komplexní čísla. Nechť C je uzavřená jednoduchá a kladně orientovaná křivka neprocházející žádným z bodů z_i, $i = 1, \dots n$. Jaký je maximální počet různých hodnot integrálu

$$\int_C \frac{1}{P(z)} \,\mathrm{d}z$$

v závislosti na poloze křivky C vůči bodům $z_1, \dots z_n$?

10. Nechť f je holomorfní na $\mathbb{C}$ taková, že existuje $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$ s vlastností

$$f(z) = f(z+a) = f(z+ia), \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ukažte, že f už je konstantní.

11. Najděte maxima a minima absolutní hodnoty funkce

(a) $f(z) = z^2 - z$ na $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$,
(b) $f(z) = \sin z$ na $D = \{z \in \mathbb{C}, |\Re z| \leq \pi, |\Im z| \leq 1\}$.

12. Nechť C je jednoduchá uzavřená kladně orientovaná křivka neprocházející bodem z_0. Spočtěte integrál $\int_C (z-z_0)^n \,\mathrm{d}z$, $n \in \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ v závislosti na n poloze bodu z_0 vůči křivce C.

13. Ukažte, že jestliže je f holomorfní na $\mathbb{C}$ a

(a) f má omezenou primitivní funkci, tak už $f \equiv 0$.
(b) f má omezenou derivaci $f^{(k)}$ řádu $k \geq 0$, tak je f polynom stupně k.

14. Spočtěte integrál $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n(z-b)}$ pro $n \in \mathbb{N}$, $|a| < |b|$, kde C je dáno rovnicí $|z| = r$, $|a| < r < |b|$.

15. Pro která $z \in \mathbb{C}$ platí

$$\int_0^1 \sin(tz)\mathrm{d}t = 0?$$