potom se dá v algebraickém tvaru vyjádřit celkem čtyřmi způsoby

$$f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \mathrm{i}\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - \mathrm{i}\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \mathrm{i}\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} + \mathrm{i}\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\ .$$

Funkce $f(z)$ se nazývá **holomorfní v bodě** $z_0 \in \mathcal{D}$, jestliže má derivaci v nějakém okolí bodu z_0 . Funkce $f(z)$ se nazývá **holomorfní v oblasti** $\mathcal{D}$, jestliže je holomorfní v každém bodě $z_0 \in \mathcal{D}$. Pro derivace funkcí komplexní proměnné platí stejné základní věty jako pro funkce reálné proměnné (derivace součtu, součinu, podílu, derivace složené funkce).

Funkce $F(x,y)$ se nazývá **harmonická funkce v oblasti** $\mathcal{D}$, jestliže má v oblasti $\mathcal{D}$ spojité parciální derivace 2.řádu a splňuje Laplaceovu diferenciální rovnici $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} = 0$.

Dvě harmonické funkce $u(x,y)$, $v(x,y)$, které splňují Cauchyovy-Riemannovy podmínky, se nazývají **sdružené harmonické funkce**.

5.1. Zapište pomocí nerovnic definice následujících limit
a) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, b) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = a$, $a \in \mathcal{C}$, c) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

Návod : Okolí vyjádřete nerovnicemi (viz úvod kap. 3) např.
pro $a \in \mathcal{C}$: $\mathcal{U}(a,\varepsilon) = \{z \in \mathcal{C} : |z-a| < \varepsilon\}$;
pro $a = \infty : \mathcal{U}(a,\varepsilon) = \{z \in \mathcal{C} : |z| > \frac{1}{\varepsilon}\}$.
Existence okolí bude zaručena požadavkem existencí kladného čísla ε .

5.2. Dokažte, že součet a součin dvou funkcí, které jsou holomorfní v bodě $z_0 \in \mathcal{D}$, je také holomorfní funkce v bodě z_0 .

Návod : Důkaz vychází z existence průniku dvou okolí bodu z_0 .

5.3. Podle definice vypočítejte oběma způsoby derivace funkcí
a) $f(z) = \dfrac{1}{z}$, b) $f(z) = z^3$, c) $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$.

1 **Řešení :** a) Podle prvního způsobu výpočtu limity

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{\frac{z_0 - z}{z z_0}}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{-1}{z z_0} = -\frac{1}{z_0^2}\ .$$

Podle druhého způsobu výpočtu limity dostaneme

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\frac{1}{z_0+\Delta z} - \frac{1}{z_0}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\frac{-\Delta z}{z_0(z_0+\Delta z)}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{-1}{z_0(z_0+\Delta z)} = -\frac{1}{z_0^2}.$$

5.4. Nechť pro $z \in \mathcal{C}$ existuje derivace $f'(z)$. Odvoďte Cauchyovy-Riemannovy podmínky pro derivaci funkce $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\ v(x,y)$.

Řešení : Existence $f'(z)$ a tedy také limity (v algebraickém tvaru)

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + \mathrm{i}\ v(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) - \mathrm{i}\ v(x,y)}{\Delta x + \mathrm{i}\ \Delta y}$$

zaručuje existenci limit na podmnožinách (přímkách) $\Delta y = 0$ a $\Delta x = 0$.

Odtud vyjde pro $\Delta y = 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + \mathrm{i}\ v(x+\Delta x, y) - u(x,y) - \mathrm{i}\ v(x,y)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x,y) - u(x,y)}{\Delta x} + \mathrm{i} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x+\Delta x,y) - v(x,y)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

Pro $\Delta x = 0$ vyjde

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{u(x,y+\Delta y) + \mathrm{i}\ v(x,y+\Delta y) - u(x,y) - \mathrm{i}\ v(x,y)}{i\ \Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{u(x,y+\Delta y) - u(x,y)}{\mathrm{i}\ \Delta y} + \lim_{\Delta y\to 0} \frac{v(x,y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta y} =$$

$$= -\mathrm{i}\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}.$$

Z rovnosti těchto limit dostaneme Cauchyovy-Riemannovy podmínky.

5.5. Z algebraického tvaru funkce $f(z) = e^z$ vypočítejte její derivaci pro libovolné $z = x + \mathrm{i}y$.

3 **Řešení :** Existence derivace funkce $f(z) = e^z$ vyplývá z možnosti derivovat absolutně konvergentní řadu (viz kap. 4). Derivováním podle proměnné x vypočítáme

$$f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \mathrm{i}\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = e^z\ .$$

2

Příklad 3.3.3. *Zjistěte z Cauchy-Riemannových podmínek, na které oblasti jsou následující funkce holomorfní, a na této oblasti spočítejte jejich derivace*

a) $f(z) = z^3$ *b)* $f(z) = \frac{1}{z-1}$ *c)* $f(z) = \mathcal{R}e\, z$ *d)* $f(z) = z + \overline{z}$ *e)* $f(z) = \cos z$

2a 2e vzor 2f

Řešení: a) $f'(z) = 3z^2$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$; b) $f'(z) = -\frac{1}{(z-1)^2}$ pro všechna $z \in \mathbb{C} - \{1\}$; c) není holomorfní v žádném bodě; d) není holomorfní v žádném bodě; e) $f'(z) = -\sin z$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$.

Příklad 3.3.4. *Najděte holomorfní funkci* $f(z)$*, která má při* $z = x + \mathrm{j}\,y$ *reálnou část* $u = x^2 - y^2 + x$.

Řešení: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1 = \frac{\partial v}{\partial y}$. Z toho integrováním dostaneme, že

$v = \int (2x+1)\,\mathrm{d}y = 2xy + y + C(x)$ a z toho $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + C'(x)$.

Na druhé straně $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$. Dostali jsme rovnost $2y + C'(x) = 2y$.

Z toho $C'(x) = 0$, a pak $C(x) = \int 0\,\mathrm{d}x = K$.

Po dosazení $v = 2xy + y + K$ a máme řešení

$$f(x + \mathrm{j}\,y) = x^2 - y^2 + x + \mathrm{j}\,(2xy + y + K).$$

Když chceme vyjádřit tuto funkci v závislosti na z, nahradíme $x = z$ a $y = 0$.

Potom $f(z) = z^2 - 0^2 + z + \mathrm{j}\,(2z \cdot 0 + 0 + K) = \underline{\underline{z^2 + z + \mathrm{j}\,K}}$.

Příklad 3.3.5. *Najděte holomorfní funkci* $f(z)$*, která má při* $z = x + \mathrm{j}\,y$ *imaginární část* $v = x + y - 3$ *a* $f(0) = -3\mathrm{j}$.

Řešení: $\frac{\partial v}{\partial y} = 1 = \frac{\partial u}{\partial x}$. Z toho $u = \int 1\,\mathrm{d}x = x + C(y)$. Potom $\frac{\partial u}{\partial y} = C'(y)$.

Na druhé straně $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -1$. Dostali jsme rovnost $C'(y) = -1$.

Pak $C(y) = -\int 1\,\mathrm{d}y = -y + K$. Po dosazení $u = x - y + K$,

$$f(x + \mathrm{j}\,y) = x - y + K + \mathrm{j}\,(x + y - 3),$$

$$f(z) = z + \mathrm{j}\,z - 3\mathrm{j} + K.$$

Musí platit, že $f(0) = 0 + \mathrm{j}\,0 - 3\mathrm{j} + K = -3\mathrm{j}$. Potom $K = 0$.

Hledaná funkce je $\underline{\underline{f(z) = z + \mathrm{j}\,z - 3\mathrm{j}}}$.

4

Příklad 3.3.6. *Najděte holomorfní funkci* $f(z)$*, která má při* $z = x + \mathrm{j}\,y$ *reálnou část*

a) $u = 6xy + 3x^2y - y^3$ *a* $f(0) = 5\mathrm{j}$ *b)* $u = x^2 - 2xy$ *a* $f(0) = 0$

4e

Řešení: a) $f(z) = -\mathrm{j}\,z^3 - 3\mathrm{j}\,z^2 + 5\mathrm{j}$;

b) taková funkce neexistuje.

Příklad 3.3.7. *Najděte holomorfní funkci* $f(z)$*, která má při* $z = x + \mathrm{j}\,y$ *imaginární část*

a) $v = 9x^3y - 9xy^3 + 5x$ *a* $f(0) = 6$ *b)* $v = 7xy^3 - 7x^3y - 8x$ *a* $f(0) = 3$

Řešení:

a) $f(z) = \frac{9}{4}x^4 - \frac{27}{2}x^2y^2 + \frac{9}{4}y^4 - 5y + 6 + \mathrm{j}\,(9x^3y - 9xy^3 + 5x) = \frac{9}{4}z^4 + 5\mathrm{j}\,z + 6$;

b) $f(z) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{21}{2}x^2y^2 - \frac{7}{4}y^4 + 8y + 3 + \mathrm{j}\,(7xy^3 - 7x^3y - 8x) = -\frac{7}{4}z^4 - 8\mathrm{j}\,z + 3$.

5.6. Z algebraického tvaru funkce $f(z) = z^3$ vypočítejte její derivaci pro libovolné $z = x + \mathrm{i}\,y$.

Řešení : Existence derivace se dá ověřit výpočtem limity . Z algebraického tvaru $z^3 = x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}\,(3x^2y - y^3)$ dostaneme derivováním podle proměnné x
$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\ \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 6\,\mathrm{i}\,xy = 3(\ x^2 + 6\,\mathrm{i}\,xy - y^2\ ) = \ 3z^2$.

5.7. Pro funkci $f(z) = \frac{1}{z}$ ověřte, že jsou pro všechna $z \in C - \{0\}$ splněny Cauchyovy-Riemannovy podmínky.

Návod : Splnění obou podmínek dostanete z algebraického tvaru funkce (př. 4.12).

(2f)

5.8. Pro funkci $f(z) = \cos z$ ověřte, že jsou pro všechna $z \in C$ splněny Cauchyovy-Riemannovy podmínky.

Návod : Splnění obou podmínek dostanete snadným výpočtem z algebraického tvaru $\cos z = \cos x \cosh y - \mathrm{i}\ \sin x \sinh y$.

5.9. Rozhodněte, pro která $z \in C$ existuje derivace funkce $f(z) = |z|^2$.

Řešení : Protože $u(x,y) = x^2 + y^2$, $v(x,y) = 0$, vyjde $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Jediné řešení je $x = 0$, $y = 0$.
Že derivace pro $z = 0$ skutečně existuje, plyne z výpočtu

$$\lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{z\,\overline{z}}{z} = \lim_{z\to 0} \overline{z} = 0 \ .$$

(2b)

5.10. Rozhodněte, pro která $z \in C$ existuje derivace funkce $f(z) = \overline{z}$.

Řešení : Protože $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ a $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$, Cauchyovy-Riemannovy podmínky nejsou splněny pro žádné $z \in C$. Proto nemůže existovat derivace.

5.11. Jestliže v oblasti $\mathcal{D}$ má holomorfní funkce pouze reálné hodnoty, musí to být konstantní funkce. Dokažte !

Řešení : Požadovaná podmínka znamená, že $v(x,y) = 0$. Pro holomorfní funkci musí být splněny Cauchyovy-Riemanovy podmínky, takže v oblasti $\mathcal{D}$ je $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0 \wedge \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$, tj. $d\,u(x,y) = 0$. Tuto podmínku splňují právě konstantní funkce.

Označíme na okamžik $e^{jw} = u$. Pak

$$z = \frac{1}{2j}\left(u - \frac{1}{u}\right), \quad \text{tj.} \quad u^2 - 2jzu - 1 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má dva kořeny

$$\{u_1, u_2\} = jz + \sqrt{1 - z^2},$$

kde $\sqrt{1-z^2}$ je dvouprvková množina obsahující obě hodnoty odmocniny. Vrátíme se zpět k proměnné z a dostaneme

$$jw \in \mathrm{Ln}(jz + \sqrt{1 - z^2}).$$

Odtud

$$w \in \mathrm{Arcsin}\, z = -j\,\mathrm{Ln}(jz + \sqrt{1 - z^2}).$$

2g

Úloha. Ve kterých bodech mají funkce $f(z) = x^2 + jy^2$ a $g(z) = \cos^2 \overline{z}$ derivaci?
Řešení. Nejprve funkce $f(z)$. Její složky jsou

$$u(x,y) = x^2, \qquad v(x,y) = y^2.$$

Použitím Cauchy-Riemannových podmínek dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{tj.} \quad 2x = 2y, \quad \text{a} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{tj.} \quad 0 = 0.$$

Podmínky jsou splněny pouze v bodech přímky $y = x$. V tomto bodě je pak

$$f'(z) = 2x = 2\,\mathrm{Re}\, z.$$

Stejným způsobem lze zjistit i body diferencovatelnosti funkce $g(z)$. Museli bychom nejprve rozložit funkci $\cos^2 \overline{z}$ na reálnou a imaginární část. Existuje však postup, jak se (v tomoto případě pracnému) rozkladu vyhnout.

Nechť $g(z) = g(x + jy) = u(x,y) + jv(x,y)$. Pak

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + j\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Odtud vyplývá, že

$$\frac{\partial g}{\partial x} + j\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} + j\left(\frac{\partial u}{\partial y} + j\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \\ = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + j\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Uvážením Cauchy-Riemannových podmínek dosteneme

$$\frac{\partial g}{\partial x} + j\frac{\partial g}{\partial y} = 0. \tag{2.16}$$

(Tato rovnost je ve skutečnosti ekvivalentní Cauchy-Riemannovým podmínkám.)

2g

Aplikujme (2.16) na naši funkci $g(z) = \cos^2 \overline{z} = \cos^2(x - \mathrm{j}y)$. Protože

$$\frac{\partial}{\partial x} \cos^2(x - \mathrm{j}y) = 2\cos(x - \mathrm{j}y)\, \sin(x - \mathrm{j}y),$$
$$\frac{\partial}{\partial y} \cos^2(x - \mathrm{j}y) = 2\cos(x - \mathrm{j}y)\, \sin(x - \mathrm{j}y)\,(-\mathrm{j}),$$

dostáváme

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{\partial g}{\partial y} = 2\cos(x - \mathrm{j}y)\, \sin(x - \mathrm{j}y) + 2\cos(x - \mathrm{j}y)\, \sin(x - \mathrm{j}y) =$$
$$= 4\cos\overline{z}\sin\overline{z} = 2\sin 2\overline{z} = 0.$$

Poslední rovnost platí pro $z = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Proto $\cos^2 \overline{z}$ má derivaci pouze v bodech

$$\left\{ \frac{k\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Hodnota derivace je

$$g'\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \mathrm{j}\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 2\sin k\pi = 0.$$

Úloha. Ukažte, že holomorfní funkce, která na oblasti $D \subset \mathbb{C}$ nabývá jen reálných hodnot, je na D nutně konstantní.

6

Řešení. Nechť $f = u + \mathrm{j}v$. Protože f nabývá pouze reálných hodnot, je imaginární část nulová, $v = 0$. Z Cauchy-Riemannových podmínek pak vyplývá, že

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \text{tj.} \quad u = \text{konst.}$$

Úloha. Jaké funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ mohou mít reálnou část

(a) $u(x, y) = x + y$,

(b) $u(x, y) = x^2 + y^2$.

Řešení. (a) Prvním krokem bude ověřit, zda funkce $u(x, y) = x + y$ je harmonická. Přímým dosazením do Laplaceovy rovnice (2.11) vidíme, že ano. Může to tedy být reálná část jisté, zatím neznámé, holomorfní funkce f. Abychom ji určili, využijeme opět Cauchy-Riemannových podmínek. S naší konkrétní funkcí $u(x, y)$ dostaneme

$$1 = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad -1 = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.17}$$

Integrace první rovnice podle y nám dá

$$v(x, y) = \int 1\, \mathrm{d}y + C(x) = y + C(x),$$

(3)

5.6. Z algebraického tvaru funkce $f(z) = z^3$ vypočítejte její derivaci pro libovolné $z = x + \mathrm{i}\,y$.

Řešení : Existence derivace se dá ověřit výpočtem limity . Z algebraického tvaru $z^3 = x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}\,(3x^2y - y^3)$ dostaneme derivováním podle proměnné x
$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 6\,\mathrm{i}\,xy = 3(\,x^2 + 6\,\mathrm{i}\,xy - y^2\,) = 3z^2$.

5.7. Pro funkci $f(z) = \frac{1}{z}$ ověřte, že jsou pro všechna $z \in \mathcal{C} - \{0\}$ splněny Cauchyovy-Riemannovy podmínky.

Návod : Splnění obou podmínek dostanete z algebraického tvaru funkce (př. 4.12).

5.8. Pro funkci $f(z) = \cos z$ ověřte, že jsou pro všechna $z \in \mathcal{C}$ splněny Cauchyovy-Riemannovy podmínky.

Návod : Splnění obou podmínek dostanete snadným výpočtem z algebraického tvaru $\cos z = \cos x \cosh y - \mathrm{i}\ \sin x \sinh y$.

(2a)

5.9. Rozhodněte, pro která $z \in \mathcal{C}$ existuje derivace funkce $f(z) = |z|^2$.

Řešení : Protože $u(x,y) = x^2 + y^2$, $v(x,y) = 0$, vyjde $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Jediné řešení je $x = 0$, $y = 0$.
Že derivace pro $z = 0$ skutečně existuje, plyne z výpočtu

$$\lim_{z \to 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{z\,\overline{z}}{z} = \lim_{z \to 0} \overline{z} = 0\ .$$

5.10. Rozhodněte, pro která $z \in \mathcal{C}$ existuje derivace funkce $f(z) = \overline{z}$.

Řešení : Protože $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ a $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$, Cauchyovy-Riemannovy podmínky nejsou splněny pro žádné $z \in \mathcal{C}$. Proto nemůže existovat derivace.

(6)

5.11. Jestliže v oblasti $\mathcal{D}$ má holomorfní funkce pouze reálné hodnoty, musí to být konstantní funkce. Dokažte !

Řešení : Požadovaná podmínka znamená, že $v(x,y) = 0$. Pro holomorfní funkci musí být splněny Cauchyovy-Riemanovy podmínky, takže v oblasti $\mathcal{D}$ je $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0 \wedge \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$, tj. $d\,u(x,y) = 0$. Tuto podmínku splňují právě konstantní funkce.

5.14. Nechť $u(x,y)$ a $v(x,y)$ jsou sdružené harmonické funkce v oblasti $\mathcal{D}$. Dokažte, že také dvojice
a) $a\,u(x,y) - b\,v(x,y)$, $b\,u(x,y) + a\,v(x,y)$, $a, b \in \mathcal{R}$,
b) $e^{u(x,y)} \cos v(x,y)$, $e^{u(x,y)} \sin v(x,y)$
jsou sdružené harmonické funkce v oblasti $\mathcal{D}$.

Návod : Důkaz je založen na tom, že dané dvojice funkcí odpovídají
a) součinu holomorfní funkce a komplexního čísla $a + \mathrm{i}\,b$,
b) složené exponenciální funkci, kde v exponentu je holomorfní funkce.

5.15. V oblasti $\mathcal{D} = \mathcal{C} - \{0\}$ najděte všechny harmonické funkce, které mají tvar $u(x,y) = F(x^2 + y^2)$.

Řešení : Složená funkce $u(x,y) = F(t)$, $t = x^2 + y^2$ musí splňovat Laplaceovu rovnici. Je třeba vypočítat derivace (čárky označují derivace podle t) $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = F'(t)\,2x$, $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = F''(t)\,2x\,2x + F'(t)\,2$ (derivace součinu).

Podobně $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = F'(t)\,2y$, $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = F''(t)\,2y\,2y + F'(t)\,2$.
Po dosazení má Laplaceova rovnice tvar
$4x^2\,F''(t) + 2F'(t) + 4y^2\,F''(t) + 2F'(t) = 0$ neboli $t F''(t) + F'(t) = 0$.
Řešení této diferenciální rovnice vzhledem k funkci $F'(t)$ se provede jednoduše separací proměnných, takže $F'(t) = \frac{C_1}{t}$, $F(t) = C_1\ \ln t + C_2$ a $u(x,y) = C_1\ \ln(x^2 + y^2) + C_2$.

5.16. V oblasti $\mathcal{C}$ najděte všechny harmonické funkce, které mají tvar $u(x,y) = F(x^2 - y^2)$.

Výsledek : Podobně jako v př. 5.15 $u(x,y) = C_1\ (x^2 - y^2) + C_2$.

V příkladech 5.17 - 5.24 najděte funkci $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\ v(x,y)$, která má tyto vlastnosti: 1) je holomorfní v definiční oblasti $\mathcal{D}$,
2) její reálná (imaginární) část je daná harmonická funkce,
3) splňuje danou doplňující podmínku $f(z_0) = w_0$.

5.17. Re $f(z) = u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$, $f(0) = 0$.

(4a)

Řešení : Nejprve je třeba ověřit, že daná funkce je harmonická. Podle Cauchyových-Riemannových podmínek dostaneme jednoduchou soustavu parciálních rovnic pro funkci $v(x,y)$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + 12xy - 3y^2 = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 6x^2 - 6xy - 6y^2 = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

Integrací první rovnice (podle y) dostaneme $v(x,y) = 3x^2y + 6xy^2 - y^3 + C(x)$. Odtud $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 6xy + 6y^2 + C'(x)$ a dosazením do druhé rovnice dostaneme $6x^2 = -C'(x)$ a odtud $C(x) = -2x^3 + C_1$.
Hledaná holomorfní funkce má tedy tvar
$f(z) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3 + \mathrm{i}\ (-2x^3 + 3x^2y + 6xy^2 - y^3 + C_1)$.
Vzhledem k dané podmínce $f(0) = 0$ musí být $C_1 = 0$.
Vhodnými úpravami se dá získat vyjádření funkce v závislosti na z
$f(z) = x^3 + 3\,\mathrm{i}\,x^2y - 3xy^2 - \mathrm{i}\,y^3 - 2\,\mathrm{i}\,x^3 + 6x^2y + 6\,\mathrm{i}\,xy^2 - 2y^3 =$
$= (x + \mathrm{i}\,y)^3 - 2\,\mathrm{i}\,(x + \mathrm{i}y)^3 = z^3 - 2\,\mathrm{i}\,z^3 = (1 - 2\,\mathrm{i})\ z^3$.

5.18. Re $f(z) = u(x,y) = x^2 - y^2 - y$, $f(0) = 0$.

Výsledek : Funkce $u(x,y)$ je harmonická, $v(x,y) = 2xy + x$,
$f(z) = x^2 - y^2 - y + 2\,\mathrm{i}\,xy + \mathrm{i}\,x = (x + \mathrm{i}\,y)^2 + \mathrm{i}\,(x + \mathrm{i}\,y) = z^2 + \mathrm{i}\,z$.

4b

5.19. Re $f(z) = u(x,y) = e^{-x}\sin y + 2xy$, $f(0) = 0$.

Řešení : Snadno ověříme že $u(x,y) = e^{-x}\sin y + 2xy$ je harmonická funkce. Z Cauchyových-Riemannových podmínek dostaneme jednoduchou soustavu parciálních rovnic pro funkci $v(x,y)$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = -e^{-x}\sin y + 2y = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = e^{-x}\cos y + 2x = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

Integrací první rovnice (podle y) dostaneme $v(x,y) = e^{-x}\cos y + y^2 + C(x)$. Odtud $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -e^{-x}\cos y + C'(x)$ a dosazením do druhé rovnice dostaneme $2x = -C'(x)$ a odtud $C(x) = -x^2 + C_1$.

Hledaná holomorfní funkce má tedy tvar $f(z) = e^{-x}\sin y + 2xy + \mathrm{i}\ (e^{-x}\cos y + y^2 - x^2 + C_1)$. Vzhledem k dané podmínce $f(0) = 0$ musí být $C_1 = -1$. Výslednou funkci můžeme dále upravovat
$f(z) = e^{-x}(\sin y + \mathrm{i}\,\cos y) + 2xy + \mathrm{i}\,(y^2 - x^2) - \mathrm{i} = \mathrm{i}\,e^{-x}(\cos y - \mathrm{i}\,\sin y) - \mathrm{i}\,(x^2 - y^2 + 2xy\,\mathrm{i}) - \mathrm{i} = \mathrm{i}\,(e^{-z} - z^2 - 1)$.

5.20. Re $f(z) = u(x,y) = e^y\cos x - x$, $f(0) = 1$.

Výsledek : Funkce $u(x,y)$ je harmonická, $v(x,y) = -e^y\sin x - y$,
$f(z) = e^y\cos x - x - \mathrm{i}\,e^y\sin x - \mathrm{i}\,y = e^y(\cos x - \mathrm{i}\,\sin x) - (x + \mathrm{i}\,y) = e^{y - \mathrm{i}x} - (x + \mathrm{i}\,y) = e^{-\mathrm{i}z} - z$.

4c

5.21. *Im* $f(z) = v(x,y) = \sin x\cosh y$, $f(0) = 0$.

Výsledek : Funkce $v(x,y)$ je harmonická, $u(x,y) = -\cos x\sinh y$ a hledaná holomorfní funkce $f(z) = \mathrm{i}\ \sin z$.

4d

5.22. Re $f(z) = u(x,y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $f(1) = 0$.

Výsledek : Funkce $u(x,y)$ je harmonická, $v(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + C_1$ a hledaná holomorfní funkce má tedy tvar
$f(z) = \dfrac{y}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\ \dfrac{x}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\ C_1 = \dfrac{\mathrm{i}\,(x - \mathrm{i}\,y)}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\ C_1 = \dfrac{\mathrm{i}}{z} + \mathrm{i}\ C_1$.
Ze zadané doplňující podmínky vyjde $C_1 = -1$.

5.23. Re $f(z) = u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$, $f(0) = 0$.

Výsledek : Funkce $u(x,y)$ je harmonická, $v(x,y) = e^x(x\sin y + y\cos y)$ a hledaná holomorfní funkce $f(z) = z\,e^z$.

5.24. Re $f(z) = u(x,y) = x\cos x\cosh y + y\sin x\sinh y$, $f(0) = 0$.

Výsledek : Funkce $u(x,y)$ je harmonická, $v(x,y) = y\cos x\cos y - x\sin x\sin y$ a hledaná holomorfní funkce $f(z) = z\cos z$.

(5)

(a) $f = x^2 - y^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

ναι $\mathbb{R}^2$, Ok

(b) $f = x(x^2 - 3y^2) = x^3 - 3xy^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -3xy2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6x$$

$\mathbb{R}^2$,

(c) $f = \cos x \sinh y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin x \sinh y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos x \cosh y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\cos x \sinh y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \cos x \sinh y$$

- $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = b \qquad \underline{\underline{c = 1}}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = a \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = c \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a = -b}} \qquad b \in \mathbb{R}$$

7. $f(z) = u(x) + i\,v(y)$ pak f je polynom st. nejv. 1

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'(x) \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad u'(x) = v'(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = v'(y) \qquad \Rightarrow$$

tedy $u(x) = x v'(y) + k$

$$v(y) = y u'(x) + l$$

$$\rightsquigarrow \quad v'(y) = m, \quad u'(x) = n \quad \rightsquigarrow \quad v(y) = my, \quad \underline{\underline{u(x) = nx}} \qquad m, n \in \mathbb{R}$$

5.12. Pro funkci, která je holomorfní v oblasti $\mathcal{D}$, vyjádřete Cauchyovy-Riemannovy podmínky v polárních souřadnicích.

Řešení : Dosazením $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ vzniknou složené funkce $u(\rho,\varphi)$ a $v(\rho,\varphi)$. Podle pravidel pro derivování složených funkcí vyjde

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi = \frac{\partial v}{\partial y}\cos\varphi - \frac{\partial v}{\partial x}\sin\varphi\,,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial x}\rho\sin\varphi + \frac{\partial v}{\partial y}\rho\cos\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \rho\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial v}{\partial \varphi}\,.$$

$$\frac{\partial v}{\partial \rho} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\varphi = -\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x}\rho\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\rho\cos\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \rho\frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,.$$

P.

5.13. Jestliže funkce $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\ v(x,y)$ je holomorfní v oblasti $\mathcal{D}$, potom jsou funkce $u(x,y)$ a $v(x,y)$ sdružené harmonické funkce v oblasti $\mathcal{D}$. Dokažte !

Řešení : Pro holomorfní funkci jsou samozřejmě splněny Cauchyovy-Riemannovy podmínky, takže je třeba pouze dokázat, že funkce $u(x,y)$ a $v(x,y)$ splňují Laplaceovu diferenciální rovnici. Každá holomorfní funkce v oblasti $\mathcal{D}$ má v této oblasti také všechny derivace vyššího řádu, takže funkce $u(x,y)$ a $v(x,y)$ mají spojité parciální derivace 2. řádu podle x a y. Pro $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}$ musí být také splněny Cauchyovy-Riemannovy podmínky

$$1)\ \ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad 2)\ \ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\,.$$

Také pro druhé vyjádření derivace $f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}$ musí být splněny Cauchyovy-Riemannovy podmínky

$$3)\ \ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad 4)\ \ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\,.$$

Za daných podmínek hodnota smíšených parciálních derivací nezáleží na pořadí derivování. Proto z 1. a 3. rovnice dostanete Laplaceovu rovnici pro funkci $u(x,y)$ a z 2. a 4. rovnice pro funkci $v(x,y)$.

$|f(z)| = 1$

9 $\quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$ $\qquad f_1^2 + f_2^2 = 1$

$f_1^2 = 1 - f_2^2$

$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$ $\qquad \cancel{2} f_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} = -\cancel{2} f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}$

$\cancel{2} f_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\cancel{2} f_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}$

(a) $\quad f_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial x} = -f_1 f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}$

$f_1 f_2 \frac{\partial f_1}{\partial y} = -f_2^2 \frac{\partial f_2}{\partial y}$

$\Rightarrow (f_2^2 + f_1^2)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) + f_1 f_2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) = 0$

$\rightarrow (f_2^2 + f_1^2)\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 \rightarrow \begin{cases} f_1 = 0 \ \& \ f_2 = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 \end{cases}$

Pomocí $\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$

(b) $\quad -f_2 f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} = +f_2^2 \frac{\partial f_2}{\partial x}$

$f_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial y} = -f_2 f_1 \frac{\partial f_2}{\partial y}$

$f_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial y} + f_2^2 \frac{\partial f_1}{\partial y} \rightarrow \begin{cases} f_1 = 0 = f_2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial f_2}{\partial x} \end{cases}$

$\rightarrow$ fce je konstantní

$z^2 + 2\mathrm{i}\,z + \mathrm{i}^2 = \mathrm{i}^2 + \sqrt{3}\ \mathrm{i}$,
$(z + \mathrm{i})^2 = -1 + \sqrt{3}\ \mathrm{i}$.
Tato binomická rovnice pro $z + \mathrm{i}$ se řeší podobně jako v př. 1.14, takže vyjde

$$z_0 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\ \sin\frac{\pi}{3}\right) ,$$
$$z_1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\ \sin\frac{4\pi}{3}\right) ,$$
$$z_0 = -\mathrm{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3}\ \mathrm{i}) ,$$
$$z_1 = -\mathrm{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3}\ \mathrm{i}) .$$

1.17. Řešte kvadratickou rovnici $z^2 - 2\mathrm{i}\,z + 1 - 2\mathrm{i} = 0$.

Výsledek : $z_0 = \mathrm{i} + \sqrt{2}\,(-\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}\ \mathrm{i})$,
$z_1 = \mathrm{i} + \sqrt{2}\,(\sqrt{2-\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}\ \mathrm{i})$.

1.18. Zformulujte geometrický význam nerovnosti

10 $|\, z_1 + z_2 \,| \le |\, z_1 \,| + |\, z_2 \,|$, $z_1, z_2 \in C$ (trojúhelníková nerovnost).

Řešení : Rovnost nastane právě tehdy, jestliže obrazy z_1, z_2 a počátku O (a také $z_1 + z_2$) leží na jedné přímce a $\arg z_1 = \arg z_2$. Jestliže $\arg z_1 = -\arg z_2$, ověříme na této přímce platnost nerovnosti snadno. Jestliže obrazy $z_1, z_1 + z_2$ a počátku O neleží na jedné přímce, potom tvoří trojúhelník, jehož velikosti stran jsou $|\, z_1 \,|, |\, z_2 \,|$ a $|\, z_1 + z_2 \,|$. Trojúhelníková nerovnost vyjadřuje známou vlastnost, že součet velikostí dvou stran v trojúhelníku musí být větší než velikost třetí strany.

1.19. Zformulujte geometrický význam nerovnosti

10 $|\, z_1 + z_2 \,| \ge ||\, z_1 \,| - |\, z_2 \,||$, $z_1, z_2 \in C$.

Návod : Jestliže platí $|\, z_1 \,| \ge |\, z_2 \,|$, potom je možné vynechat absolutní hodnotu, převést $|\, z_2 \,|$ na druhou stranu nerovnice a vyjde
$|\, z_1 + z_2 \,| + |\, z_2 \,| \ge |\, z_1 \,|$.
Ve stejném trojúhelníku jako v př. 1.18 znamená tato podmínka, že

součet velikostí dvou stran je větší než velikost třetí strany. Rovnost nastane právě tehdy, když $\arg z_1 = -\arg z_2$.
Pro případ $|z_1| \le |z_2|$ se provede podobná úvaha, pouze při odstranění absolutní hodnoty je třeba změnit znaménko.

1.20. Pro dvě komplexní čísla z_1 a z_2 zobrazte $z_1 - z_2$ a vyjádřete geometrický význam $|\, z_1 - z_2 \,|$.

Řešení : Komplexní číslo $z_1 - z_2$ můžeme dostat jako součet komplexních čísel z_1 a $-z_2$ (vektorově). Absolutní hodnota $|\, z_1 - z_2 \,|$ znamená vzdálenost obrazu komplexního čísla $z_1 - z_2$ od počátku a současně vzdálenost mezi obrazy komplexních čísel z_1 a z_2 (obr. 1).

Obr. 1.

1.21. Zformulujte geometrický význam nerovnice
$|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$, $z_1, z_2 \in C$.

Návod : Využijte výsledku př. 1.20.

V příkladech 1.22 - 1.42 najděte v Gaussově rovině množinu všech obrazů komplexních čísel z , pro něž platí zadané podmínky.

Úmluva : Obrazu komplexního čísla z v Gaussově rovině budeme stručně říkat bod z .

1.22. $| \operatorname{Re} z | < 2$.

Řešení : Absolutní hodnota reálné části komplexního čísla z je vzdálenost bodu z od imaginární osy. Množina všech bodů z , pro které je tato vzdálenost menší než 2, je vnitřek pásu s osou v imaginární ose.

1.23. $\operatorname{Im} z = \mathrm{i}$.

Řešení : Imaginární část komplexního čísla je definována jako reálné číslo, takže tato podmínka není splněna pro žádné komplexní číslo z .

11a

1.24. $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0$.

Řešení : Algebraické vyjádření této podmínky ($x + y = 0$) ukazuje, že množina hledaných bodů je přímka (osa 2. a 4. kvadrantu).

11b

1.25. $\operatorname{Re} \dfrac{z+1}{z-1} < 0$, $z \neq 1$.

Řešení : Zlomek je třeba vyjádřit v algebraickém tvaru a rozšířit

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{(x+1+\mathrm{i}\,y)(x-1-\mathrm{i}\,y)}{(x-1+\mathrm{i}\,y)(x-1-\mathrm{i}\,y)} = \frac{x^2-1+y^2-2\,\mathrm{i}\,y}{(x-1)^2+y^2} .$$

Pro reálnou část vyjde podmínka $x^2 + y^2 - 1 < 0$. Hledaná množina je tedy vnitřní oblast kružnice se středem v počátku a s poloměrem 1.

1.26. $\operatorname{Im} \dfrac{z+1}{z-1} = 0$, $z \neq 1$.

Řešení : Po vyjádření daného zlomku v algebraickém tvaru vyjde podmínka $-2y = 0$. Hledaná množina bodů je reálná osa s vynechaným bodem $z = 1$.

11c

1.27. $\operatorname{Re} \dfrac{z+\mathrm{i}}{z} < 0$, $z \neq 0$.

Výsledek : Hledaná množina je vnitřní oblast kružnice se středem v bodě $[\,0, \frac{1}{2}\,]$ a s poloměrem $r = \frac{1}{2}$.

1.28. $\operatorname{Im} \dfrac{z-\mathrm{i}}{z} = 0$, $z \neq 0$.

Výsledek : Hledaná množina je imaginární osa s vynechaným počátkem.

a s poloměrem 1. Průsečík průvodiče bodu z a spojnice bodu dotyku tečen označte w (obr. 4). Dokažte, že $w = \dfrac{1}{\overline{z}}$.

Řešení : Trojúhelník $O\ z\ T$ je pravoúhlý a podle Euklidovy věty o odvěsně platí $|z|\,|w| = 1$. Argumenty komplexních čísel z a w jsou stejné.

O b r . 4 .

1.56. Ověřte v algebraickém tvaru, že platí
a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, b) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$, c) $\overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1}\; \overline{z_2}$, $z_1, z_2 \in C$.

Návod : Tyto vlastnosti jsou při zobrazení v Gaussově rovině založeny na souměrnosti podle reálné osy.

1.57. Ověřte v algebraickém i goniometrickém tvaru, že pro libovolné $z \in C$ platí $|z|^2 = z\,\overline{z}$.

10

1.58. Dokažte, že pro libovolná z_1 , $z_2 \in C$ platí $| z_1 + z_2 |^2 + | z_1 - z_2 |^2 = 2(| z_1 |^2 + | z_2 |^2)$ a zformulujte geometrický smysl této identity.

Řešení : Absolutní hodnoty vyjádříme pomocí komplexně sdružených komplexních čísel (př. 1.57.) a upravíme levou stranu podle př. 1.56.

$$| z_1 + z_2 |^2 + | z_1 - z_2 |^2 = (z_1 + z_2)\,\overline{(z_1 + z_2)} + (z_1 - z_2)\,\overline{(z_1 - z_2)} =$$
$$= (z_1 + z_2)\,(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = 2(z_1\,\overline{z_1} + z_2\,\overline{z_2}) =$$
$$= 2(| z_1 |^2 + | z_2 |^2) .$$

S výjimkou zvláštních případů tvoří body O, z_1, z_2, $z_1 + z_2$ vrcholy rovnoběžníka. $| z_1 |$ a $| z_2 |$ jsou velikosti jeho stran a $| z_1 + z_2 |$ a

$|z_1 - z_2|$ jsou velikosti jeho úhlopříček. Platí tedy : Součet druhých mocnin velikostí úhlopříček rovnoběžníka se rovná součtu druhých mocnin velikostí jeho stran.

1.59. Dokažte, že pro libovolné komplexní číslo $z \neq -1$ je $\dfrac{z-1}{z+1}$ ryze imaginární právě tehdy, když $|z| = 1$.

Řešení : Dokazujeme ekvivalenci pomocí dvou implikací.
1. Za předpokladu, že $|z|^2 = z\,\overline{z} = 1$, dostaneme po rozšíření zlomku komplexním číslem $\overline{z}$

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{z\,\overline{z}-\overline{z}}{z\,\overline{z}+\overline{z}} = \frac{1-\overline{z}}{1+\overline{z}} = -\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1} = -\frac{\overline{z-1}}{\overline{z+1}} = -\overline{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}.$$

Komplexní číslo se rovná opačnému komplexně sdruženému číslu právě tehdy, když je ryze imaginární.
2. Jestliže $\dfrac{z-1}{z+1} = \mathrm{i}\,a$; $a \in \mathcal{R}$, potom můžeme vypočítat $z = \dfrac{\mathrm{i}\,a}{1-\mathrm{i}\,a}$. Absolutní hodnota čitatele i jmenovatele se rovná $\sqrt{1+a^2}$, takže $|z| = 1$.

Geometrická interpretace : Body $z-1$ a $z+1$ jsou obrazy koncových bodů úsečky délky 2. Podíl $\dfrac{z-1}{z+1}$ je ryze imaginární právě tehdy, když rozdíl argumentů komplexních čísel $z-1$ a $z+1$ je roven $\frac{\pi}{2}$. Průvodiče bodů $z-1$ a $z+1$ jsou tedy na sebe kolmé a počátek musí ležet na Thaletově kružnici nad úsečkou $z-1$, $z+1$ délky 2. Střed této úsečky (z) musí mít vzdálenost od počátku rovnu 1.

1.60. Dokažte, že pro libovolné komplexní číslo a, pro které $\operatorname{Im} a \neq 0$, platí: $\left|\dfrac{z-a}{z-\overline{a}}\right| = 1$ právě tehdy, když z je reálné číslo.

Řešení : 1. Protože $\operatorname{Im} a \neq 0$, musí být $a \neq \overline{a}$. Množina všech komplexních čísel z, pro která je splněna rovnice $|z-a| = |z-\overline{a}|$, je osa souměrnosti úsečky s krajními body $a, \overline{a}$, tj. množina všech reálných čísel.
2. Jestliže z je reálné číslo, potom platí $z = \overline{z}$ a vyjde

$$\left|\frac{z-a}{z-\overline{a}}\right| = \left|\frac{z-a}{\overline{z}-\overline{a}}\right| = \left|\frac{z-a}{\overline{z-a}}\right| = 1.$$

V příkladech 1.61 -1.66 zapište pomocí proměnných komplexních čísel z a $\overline{z}$ (bez absolutních hodnot) rovnice daných křivek nebo soustav křivek. Takový zápis rovnic bude velmi výhodný při řešení př. 4.25 a dalších.

1.61. Kružnice se středem v bodě z_0 a s poloměrem r, $r \in \mathcal{R}^+$. Která z těchto kružnic prochází počátkem ?

(12) g
5

Řešení : Z rovnice $|z - z_0| = r$ po umocnění a nahrazení absolutní hodnoty vyjde $|z-z_0|^2 = (z-z_0)\,(\overline{z-z_0}) = r^2$.
Po úpravách podle př.1.55 vyjde
$(z-z_0)\,(\overline{z}-\overline{z_0}) = z\overline{z} - z\overline{z_0} - \overline{z}z_0 + z_0\overline{z_0} = z\overline{z} - z\overline{z_0} - \overline{z}z_0 + |z_0|^2 = r^2$.
Kružnice prochází počátkem právě tehdy, když poloměr kružnice se rovná vzdálenosti středu z_0 od počátku $(r = |z_0|)$.
Kružnice, která prochází počátkem, má tedy rovnici $z\overline{z} - z\overline{z_0} - \overline{z}z_0 = 0$.

(12) h

1.62. Množina všech kružnic, které se dotýkají imaginární osy v počátku.

Výsledek : $z\overline{z} - c(z+\overline{z}) = 0$, $c \in \mathcal{R}$.

(12) i a

1.63. Přímka, která prochází počátkem a svírá s kladnou poloosou x úhel φ.

Řešení : Stačí zvolit v Gaussově rovině dva různé body z_1 a z_2, které mají stejnou vzdálenost od počátku ($|z_1| = |z_2|$) a jejichž spojnice je kolmá na danou přímku. Potom osa souměrnosti úsečky s krajními body z_1, z_2 je hledaná přímka a má rovnici $|z - z_1| = |z - z_2|$. Po umocnění a úpravách vyjde

$$(z-z_1)\,(\overline{z-z_1}) = (z-z_2)\,(\overline{z-z_2}),$$

$$(z-z_1)\,(\overline{z}-\overline{z_1}) = (z-z_2)\,(\overline{z}-\overline{z_2}),$$

$$z\overline{z} - z\overline{z_1} - \overline{z}z_1 + |z_1|^2 = z\overline{z} - z\overline{z_2} - \overline{z}z_2 + |z_2|^2,$$

$$z(\overline{z_1}-\overline{z_2}) + \overline{z}(z_1-z_2) = 0$$

$$z(\overline{z_1-z_2}) + \overline{z}(z_1-z_2) = 0.$$

Jestliže označíme $a = z_1 - z_2$, potom toto komplexní číslo má průvodič kolmý na danou přímku. Při tomto označení má rovnice jednoduchý tvar $\overline{a}\,z + a\,\overline{z} = 0$.

1.64. Přímka, která prochází počátkem a svírá s kladnou poloosou x úhel $\frac{\pi}{3}$.

Výsledek : $(\sqrt{3} + \mathrm{i})\, z = (-\sqrt{3} + \mathrm{i})\, \bar{z}$.

1.65. Soustava přímek, které svírají s kladnou poloosou x úhel $\frac{\pi}{4}$.

Řešení : Komplexní číslo $1-i$ má průvodič kolmý k daným přímkám. Jedna z těchto přímek (procházející počátkem), má rovnici
$(1+i)\, z + (1-i)\, \bar{z} = 0$.
Soustava rovnoběžných přímek se dá získat posunutím ve směru reálné osy o libovolné reálné číslo. Rovnice dané soustavy přímek se tedy dá zapsat ve tvaru
$(1+\mathrm{i})\, z + (1-\mathrm{i})\, \bar{z} = c\,,\ c \in \mathcal{R}$.

(12) j k

1.66. Soustava přímek rovnoběžných s reálnou osou.

Výsledek : Rovnice se dá zapsat ve tvaru $z - \bar{z} = c\,,\ c \in \mathcal{R}$.

1.67. Najděte střed a poloměr kružnice, která je dána rovnicí
$z\bar{z} + (\mathrm{i} - 1)z - (\mathrm{i} + 1)\bar{z} = 2$.

Řešení : Rovnici $z\bar{z} - (1 - \mathrm{i})z - (1 + \mathrm{i})\bar{z} = 2$ je třeba upravit na tvar uvedený v př. 1.61, tj. přidat hodnotu $|1 + \mathrm{i}|^2 = 2$. Vyjde $z\bar{z} - (1 - \mathrm{i})z - (1 + \mathrm{i})\bar{z} + |1 + i|^2 = 4$.
Kružnice má tedy střed v bodě $1 + \mathrm{i}$ a poloměr $r = 2$.

1.68. Najděte střed a poloměr kružnice dané rovnicí $z\bar{z} - i\,z + \mathrm{i}\bar{z} = 3$.

Výsledek : Kružnice má střed v bodě $-\mathrm{i}$ a poloměr $r = 2$.

(12) z d

1.69. Najděte množinu všech bodů z v Gaussově rovině, které splňují rovnici
$\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = 1$.

Řešení : Pro $z \neq 0$ je také $\bar{z} \neq 0$, takže daná rovnice je ekvivalentní rovnici $\bar{z} + z = z\,\bar{z}$. Odtud $z\,\bar{z} - z - \bar{z} + 1 = 1$
neboli $(z-1)\,(\bar{z}-1) = |\,z-1\,|^2 = 1$.
Množina hledaných bodů je tedy kružnice se středem v bodě 1 a s poloměrem $r = 1$, ze které je vynechaný počátek (bod $z = 0$).

1.70. Zapište následující komplexní čísla v exponenciálním tvaru ($r\,e^{\mathrm{i}\varphi}$)
a) $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$, b) $-2 + 2\mathrm{i}$, c) $-\mathrm{i}$, d) -1, e) 1.

Definice 1.5. *Množina $D \subset \mathbb{C}$ **není souvislá**, jestliže existují dvě disjunktní otevřené množiny G a H takové, že*

(i) $D \subset G \cup H$,

(ii) $G \cap D \neq \emptyset$ *a* $H \cap D \neq \emptyset$.

V opačném případě nazveme množinu D ***souvislou.***

Podmínka (i) v definici říká, že nesouvislá množina se nechá pokrýt dvěma disjunktními otevřenými množinami G a H. Druhý požadavek (ii) k tomu připojuje, že obě množiny jsou při pokrývání důležité a že žádná z nich sama o sobě množinu D nepokryje.

Podívejme se na jednoduchý případ ověření souvislosti množiny. Uvažujme úsečku $\langle 0,1\rangle$. Intuitivně je jasné, že je souvislá. Jak tento fakt ověřit pomocí Definice 1.5? Předpokládejme na okamžik, že $\langle 0,1\rangle$ je nesouvislá. Pak je možné ji pokrýt dvěma otevřenými disjunktními množinami G a H

$$\langle 0,1\rangle \subset G \cup H.$$

Počáteční bod 0 leží v jedné z těchto množin, např. v množině G. Zjistíme, jaký největší interval začínající v 0 se vejde do G. Položíme

$$s = \sup\{t \in \langle 0,1\rangle \mid \langle 0,1\rangle \subset G\}. \tag{1.3}$$

Protože bod s leží v intervalu $\langle 0,1\rangle$ musí náležet do jedné z množin G nebo H. Kdyby $s \in G$, pak z otevřenosti množiny G vyplývá, že existuje jisté malé okolí $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ bodu s ležící stále v G. Pak ovšem s nemůže být supremum, neboť i delší interval $\langle 0, s+\varepsilon/2\rangle \subset G$. Zbývá možnost, že $s \in H$. Otevřenost množiny H nám opět umožňuje nalézt okolí $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ bodu s, které celé náleží do H. V tom případě supremum s z (1.3) je určitě menší než $s-\varepsilon/2$. Tento spor vede k závěru, že úsečka $\langle 0,1\rangle$ nemůže být nesouvislá.

Typickými dalšími příklady souvislých množin jsou kromě úsečky např. lomené čáry, křivky nebo tzv. konvexní množiny (viz cvičení 17).

Definice 1.6. *Otevřená souvislá množina se nazývá* ***oblast.***

Oblasti jsou množiny, na kterých budeme vyšetřovat chování funkcí komplexní proměnné. Kromě toho, oblasti jsou také množiny, u nichž se souvislost nechá popsat více geometricky.

Tvrzení 1.1. *Nechť $D \subset \mathbb{C}$ je otevřená neprázdná množina. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní*

(i) *Každé dva body z D lze spojit lomenou čárou ležící v D.*

(ii) *D je oblast.*

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii). Tato implikace je geometricky zřejmá. O množině D už víme, že je otevřená a potřebujeme ukázat, že to je oblast. K tomu zbývá ověřit, že D je souvislá. Kdyby nebyla, tak ji lze pokrýt dvěma disjunktními otevřenými množinami G a H. Z podmínky (ii) v Definici 1.5 plyne, že existují body $z \in G \cap D$ a $w \in H \cap D$. Ty lze spojit lomenou čárou L ležící v D. Protože D je celá pokryta množinami G a H, je

Definice 1.7. *Nechť $(z_n) \subset \mathbb{C}$ je posloupnost komplexních čísel. Řekneme, že (z_n) konverguje k $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, jestliže pro každé ϵ-okolí $U(z;\varepsilon)$ bodu z existuje index n_0 takový, že všechny členy posloupnosti s indexem vyšším než n_0 leží v $U(z;\varepsilon)$. Zapisujeme*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \textit{nebo stručně} \quad z_n \to z.$$

Poznámka 1.2. V případě, že limitní bod z leží v $\mathbb{C}$ (tj. není ∞), je definice limity ekvivalentní tomu, že posloupnost absolutních hodnot $|z_n - z|$ konverguje k nule

$$\lim_{n\to\infty} |z_n \quad z| = 0.$$

Z toho snadno vidíme, že v případě vlastní limity $z \in \mathbb{C}$ platí: $z_n \to z$ právě, když $\mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z)$ a $\mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z)$.

V případě nevlastní limity ∞, je geometrický význam takový, že se členy posloupnosti vzdalují od počátku. Ať už po přímce, spirále nebo jakkoli jinak. Vyjádřeno pomocí absolutní hodnoty

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty.$$

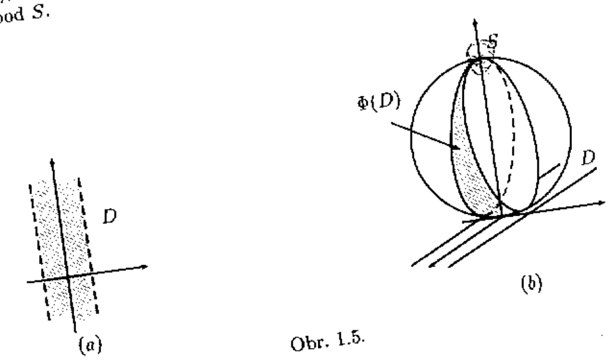
(Zde už se jedná o limitu reálných čísel.)

Poslední pojem, o kterém se zmíníme, je *jednoduše souvislá oblast*. Oblasti samy o sobě jsou souvislé množiny. Rádi bychom mezi nimi ještě vydělili ty, které jsou zvlášť jednoduché. Na obr. .14(a) a 1.4(b) jsou nakresleny dvě oblasti. Rozdíl mezi nimi je ten, že oblast 1.4(b) má v sobě díry, což může komplikovat situaci. Za jednoduše souvislé oblasti bychom chtěli prohlásit oblasti „bez děr".

První nápad, jak matematicky formulovat, že uvnitř oblasti nejsou díry, je, že budeme požadovat, aby i doplněk takové oblasti byl souvislý. To není úplně špatně a dokonce se zdá, že tím jsme přesně vystihli rozdíl mezi oblastmi na obr. 1.4(a) a (b). Přesto to má ještě vadu. Na obr. 1.5(a) je nekonečný pás. Je to zjevně oblast „bez děr", ale s nesouvislým doplňkem.

Obr. 1.4.

Zde nám pomůže alternativní model ve formě Riemannovy sféry. Projekce pásu D z obr. 1.5(a) na sféru R je ukázána na obr. 1.5(b). Důležité je, že bod S nepatří do obrazu $\Phi(D)$, a tak doplněk $R \setminus \Phi(D)$ je souvislý: z jedné části můžeme přejít do druhé právě přes bod S.



Obr. 1.5.

Modifikujeme proto náš původní nápad následovně.

Definice 1.8. *Oblast $D \subset \mathbb{C}$ se nazývá* ***jednoduše souvislá****, jestliže její stereografická projekce $\Phi(D)$ na Riemannovu sféru má souvislý doplněk.*

Z úvahy předcházející Definici 1.8 vyplývá, že v případě omezených oblastí se jednoduchá souvislost pozná na doplňku v množině $\mathbb{C}$. Pouze neomezené oblasti musí být testovány na Riemannově sféře.

3 Cvičení

Úloha: Zjistěte pro která $z \in \mathbb{C}$ platí $z \geq |z - j|$.

Řešení: Tato úloha představuje varování! Nemá žádný smysl. Komplexní čísla nelze porovnávat, takže nelze určovat, zda-li je z větší než něco jiného.

Úloha: Vypočtěte všechny hodnoty $\sqrt[n]{z}$.

Řešení: Pokud $z = 0$, tak i $\sqrt[n]{z} = 0$. Nechť tedy $z \neq 0$. Hledáme všechna řešení rovnice

$$\omega^n = z. \tag{1.5}$$

Obě čísla ω i z vyjádříme v goniometrickém tvaru:

$$\omega = |\omega|(\cos\varphi + j\sin\varphi), \qquad z = |z|(\cos\psi + j\sin\psi).$$