4. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť je komplexní funkce f komplexní proměnné definována v okolí bodu w. Jestliže existuje limita

$$\lim_{z \to w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w},$$

nazývá se její hodnota *derivací* funkce f v bodě w a značí se $f'(w)$. Funkce je *holomorfní* na otevřené množině, jestliže má derivaci v každém bodě této množiny.

Věta 2. Platí vzorce pro derivaci součtu, součinu, podílu, složené funkce a inverzní funkce.

Součet a součin holomorfních je holomorfní. Pro podíl taktéž, pokud jmenovatel nemá na G nulové hodnoty.

Věta 3. Má-li f **spojité parciální derivace** v okolí bodu w a jsou splněny **Cauchy-Riemannovy podmínky**

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(w) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(w), \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(w) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(w),$$

má f bodě w derivaci tvaru $\frac{\partial f_1}{\partial x} + i\frac{\partial f_2}{\partial x}$.

Věta 4.

- Polynomy, exponenciální funkce, trigonometrické funkce jsou holomorfní na $\mathbb{C}$.
- Racionální funkce jsou holomorfní na svém definičním oboru.
- Větve funkcí logaritmus a odmocniny jsou holomorfní uvnitř svého definičního oboru.
- Reálná funkce na otevřené podmnožině roviny je holomorfní, právě když je konstantní.

Definice 5. Reálná funkce $f(x, y)$ dvou proměnných definovaná na otevřené množině G se nazývá *harmonická*, jestliže má na G **spojité parciální derivace 2. řádu** a v každém bodě G platí:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Definice 6. Nechť f je holomorfní na množině G, která má na G spojité 2. parciální derivace. Pak obě její složky jsou harmonické na G. (Věta platí dokonce bez předpokladu existence parciálních derivací.)

Definice 7. Nechť f je harmonická reálná funkce dvou proměnných na **jednoduše souvislé** otevřené množině G. Pak existují až na konstanty jediné reálné funkce g, h dvou proměnných tak, že funkce $f + ig$ a $h + if$ jsou holomorfní v G.

Příklady

1. Z definice vypočítejte derivaci v bodě w funkce

   (a) $\frac{1}{z}$ (b) z^3 (c) $\frac{1}{z^2}$

2. Rozhodněte, pro která $z \in \mathbb{C}$ existuje derivace funkce

   (a) $|z|^2$
   (b) $\bar{z}$
   (c) z^3
   (d) $\Im z$
   (e) $\frac{1}{z-1}$
   (f) $\cos z$
   (g) $\cos^2 \bar{z}$

3. Z algebraického tvaru funkce vypočítejte její derivaci pro libovolné $z = x + iy$

   (a) e^z (b) z^3

4. Najděte funkci $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, která má tyto vlastnosti:

   (a) je holomorfní v definiční oblasti D,
   (b) její reálná (imaginární) část je daná harmonická funkce,
   (c) splňuje danou podmínku $f(z_0) = w_0$.

   (a) $u(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$ $f(0) = 0$
   (b) $u(x, y) = e^{-x} \sin y + 2xy$ $f(0) = 0$
   (c) $v(x, y) = \sin x \cosh y$ $f(0) = 0$
   (d) $u(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ $f(1) = 0$
   (e) $u(x, y) = x^2 - 2xy$ $f(0) = 0$

5. Dokažte, že následující funkce jsou harmonické na $\mathbb{R}^2$

   (a) $x^2 - y^2$ (b) $x(x^2 - 3y^2)$ (c) $\cos x \sinh y$

6. Nechť na oblasti D má holomorfní funkce pouze reálné hodnoty. Dokažte, že pak už je to konstantní funkce.

7. Nechť $f = u(x)+iv(y)$ je holomorfní na $\mathbb{C}$. Ukažte, že pak $f(z)$ je polynom stupně nejvýše 1.

8. Nechť je funkce $f = u+iv$ holomorfní a nechť jsou funkce u a v třídy C^2. Ukažte, že funkce u i v jsou harmonické.

9. Dokažte, že má-li holomorfní funkce na oblasti D hodnoty ležící na jednotkové kružnici, je konstantní.

10. Zformulujte geometrický význam nerovností ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$)

    (a) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(b) $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

(c) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

11. Zakreslete následující množiny

(a) $\Re z + \Im z = 0$

(b) $\Re \frac{z+1}{z-1} < 0$, $z \neq 1$

(c) $\Re \frac{z+i}{z} < 0$, $z \neq 0$

(d) $\Re \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$, $a \in \mathbb{R}_+$

(e) $\frac{|z+1-i|}{|z-1+i|} = 1$, $z \neq 1 - i$

12. Přiřaďte předpisy množinám

(a) Přímka, která prochází počátkem.

(b) Kružnice, která prochází počátkem.

(c) Kružnice se středem v počátku a poloměrem 1.

(d) Kružnice se středem v bodě 1 a poloměrem 1.

(e) Kružnice, která se dotýká imaginární osy v počátku

(f) Přímka rovnoběžná s reálnou osou.

(g) $z\bar{z} - z\bar{z}_0 - \bar{z}z_0 = 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$,

(h) $z\bar{z} - c(z + \bar{z}) = 0$, $c \in \mathbb{R}$

(i) $\bar{a}z + a\bar{z} = 0$, $a \in \mathbb{C}$

(j) $z - \bar{z} = ic$, $c \in \mathbb{R}$

(k) $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = 1$

(l) $e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

13. U následujících množin určete, zda jsou konvexní, hvězdovitě konvexní, souvislé a jednoduše souvislé:

(a) "rovníkový pás" - z, pro něž $|\Im z| < 1$ v $\mathbb{C}$ a v $\mathbb{S}$.

(b)