8a **Řešení :** Z rovnice $\dfrac{2w+1}{w-1} = z$ vyjádříme w v závislosti na z :

$$2w+1 = z(w-1) \;\Rightarrow\; z\,w - 2w = z+1 \;\Rightarrow\; \boxed{w = \frac{z+1}{z-2}}\,.$$

Jednoznačná inverzní funkce $f^{-1}(z) = \dfrac{z+1}{z-2}$ je definována pro $z \neq 2$.

Definici původní funkce je možno doplnit $f(1) = \infty$, $f(\infty) = 2$ a zřejmě také $f^{-1}(2) = \infty$, $f^{-1}(\infty) = 1$.

8b **6.9.** K funkci $f(z) = \mathrm{i}\,z + 1$, $\mathcal{D} = \mathcal{C}$ najděte inverzní funkci.

Výsledek : Existuje jednoznačná inverzní funkce $f^{-1}(z) = \mathrm{i}\,(1-z)$.

6.10. K funkci $f(z) = \dfrac{z+2}{z-1}$ definované v oblasti $\mathcal{D} = \mathcal{C} - \{1\}$ najděte inverzní funkci.

Výsledek: Pro $z \neq 1$ existuje jednoznačná inverzní funkce

$$f^{-1}(z) = \frac{z+2}{z+1}.$$

6.11. K funkci $f(z) = \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$ definované v oblasti $\mathcal{D} = \mathcal{C} - \{\mathrm{i}\}$ najděte inverzní funkci.

Výsledek: Pro $z \neq 1$ existuje jednoznačná inverzní funkce

$$f^{-1}(z) = \mathrm{i}\,\frac{z+1}{z-1}.$$

8c **6.12.** Popište inverzní funkci k funkci $f(z) = z^2$.

Řešení : Jestliže $w^2 = z$, potom také $(-w)^2 = z$, takže definiční rovnici pro inverzní funkci splňují dvě hodnoty. Jestliže se vybere jedno dohodnuté řešení (např. Re $w > 0 \;\vee\; w = a\,\mathrm{i}$, $a \in \mathcal{R}$, $a \geq 0$)), vznikne jednoznačná inverzní funkce (druhá odmocnina).

9a **6.13.** V množině $\mathcal{C}$ najděte algebraickou metodou všechna řešení rovnice $w^2 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Řešení : Řešení rovnice $w^2 = u^2 - v^2 + 2uv\,\mathrm{i} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ je ekvivalentní řešení soustavy rovnic v množině $\mathcal{R}$

$u^2 - v^2 = 1$, $2uv = \sqrt{3}$.

Z druhé rovnice vyjádříme u a po odstranění zlomku dostaneme

$4u^4 - 4u^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad u^2 = \frac{3}{2} \quad (u^2 = -\frac{1}{2}$ nemá řešení v $\mathcal{R}$) .

Odtud

$$u_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\,,\; v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

$$u_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}\,;\; v_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,;$$

$$w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+\mathrm{i})\,,\quad w_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+\mathrm{i})\,.$$

6.14. Napište algebraické vyjádření jednoznačné inverzní funkce, která byla popsána v př. 6.12.

Řešení : Z vyjádření $w^2 = (u+\mathrm{i}v)^2 = x + \mathrm{i}y (= z)$ dostaneme soustavu

$u^2 - v^2 = x$, $2uv = y$.

Řešení této soustavy při splnění podmínky $u > 0$ je jednoznačné

$$y \geq 0 : \quad u = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+y^2}+x)}\,,\quad v = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+y^2}-x)}\,,$$

$$y < 0 : \quad u = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+y^2}+x)}\,,\quad v = -\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+y^2}-x)}\,,$$

Případ $u = 0$ může nastat pouze pro $x \leq 0$ a v tomto případě je třeba volit nezápornou hodnotu odmocniny $v = \sqrt{-x}$.

8d **6.15.** Popište inverzní funkci k funkci $f(z) = z^n$, $n \in \mathcal{N}$.

Návod : Inverzní funkci jako řešení rovnice $w^n = z$ je třeba chápat jako n - značnou funkci $w = \sqrt[n]{|z|}\, e^{\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\mathrm{i}}$, $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$. Výběrem jedné z těchto hodnot ($k = 0$) lze definovat jednoznačnou funkci.

6.16. Popište mnohoznačnou inverzní funkci (Ln z) k funkci $f(z) = e^z$.

Řešení : Podle základní vlastnosti exponenciální funkce (př. 3.25) pro všechna $w \in \mathcal{C}$, $k \in \mathcal{Z}$ platí $e^{w+2k\pi\mathrm{i}} = e^w\, e^{2k\pi\mathrm{i}} = e^w$. Rovnice $e^{\mathrm{Ln}\, z} = e^w = z$, která definuje inverzní funkci Ln z , má v množině $\mathcal{C}$ nekonečně mnoho řešení. Jestliže se vybere jedno dohodnuté řešení (obvykle $-\pi < \mathrm{Im\,Lg}\, z \leq \pi$), vznikne jednoznačná inverzní funkce

Příklad 3.2.1. *Určete reálnou a imaginární část funkce* $f(z)$

2e

a) $f(z) = (z + \mathrm{j})^2$ 2f *b)* $f(z) = e^{-\mathrm{j}z}$

Řešení: a) $f(x+\mathrm{j}y) = (x + \mathrm{j}y + \mathrm{j})^2 = (x + \mathrm{j}(y + 1))^2 = x^2 + 2\mathrm{j}x(y + 1) - (y + 1)^2 = x^2 - y^2 - 2y - 1 + \mathrm{j}2(xy + x)$.

Z toho píšeme, že $\mathcal{Re}\, f(z) = \underline{\underline{x^2 - y^2 - 2y - 1}}$ a $\mathcal{Im}\, f(z) = \underline{\underline{2xy + 2x}}$.

b) $f(x+\mathrm{j}y) = e^{-\mathrm{j}(x+\mathrm{j}y)} = e^{(y-\mathrm{j}x)} = e^y(\cos(-x) + \mathrm{j}\sin(-x)) = e^y(\cos x - \mathrm{j}\sin x)$.

Potom $\mathcal{Re}\, f(z) = \underline{\underline{e^y \cos x}}$ a $\mathcal{Im}\, f(z) = \underline{\underline{-e^y \sin x}}$.

Příklad 3.2.2. *Vypočítejte hodnoty následujících výrazů, v části d) až h) hlávní hodnoty výrazů*

1e *a)* $e^{1+\mathrm{j}\pi}$ *b)* $e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$ *c)* $\ln(e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}})$ 1h *d)* $\ln(1 + \mathrm{j})$

1i *e)* $\ln(-1)$ 1j *f)* $(-1)^{\mathrm{j}}$ 1k *g)* j^{j} 1l *h)* j^{π}

Řešení: a) $e^{1+\mathrm{j}\pi} = e(\cos\pi + \mathrm{j}\sin\pi) = \underline{\underline{-e}}$.

b) $e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = (\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{2}) = \underline{\underline{\mathrm{j}}}$.

c) $\ln(e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}) = \ln 1 + \mathrm{j}\frac{\pi}{3} = \underline{\underline{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}}$.

d) $1 + \mathrm{j} = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) + \mathrm{j}\sin(\frac{\pi}{4} + 2k\pi))$. Pak $\ln(1 + \mathrm{j}) = \underline{\underline{\ln(\sqrt{2}) + \mathrm{j}\frac{\pi}{4}}}$.

e) $-1 = 1(\cos(\pi + 2k\pi) + \mathrm{j}\sin(\pi + 2k\pi))$. Omezíme-li se na hlavní větev logaritmu, bereme $k = 0$ a dostaneme, že $\ln(-1) = \ln 1 + \mathrm{j}\pi = \underline{\underline{\mathrm{j}\pi}}$.

f) $(-1)^{\mathrm{j}} = e^{\mathrm{j}\ln(-1)} = e^{\mathrm{j}\ln(\cos\pi + \mathrm{j}\sin\pi)} = e^{\mathrm{j}\mathrm{j}\pi} = \underline{\underline{e^{-\pi}}}$.

g) $\mathrm{j}^{\mathrm{j}} = e^{\mathrm{j}\ln\mathrm{j}} = e^{\mathrm{j}(\ln 1 + \mathrm{j}\frac{\pi}{2})} = \underline{\underline{e^{-\frac{\pi}{2}}}}$.

h) $\mathrm{j}^{\pi} = e^{\pi\ln\mathrm{j}} = e^{\pi\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = e^{\mathrm{j}\frac{\pi^2}{2}} = \underline{\underline{\cos\frac{\pi^2}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi^2}{2}}}$.

Příklad 3.2.3. *Vyjádřete* $\cos^2\varphi$ *a* $\sin^2\varphi$ *pomocí komplexních goniometrických funkcí argumentu* 2φ.

Řešení: Nejdřív spočítáme $\cos^2\varphi$:

$$\cos^2\varphi = \frac{(e^{\mathrm{j}\varphi} + e^{-\mathrm{j}\varphi})^2}{4} = \frac{e^{2\mathrm{j}\varphi} + 2 + e^{-2\mathrm{j}\varphi}}{4} = \frac{1 + \frac{e^{2\mathrm{j}\varphi} + e^{-2\mathrm{j}\varphi}}{2}}{2} = \underline{\underline{\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}}}.$$

Podobně $\sin^2\varphi = \underline{\underline{\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}}}$.

4. Funkce komplexní proměnné

Zobrazení množiny $\mathcal{D} \subset C^*$ do množiny C^* se nazývá **(komplexní) funkce komplexní proměnné**. Znamená to, že ke každému komplexnímu číslu $z \in \mathcal{D}$ je přiřazeno *jediné* komplexní číslo $w = f(z)$. V tomto smyslu mluvíme o jednoznačné funkci; možným zobecněním pojmu funkce na mnohoznačné funkce se budeme informativně zabývat v kap. 6.

Pro znázorňování funkce komplexní proměnné nelze použít tak jednoduchý způsob, jako je graf reálné funkce jedné nebo dvou reálných proměnných. Funkci komlexní proměnné si můžeme představit jako zobrazení bodů jedné Gaussovy roviny (např. s pravoúhlými souřadnicemi $x,\ y$) do jiné (nebo téže) Gaussovy roviny (např. s pravoúhlými souřadnicemi $u,\ v$). Pro danou funkci $w = f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)$ umožňují funkce $u(x,y)$ a $v(x,y)$ vypočítat souřadnice obrazu bodu $z = x + \mathrm{i}\,y$.

V příkladech 4.1 - 4.13 jsou dány funkce komplexní proměnné. Napište algebraický tvar těchto funkcí a charakterizujte geometrické vlastnosti zobrazení Gaussovy roviny (bod má souřadnice $x,\ y$) do téže Gaussovy roviny (obraz bodu má souřadnice $u,\ v$) definované těmito funkcemi.

5a 2a

4.1. $w = f(z) = z + 1 - \mathrm{i}\ ,\ \mathcal{D} = C$.

Řešení : Souřadnice u, v obrazu bodu $[x,y]$ jsou dány rovnicemi $u = x + 1$, $v = y - 1$, které znamenají rovnice pro posunutí. Tento výsledek je zřejmý také z geometrického významu přičtení konstantního komplexního čísla k libovolnému komplexnímu číslu.

5b

4.2. $w = f(z) = -2z\ ,\ \mathcal{D} = C$.

Řešení : Pro souřadnice u, v obrazu bodu $[x,y]$ dostanete snadno $u = -2x$, $v = -2y$. Z geometrického hlediska obraz reálného násobku komplexního čísla z leží na přímce, která spojuje počátek s obrazem komplexního čísla z . Obraz komplexního čísla $-2z$ leží na opačné polopřímce (s počátečním bodem v počátku) a má od počátku dvojnásobnou vzdálenost ($|-2z| = 2|z|$). Jde tedy o stejnolehlost se středem v počátku a s koeficientem stejnolehlosti $k = -2$.

2b

4.3. $w = f(z) = \dfrac{\mathrm{i} - 1}{\sqrt{2}}\, z\ ,\ \mathcal{D} = C$.

5c

Řešení : Z algebraického tvaru dané funkce

$$w = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{i} - 1)(x + \mathrm{i}\,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x - y + \mathrm{i}\,x - \mathrm{i}\,y)$$

můžeme snadno získat rovnice pro souřadnice obrazu bodu $[x,y]$

$$u = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)\ ,\quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)\ .$$

Násobení libovolného komplexního čísla z konstantním komplexním číslem $a = \dfrac{\mathrm{i} - 1}{\sqrt{2}}$ znamená podle Moivreovy věty otočení o argument tohoto komplexního čísla ($\frac{3}{4}\pi$). Násobení absolutní hodnotou tohoto komplexního čísla se neprojeví, protože $|a| = 1$.

5d

4.4. $w = f(z) = \mathrm{i}\,z\ ,\ \mathcal{D} = C$.

Výsledek : Otočení v rovině o úhel $\frac{\pi}{2}$. Rovnice tohoto otočení jsou $u = -y\ ,\ v = x$.

4.5. $w = f(z) = \dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\, z\ ,\ \mathcal{D} = \{z :\ |z - 2| < 1\}$.

Řešení : Tato funkce definuje otočení o úhel velikosti $\frac{\pi}{3}$. Definiční obor $\mathcal{D}$ je vnitřní oblast kružnice se středem $z_0 = 2$ a s poloměrem 1. Obraz oblasti $\mathcal{D}$ je vnitřní oblast kružnice se středem $z_0 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ a s týmž poloměrem.

2c 5e

4.6. $w = f(z) = e^{\mathrm{i}\alpha} z\ ,\ \mathcal{D} = C$.

Řešení : Z algebraického tvaru dané funkce $w = (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)(x + \mathrm{i}\,y) = x\cos\alpha - y\sin\alpha + \mathrm{i}\,(x\sin\alpha + y\cos\alpha)$ snadno získáme rovnice pro souřadnice obrazu bodu $[\,x,\ y\,]$

$$u = x\cos\alpha - y\sin\alpha\ ,\quad v = x\sin\alpha + y\cos\alpha\ .$$

Z exponenciálního vyjádření $w = e^{\mathrm{i}\alpha}\, z = re^{\mathrm{i}\varphi}\, e^{\mathrm{i}\alpha} = re^{\mathrm{i}(\varphi + \alpha)}$ je vidět, že rovnice představují v rovině otočení o úhel α .

5c

4.7. $w = f(z) = \bar{z}$, $\mathcal{D} = \mathcal{C}$.

Řešení : Pro souřadnice obrazu platí $u = x$, $v = -y$. Obraz každého komplexního čísla má stejnou absolutní hodnotu, ale opačný argument. Jde tedy o souměrnost kolem osy reálných čísel.

6c

4.8. $w = f(z) = z^2$, $\mathcal{D} = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. Najděte obraz přímky $y = 1$.

Řešení : Z algebraického tvaru dané funkce $w = (x + iy)^2 = = x^2 + 2i\,xy - y^2$ vyjdou rovnice pro souřadnice obrazu bodu $[x, y]$ $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Geometrický popis tohoto zobrazení dostaneme podle Moivreovy věty (pro druhou mocninu komplexního čísla). Body na kružnici se středem v počátku a s poloměrem r se zobrazí na kružnici se středem v počátku, ale s poloměrem r^2 . Body na polopřímkách s počátečním bodem v počátku se zobrazí na polopřímky s dvojnásobným argumentem (obr. 5). Definiční obor $\mathcal{D}$ je vnitřek horní poloroviny s hraniční přímkou v reálné ose. Obrazem $\mathcal{D}$ je Gaussova rovina, ze které jsou vynechána nezáporná reálná čísla.

Pro souřadnice obrazů bodů přímky $y = 1$ musí platit $u = x^2 - 1$, $v = 2x$, $x \in \mathcal{R}$.
Jsou to parametrické rovnice křivky, ze kterých lze snadno vyloučit parametr x : $u = \frac{v}{2}^2 - 1$ tj $v^2 = 4(u + 1)$. Vyšla tedy rovnice paraboly s vrcholem v bodě $[-1, 0]$ a s ohniskem v počátku.

Obr. 5.

4.9. $w = f(z) = |z|z$, $\mathcal{D} = \mathcal{C}$.

Řešení: Pro souřadnice obrazu platí $u = x\sqrt{x^2 + y^2}$, $v = y\sqrt{x^2 + y^2}$. Každý bod, který leží na jednotkové kružnici se středem v počátku, se zobrazí do téhož bodu (samodružný bod). Obrazem počátku je opět počátek a obrazy ostatních bodů mají stejný argument jako původní body.

4.10. $w = f(z) = \bar{z}z$, $\mathcal{D} = \mathcal{C}$.

Výsledek : Obrazem je množina všech nezáporných reálných čísel.

2d

5g

4.11. $w = f(z) = \frac{z}{|z|}$, $\mathcal{D} = \mathcal{C} - \{0\}$.

Výsledek : Pro každé nenulové komplexní číslo z je $|f(z)| = 1$, takže jeho obraz leží na jednotkové kružnici se středem v počátku.

6a

4.12. $w = f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$, $\mathcal{D} = \{ z : |z| \geq 1\}$. Najděte obraz přímky $y = 2$.

Řešení: Je vhodné upravit zápis funkce takto $w = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{\bar{z}z} = \frac{z}{|z|^2}$.
Odtud snadno dostaneme rovnice pro souřadnice obrazu bodu $[x, y]$

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} , \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2} .$$

kruhová inverze

Ze zápisu funkce je vidět, že dané komplexní číslo se pouze dělí kladným číslem $|z|^2$, tj. mění se jeho absolutní hodnota, ale jeho argument se nemění. Každý bod, který leží na jednotkové kružnici se středem v počátku, se zobrazí do téhož bodu (samodružný bod). Body vnější oblasti této jednotkové kružnice se zobrazí jako body vnitřní (na stejné polopřímce s počátečním bodem v počátku). Zobrazení je možné rozšířit tak, že jako obraz nevlastního bodu $z = \infty$ vezmeme počátek $w = 0$.

Pro souřadnice obrazů bodů přímky $y = 2$ musí platit

$$u = \frac{x}{x^2 + 4} , \quad v = \frac{2}{x^2 + 4} , \quad x \in \mathcal{R} .$$

Z těchto rovnic lze umocněním a sečtením vyloučit parametr x

$$u^2 + v^2 = \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} + \frac{4}{(x^2 + 4)^2} = \frac{1}{x^2 + 4} = \frac{1}{2}v .$$

pak $u^2 + v^2 - \frac{1}{2}v = 0$ $\to$ $u^2 + (v - \frac{1}{4})^2 = (\frac{1}{4})^2$

$\to$ kružnice

Rovnici je možné upravit na základní tvar
$u^2 + v^2 - \frac{1}{2}v = 0$ neboli $u^2 + \left(v - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$. Obrazem dané přímky je kružnice se středem v bodě $\left[\, 0, \frac{1}{4} \,\right]$ a s poloměrem $r = \frac{1}{4}$.
Tato kružnice prochází počátkem.

Poznámka : Zajímavé zobrazení definované funkcí $w = \frac{1}{\overline{z}}$ se nazývá **kruhová inverze** (viz použití v př. 4.25 a dalších) .

4.13. $w = f(z) = \frac{1}{z}$, $\mathcal{D} = \mathcal{C}^*$.

Řešení: Pro $z \neq 0$ vyjde po rozšíření zlomku komplexním číslem $\overline{z}$

$$w = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} .$$

Kromě dělení kladným reálným číslem ($|z|^2$) jako v předcházejícím příkladě je třeba ještě utvořit komplexně sdružené číslo. Body vnitřní oblasti jednotkové kružnice se středem v počátku se zobrazí jako její vnější body (a naopak). Aby bylo zobrazení definováno pro všechna $z \in \mathcal{C}^*$, je třeba jako obraz nevlastního bodu zvolit počátek (a naopak). Zobrazení má pouze dva samodružné body ($z = 1$, $z = -1$) .

V příkladech 4.14 - 4.24 popište zobrazení definovaná danými funkcemi jako zobrazení složená z typu uvedených v předcházejících příkladech.

4.14. $w = f(z) = \mathrm{i}\,z - 1$, $\mathcal{D} = \{\, z : |z - 2| \leq 1 \,\}$.

Řešení : Danou funkci je možné zapsat jako složenou funkci $w_1 = \mathrm{i}\,z$, $w = w_1 - 1$. Z tohoto zápisu je vidět, že nejprve se provede otočení kolem počátku o $\frac{\pi}{2}$ (př. 4.4) a potom posunutí o -1 . Z jiného zápisu funkce $w = f(z) = \mathrm{i}\,z - 1 = \mathrm{i}\,z + \mathrm{i}^2 = \mathrm{i}\,(z + \mathrm{i})$ však dostaneme složenou funkci $w_1 = z + \mathrm{i}$, $w = \mathrm{i}\,w_1$. která znamená posunutí o úsečku délky 1 ve směru imaginární osy a potom otočení o $\frac{\pi}{2}$. Obě tyto možnosti zobrazení množiny $\mathcal{D}$ jsou znázorněny na obr. 6.

4.15. $w = f(z) = (\sqrt{3} + \mathrm{i}\,)z$, $\mathcal{D} = \mathcal{C}$.

Výsledek : Podle Moivreovy věty znamená toto zobrazení stejnolehlost se středem v počátku (s koeficientem stejnolehlosti $k = 2$) a otočení kolem počátku o úhel $\frac{\pi}{6}$). Gaussova rovina se zobrazí opět na celou Gaussovu rovinu.
Na pořadí zobrazení v tomto případě nezáleží.

O b r . 6 .

4.16. $w = f(z) = cz + d$, $c \in \mathcal{C}$, $d \in \mathcal{C}$, $c \neq 0$, $\mathcal{D} = \mathcal{C}$.

(Funkce se nazývá **obecná lineární funkce** .)

Výsledek : Zobrazení se obecně skládá ze stejnolehlosti a otočení ($w_1 = cz$) a posunutí ($w = w_1 + d$). Ve zvláštních případech může některé zobrazení chybět (např. otočení v případě $c \in \mathcal{R}^+$). Gaussova rovina se zobrazí opět na celou Gaussovu rovinu.

6e

Řešení: Je vhodné vyjít z goniometrického tvaru komplexního čísla $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$. Potom pro $z \neq 0$ vyjde

$$f(z) = \frac{1}{2}[r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) + \frac{1}{r}(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + \mathrm{i}\ \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi .$$

Obraz kružnice (r je konstantní) je určen parametrickými rovnicemi

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi\ ,\ v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi\ ,\ \varphi \in < 0, 2\pi) .$$

Pro $r = 1$ určují rovnice $u = \cos\varphi$, $v = 0$ úsečku $< -1, 1 >$.
Pro $r > 1$ dostaneme parametrické rovnice kladně orientované elipsy.
Pro $r < 1$ vyjdou parametrické rovnice záporně orientované elipsy, protože $\frac{1}{r} > r$ a koeficient při $\sin\varphi$ je záporný (obr. 7).

Obr.7.

Další funkce reálné proměnné můžeme snadno zobecnit pro libovolné komplexní $z \in C$ pomocí řad. **Exponenciální funkci** e^z definujeme jako součet absolutně konvergentní řady $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ (viz př. 3.23) .

Jako součet absolutně konvergentních řad můžeme zapsat také další odvozené funkce

$$e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n!}\ ,\quad e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n\frac{z^n}{n!}\ ,\quad e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^n\frac{z^n}{n!} .$$

Výsledek př. 3.25 ukazuje, že i pro komplexní čísla je splněna základní vlastnost exponenciálních funkcí $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

Na základě součtů a rozdílů absolutně konvergentních řad definujeme další funkce

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \textbf{(kosinus)},$$

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \textbf{(hyperbolický kosinus)},$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \textbf{(sinus)},$$

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \textbf{(hyperbolický sinus)}.$$

4.39. Najděte hodnotu komplexních čísel a) $e^{1+\pi\mathrm{i}}$, b) $e^{2+\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$, 1f
1g c) $e^{\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$, d) $e^{1-\mathrm{i}}$.

Řešení : a) $e^{1+\pi\mathrm{i}} = e^1\, e^{\pi\mathrm{i}} = e(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = -e$;
b) $e^{2+\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = e^2\, e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = \mathrm{i}\ e^2$;
c) $e^{\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = e^{\ln\sqrt{2}}\, e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}) =$
$= \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + \mathrm{i}$;
d) $e^{1-\mathrm{i}} = e^1\, e^{-\mathrm{i}} = e\,(\cos 1 - \mathrm{i}\sin 1) \doteq 2,718\ (0,54 - 0,84\,\mathrm{i})$.

6b

4.40. Pro funkci $f(z) = e^z$ popište zobrazení rovnoběžek se souřadnými osami v množině komplexních čísel $-\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi$.

Řešení : Komplexní číslo $w = e^z$ vyjádříme pomocí reálné a imaginární části komplexního čísla z

6b

$w = e^z = e^{x+iy} = e^z\, e^{iy} = e^x\,(\cos y + i \sin y)$.
Odtud je vidět, že $|w| = |e^z| = e^x$ a y určuje argument $w = e^z$. Obrazem přímky $x = c$, $c \in \mathcal{R}$ je tedy kružnice se středem v počátku a s poloměrem $r = e^c$. Obrazem úsečky (bez jednoho krajního bodu) $y = c$, $c \in (-\pi, \pi >$ je polopřímka bodu s tímto argumentem. Obrazem dané množiny je celá Gaussova rovina (obr. 8).

Obr.8.

4.41. Najděte algebraický tvar funkce $f(z) = z\, e^z$.

Řešení : $f(z) = (x + i y)e^{x+iy} = (x + i y)e^x\, e^{iy} =$
$= x\, e^x\,(\cos y + i \sin y) + i y\, e^x\,(\cos y + i \sin y) =$
$= e^x\,(x \cos y - y \sin y) + i\; e^x\,(x \sin y + y \cos y)$.

3a

4.42. Podle uvedených definic dokažte, že pro všechna $z \in C$ platí
a) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$; b) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

Řešení : a) Goniometrické funkce vyjádříme podle definice pomocí exponenciálních funkcí a použijeme pravidlo pro násobení (př. 3.25)

$$\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 =$$
$$= \frac{e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-iz}}{4} + \frac{e^{2iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{-4} = \frac{4e^0}{4} = 1 \,.$$

4.47. Zjednodušte $\cos z\ \cos \overline{z} + \sin z\ \sin \overline{z}$.

Řešení : Snadno se dá ověřit, že $\cos \overline{z} = \overline{\cos z}$ a $\sin \overline{z} = \overline{\sin z}$.
Potom $\cos z\ \overline{\cos z} + \sin z\ \overline{\sin z} = |\cos z|^2 + |\sin z|^2 =$
$= \cos^2 x + \sinh^2 y + \sin^2 x + \sinh^2 y = 1 + 2\sinh^2 y =$
$= \cosh^2 y + \sinh^2 y = \cosh 2y$.

1m - p

4.48. Najděte následující funkční hodnoty
a) $\cos(\pi - i)$, b) $\cos(1 + i \ln 2)$, c) $\sin(\pi + i)$, d) $\sin(\frac{\pi}{2} - i)$.

Řešení : a) $\cos(\pi - i) = \cos \pi\ \cosh(-1) - i \sin \pi\ \sinh(-1) =$
$= (-1)\cosh(-1) - 0 = -\cosh 1 \doteq -1{,}543$;
Vidíme, že vypočítaná hodnota je menší než -1 .
b) $\cos(1 + i \ln 2) = \cos 1\ \frac{2+\frac{1}{2}}{2} - i \sin 1 \frac{2-\frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}\cos 1 - i\,\frac{3}{4}\sin 1 =$
$= \frac{1}{4}(5\cos 1 - 3i \sin 1) \doteq \frac{1}{4}(2{,}7 - 2{,}52\, i) = 0{,}675 - 0{,}63\, i$;
c) $\sin(\pi + i) = \sin \pi \cosh 1 + i \cos \pi \sinh 1 = -i \sinh 1 \doteq -1{,}175\, i$;
d) $\sin(\frac{\pi}{2} - i) = \sin \frac{\pi}{2} \cosh(-1) + i \cos \frac{\pi}{2} \sinh(-1) = cosh 1 \doteq 1{,}543$.
Vidíme, že vypočítaná hodnota je větší než 1 .

4.49. Najděte následující funkční hodnoty
a) $\cosh(\ln 2 + i\pi)$; b) $\sinh(1 - i)$.

Řešení: a) $\cosh(\ln 2 + i\pi) = \cosh(\ln 2)\cos\pi + i \sinh(\ln 2)\sin\pi = -\frac{5}{4}$;
b) $\sinh(2 - i) = \sinh 2 \cos(-1) + i \cosh 2 \sin(-1) \doteq 1{,}96 - 3{,}17\, i$.

4.50. Zobrazení definované funkcí $f(z) = \cos z$ rozložte na jednodušší zobrazení. Zobrazte postupně množinu všech komplexních čísel $[\,x,\ y\,]$, pro která platí $-\pi < x \leq \pi \wedge y < 0$.

Výsledek : Funkce $w = f(z) = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ se dá vytvořit složením funkcí $w_1 = i z$, $w_2 = e^{w_1}$, $w = \frac{1}{2}(w_2 + \frac{1}{w_2})$.

Obrazem dané množiny je celá Gaussova rovina s vynechanou úsečkou $< -1, 1 >$.

4.17. $w = f(z) = (1 + \mathrm{i})z - 1$, $\mathcal{D} = \{z : |z - \mathrm{i}| < 1\}$.

Výsledek : Obrazem dané vnitřní oblasti kružnice je vnitřní oblast kružnice se středem v bodě -1 a poloměrem $r = \sqrt{2}$.

4.18. $w = f(z) = z^2 - 2z + \mathrm{i}$, $\mathcal{D} = \{z : \mathrm{Im}\, z > 0\}$.

Řešení: Danou funkci je třeba upravit na tvar $w = f(z) = z^2 - 2z + \mathrm{i} =$
$= (z-1)^2 - 1 - \mathrm{i}$ a potom zapsat jako složenou funkci $w_1 = z - 1$, $w_2 = {w_1}^2$, $w = w_2 - 1 + \mathrm{i}$. Posunutím o -1 se daný vnitřek poloroviny zobrazí na tutéž množinu $\mathrm{Im}\, z > 0$, zobrazením w_2 (viz př. 4.8) se tento vnitřek poloroviny zobrazí na rovinu s vynechanou kladnou reálnou poloosou. Nakonec se provede posunutí přičtením komplexního čísla $-1 + \mathrm{i}$.

4.19. $w = f(z) = z^2 + \mathrm{i}z - 1$; $\mathcal{D} = \{ z : \mathrm{Im}\, z > -\frac{\mathrm{i}}{2} \}$.

Návod : Funkci upravte na tvar
$w = f(z) = z^2 + \mathrm{i}z - 1 = (z + \frac{\mathrm{i}}{2})^2 + \frac{1}{4} - 1 = = (z + \frac{\mathrm{i}}{2})^2 - \frac{3}{4}$.

4.20. $w = f(z) = \dfrac{2}{z + \mathrm{i}}$, $\mathcal{D} = \mathcal{C} - \{-\mathrm{i}\}$.

Návod : Složená funkce : $w_1 = z + \mathrm{i}$, $w_2 = \dfrac{1}{w_1}$, $w = 2w_2$.

4.21. $w = f(z) = \dfrac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$, $\mathcal{D} = \mathcal{C} - \{\mathrm{i}\}$.

Řešení : Danou funkci je třeba vhodným způsobem upravit

$$w = f(z) = \frac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = \frac{1 - \mathrm{i} + \mathrm{i} + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = 1 + \frac{2\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} .$$

Tuto funkci můžeme chápat jako složenou např. takto
$w_1 = 1 - \mathrm{i}$ (posunutí), $w_2 = \dfrac{1}{w_1}$ (př. 4.13.), $w_3 = \mathrm{i}w_2$ (otočení kolem počátku o úhel $\frac{\pi}{2}$), $w_4 = 2w_3$ (stejnolehlost) a $w = w_4 + 1$ (posunutí). Obrazem množiny $\mathcal{D}$ je celá Gaussova rovina $\mathcal{C}$.

4.22. $w = f(z) = \dfrac{z + 2}{z + 1}$, $\mathcal{D} = \{ z : |z + 1| > 1 \}$.

6d

Výsledek : Obrazem množiny $\mathcal{D}$ (vnější oblast kružnice) je vnitřní oblast kružnice se středem v bodě 1 a s poloměrem $r = 1$.

$= 1 + \dfrac{1}{z+1}$

4.25. Najděte obraz libovolné přímky, která neprochází počátkem.

11b

Řešení : Použijeme rovnici přímky, kterou jsme odvodili v př. 1.65, takže pro $a \neq 0$, $a \in \mathcal{C}$

$$\overline{a}\, z + a\, \overline{z} = c \, , \; c \in \mathcal{R} .$$

Jestliže $c \neq 0$, potom přímka neprochází počátkem. Pro obraz w platí $w = \dfrac{1}{\overline{z}}$, takže odtud $z = \dfrac{1}{\overline{w}}$.
Po dosazení do rovnice přímky dostaneme

$$\frac{\overline{a}}{\overline{w}} + \frac{a}{w} = c \quad \Rightarrow \quad \overline{a}\, w + a\, \overline{w} = c\, w\, \overline{w} \quad \Rightarrow \quad w\, \overline{w} - \frac{\overline{a}}{c}\, w - \frac{a}{c}\, \overline{w} = 0 .$$

Z výsledku je vidět (viz př. 1.61), že obrazem dané přímky je kružnice, která prochází počátkem a má střed v bodě $\dfrac{a}{c}$. Přitom průvodič komplexního čísla a je kolmý na danou přímku.

4.26. Najděte obraz přímky $y = x - 1$ a výsledek ověřte konstrukcí.

Řešení : Z grafu přímky je vidět, že normála této přímky se dá charakterizovat např. průvodičem komplexního čísla $1 - \mathrm{i}$. Daná přímka musí mít tedy rovnici tvaru $(1 + \mathrm{i})\, \overline{z} + (1 - \mathrm{i})\, z = c$, $c \in \mathcal{R}$ (viz př. 1.65.). Tuto rovnici musí splňovat např. bod $z = 1$, takže dosazením vypočítáme $c = 2$. Podle předcházejícího příkladu je obrazem dané přímky kružnice, která prochází počátkem a má střed v bodě $\frac{1-\mathrm{i}}{2}$. Konstrukce obrazu přímky je velmi jednoduchá, protože můžeme využít toho, že body [1, 0] a [0, -1] leží na jednotkové kružnici se středem v počátku a jsou tedy samodružné. Společně s počátkem je těmito třemi body hledaná kružnice jednoznačně určena. Její střed má zřejmě souřadnice [$\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$].

4.27. Najděte obraz přímky $y = 1$ a výsledek ověřte konstrukcí.

11c

Výsledek : Kružnice, která prochází počátkem a má střed v bodě $\frac{\mathrm{i}}{2}$. Při konstrukci se využije toho, že bod i je samodružný.

4.28. Najděte obraz přímky $x + y = 2$ a výsledek ověřte konstrukcí.

Návod : Při konstrukci nelze využít samodružné body, takže podle konstrukce v př. 1.55 je třeba najít např. obraz bodu [1,1]. Tento obraz a počátek jsou krajní body úsečky, která je průměrem výsledné kružnice. Obrazem dané přímky je kružnice, která prochází počátkem a má střed v bodě $\frac{1+i}{4}$.

11d

4.29. Najděte obraz libovolné přímky, která prochází počátkem.

Řešení : Podle př. 1.63 je možné zapsat rovnici dané přímky ve tvaru
$a\,\overline{z} + \overline{a}\,z = 0$. Obraz má rovnici $\dfrac{a}{w} + \dfrac{\overline{a}}{\overline{w}} = 0$ neboli $a\,\overline{w} + \overline{a}\,w = 0$, takže obrazem dané přímky je táž přímka.

11e

4.30. Najděte obraz libovolné kružnice, která neprochází počátkem.

Řešení : Vyjdeme z rovnice kružnice odvozené v př. 1.61. Pro obraz vyjde

$$\frac{1}{\overline{w}}\,\frac{1}{w} - \frac{\overline{a}}{\overline{w}} - \frac{a}{w} + |a|^2 = r^2 ;$$

$$1 - \overline{a}\,w - a\,\overline{w} + (|a|^2 - r^2)\,w\,\overline{w} = 0 .$$

Protože $|a| \neq r$, můžeme rovnici dělit číslem $|a|^2 - r^2$

$$w\,\overline{w} - \frac{\overline{a}}{|a|^2 - r^2}\,w - \frac{a}{|a|^2 - r^2}\,\overline{w} + \frac{1}{|a|^2 - r^2} = 0 .$$

Obrazem je tedy opět kružnice, která neprochází počátkem a má střed v bodě $\dfrac{a}{|a|^2 - r^2}$. Tento bod ale není obrazem středu původní kružnice.

11f

4.31. Najděte obraz kružnice $|z - 2i| = 1$ výpočtem i konstrukcí.

Řešení : Zapíšeme rovnici dané kružnice : $z\,\overline{z} + 2iz - 2i\overline{z} + 4 = 1$.
Pro její obraz po úpravě dostaneme
$w\,\overline{w} + \frac{2}{3}\,i\,w - \frac{2}{3}\,i\,\overline{w} + \frac{1}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad w\,\overline{w} + \frac{2}{3}\,i\,w - \frac{2}{3}\,i\,\overline{w} + \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$.
Obrazem je tedy kružnice se středem v bodě $\frac{2}{3}\,i$ a s poloměrem $r = \frac{1}{3}$.
Při konstrukci obrazu využijeme toho, že na dané kružnici leží bod i (samodružný) a bod $3i$. Stačí sestrojit podle konstrukce v př. 1.55 obraz tohoto bodu ($\frac{i}{3}$) a dostaneme průměr hledané kružnice.

4.32. Najděte obraz kružnice $|z - 2 - 2\,i| = 2$ výpočtem i konstrukcí.

Návod : Ke konstrukci obrazu využijte dva samodružné body na jednotkové kružnici a podle př. 1.55 najděte obraz bodu $(2 + \sqrt{2})(1 + i)$.
Obrazem je kružnice se středem v bodě $\dfrac{1+i}{2}$ a s poloměrem $r = \frac{1}{2}$.

4.33. Najděte obraz kružnice $|z + 1 + i| = 2$ výpočtem a konstrukcí.

Návod : Ke konstrukci obrazu využijte dva samodružné body na jednotkové kružnici a obraz bodu $-(1 + \sqrt{2})(1 + i)$ na původní kružnici.
Výsledek : Obrazem je kružnice se středem v bodě $\frac{1+i}{2}$ a s poloměrem $r = 1$. Při podrobnějším studiu zobrazení zjistíte, že v tomto případě se vnitřní oblast dané kružnice zobrazí na vnější oblast výsledné kružnice.

4.34. Najděte obraz kružnice $|z - 1 + i| = 1$ výpočtem i konstrukcí.

Výsledek : Obrazem je táž kružnice, body 1 a $-i$ jsou samodružné. Obrazem bodu $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\,(1 - i)$ je bod $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\,(1 - i)$ a naopak.

4.35. Najděte obraz kružnice $|z - 1 - i| = \sqrt{2}$.

Výsledek : Obrazem je přímka, která neprochází počátkem. Při konstrukci se obraz dané kružnice dostane jednoduše jako přímka, která prochází dvěma samodružnými body dané kružnice.

11g

4.36. Najděte obraz kružnice $\left|z + \dfrac{i}{4}\right| = \dfrac{1}{4}$ výpočtem i konstrukcí.

Výsledek : Obrazem je přímka $y = 2$.

-- -- -- -- --

4.37. Napište algebraický tvar funkce $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

Výsledek : Po dosazení $z = x + i\,y$ a úpravách vyjde

$$f(z) = \frac{x(x^2 + y^2 + 1)}{2(x^2 + y^2)} + i\,\frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{2(x^2 + y^2)} .$$

6e

4.38. V zobrazení definovaném funkcí $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ najděte obrazy kružnic, které mají střed v počátku.

6. Inverzní a mnohoznačné funkce

Jestliže funkce $f(z)$ je holomorfní v oblasti $\mathcal{D}$ a definuje prosté zobrazení oblasti $\mathcal{D}$ na oblast $\mathcal{D}'$ rozšířené Gaussovy roviny, potom existuje jediná **inverzní funkce** $g(z) = f^{-1}(z)$ definovaná v oblasti $\mathcal{D}'$. Pro $z_0 \in \mathcal{D}$ platí

$$g[f(z_0)] = f^{-1}[f(z_0)] = z_0 \quad \text{a} \quad g'[f(z_0)] = \frac{1}{f'(z_0)} .$$

K funkci, která není v oblasti $\mathcal{D}$ prostá, neexistuje jednoznačná inverzní funkce. Je však možné opustit představu zobrazení funkčních hodnot do Gaussovy roviny a zkonstruovat takovou plochu (Riemannovu), aby zobrazení oblasti $\mathcal{D}$ na Riemannovu plochu bylo prosté. Potom je možné definovat jednoznačnou inverzní funkci, která má definiční obor na Riemannově ploše. Těmito problémy se dále nebudeme zabývat.

Druhý obvyklý způsob popisu inverzních funkcí k funkcím, které nejsou prosté, je zavedení pojmu **mnohoznačné funkce**. Pokud se použije pojem funkce ve smyslu mnohoznačné funkce, musí to být ovšem výslovně uvedeno. Při zápisu těchto funkcí se obvykle používá velké písmeno (např. Arg z).

V příkladech 6.1 - 6.7 určete, zda daná funkce definuje prosté zobrazení dané oblasti $\mathcal{D}$ do rozšířené Gaussovy roviny $\mathcal{C}^*$.

7a

6.1. $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$, $\mathcal{D} = \mathcal{C}$.

Řešení : Prostá funkce musí splňovat implikaci $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$. Z rovnosti zlomků (hodnot funkce) dostaneme

$$\frac{az_1+b}{cz_1+d} = \frac{az_2+b}{cz_2+d} ,$$

$$a\ cz_1z_2 + ad\ z_1 + bc\ z_2 + bd = ac\ z_1z_2 + a\ dz_2 + bc\ z_1 + bd ,$$

$$(ad - bc)z_1 = (ad - bc)z_2 ,$$

$$z_1 = z_2 \qquad (ad - bc \neq 0).$$

Jestliže se doplní definice funkce zápisem $f(-\frac{d}{c}) = \infty$, je vidět, že jde o prosté zobrazení na rozšířenou Gaussovu rovinu.

6.2. $f(z) = az + b$, $a \neq 0$, $\mathcal{D} = \mathcal{C}$.

Výsledek : Funkce definuje prosté zobrazení $\mathcal{C}$ na $\mathcal{C}$. Jestliže se definice funkce doplní zápisem $f(\infty) = \infty$, potom funkce definuje prosté zobrazení $\mathcal{C}^*$ na $\mathcal{C}^*$.

7b

6.3. $f(z) = z^2$, $\mathcal{D} = \{z \in \mathcal{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Řešení : Oblast $\mathcal{D}$ je vnitřek mezikruží se středem v počátku, takže v něm existují body z_1 , $z_2 = -z_1$; pro které platí $z_1^2 = z_2^2$. Proto zobrazení není prosté.

7c

6.4. $f(z) = z^2$, $\mathcal{D} = \{z \in \mathcal{C} : |z - 1 + i| < 1\}$.

Řešení : Oblast $\mathcal{D}$ je vnitřní oblast kružnice se středem v bodě $1 - i$ a s poloměrem 1 . V této oblasti nelze najít dvě opačná komplexní čísla, takže toto zobrazení je prosté.

7d

6.5. $f(z) = e^z$, $\mathcal{D} = \{z \in \mathcal{C} : |z| < 4\}$.

Řešení : V dané oblasti leží např.body $z_1 = -i\pi, z_2 = i\pi$, pro které platí $e^{z_2} = e^{i\pi} = e^{-i\pi+2i\pi} = e^{-i\pi}\ e^{2i\pi} = e^{-i\pi} = e^{z_1}$, takže zobrazení není prosté.

7e

6.6. $f(z) = e^z$, $\mathcal{D} = \{z \in \mathcal{C} : -\pi < \text{Im } z \leq \pi\}$.

Výsledek : V dané oblasti je zobrazení prosté (př. 4.40).

6.7. $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, $\mathcal{D} = \{z \in \mathcal{C} : 0 < |z| < 1\}$.

Řešení : Z rovnosti funkčních hodnot $\frac{1}{2}(z_1 + \frac{1}{z_1}) = \frac{1}{2}(z_2 + \frac{1}{z_2})$ vyjde

$$z_1 - z_2 + \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} = z_1 - z_2 + \frac{z_2 - z_1}{z_1\ z_2} = (z_1 - z_2)(1 - \frac{1}{z_1z_2}) = 0 .$$

V dané oblasti není jmenovatel zlomku roven nule ani se nemůže rovnat jedné. Výrazem ve druhé závorce (nenulovým) můžeme rovnici dělit a dostaneme $z_1 - z_2 = 0$, tj. $z_1 = z_2$. Zobrazení dané oblasti do Gaussovy roviny je tedy prosté.

8a

6.8. K funkci $f(z) = \dfrac{2z+1}{z-1}$ definované v oblasti $\mathcal{D} = \mathcal{C} - \{1\}$ najděte inverzní funkci.

($\ln z$). Pro kladná reálná čísla je funkce $\ln z$ totožná s reálnou logaritmickou funkcí.

9b

9c

6.17. V množině $\mathcal{C}$ řešte rovnici a) $e^w = 1$ b) $e^w = -1$.

Řešení : a) Číslo 1 můžeme vyjádřit v exponenciálním tvaru nekonečně mnoha způsoby, takže dostaneme rovnici

$e^w = e^{u+iv} = e^{2k\pi i}$, $k \in \mathcal{Z}$.

Proto v množině $\mathcal{C}$ vyjde nekonečně mnoho řešení $w_k = 2k\pi i$, $k \in \mathcal{Z}$, zatímco v množině $\mathcal{R}$ existuje pouze jedno řešení $\underline{w_0 = 0}$.

b) Z vyjádření čísla -1 v exponenciálním tvaru dostaneme $e^w = e^{u+iv} = e^{(2k-1)\pi i}$, $k \in \mathcal{Z}$.

V množině $\mathcal{C}$ má i tato rovnice nekonečně mnoho řešení $w_k = \underline{(2k-1)\pi i}$, $\underline{k \in \mathcal{Z}}$, zatímco v množině $\mathcal{C}$ tato rovnice nemá žádné řešení.

9d

6.18. V množině $\mathcal{C}$ řešte rovnici a) $e^w = i - 1$ b) $e^w = 1 - i\sqrt{3}$ c) $e^w = -2$.

Řešení : a) Pro komplexní číslo $i - 1$ použijeme zápis v exponenciálním tvaru $e^w = e^u e^{iv} = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$. Tato rovnice je ekvivalentní dvěma rovnicím $e^u = \sqrt{2}$, $v = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathcal{Z}$. takže rovnice má nekonečně mnoho řešení $w = \underline{\ln\sqrt{2} + i(2k + \tfrac{3}{4})\pi}$, $k \in \mathcal{Z}$,

Výsledky : b) $w = \underline{\ln 2 + i(2k + \tfrac{1}{3})\pi}$, $k \in \mathcal{Z}$,

c) $\underline{w = \ln 2 + i(2k+1)\pi \ , \ k \in \mathcal{Z}}$.

6.19. Napište algebraické vyjádření mnohoznačné funkce $w = \operatorname{Ln} z$.

Řešení : Použijeme vyjádření v exponenciálním tvaru $e^w = e^u e^{iv} = |z|\, e^{i\arg z}$, odtud $w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\,(\arg z + 2k\pi)$, $k \in \mathcal{Z}$. Je možné definovat mnohoznačnou funkci $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathcal{Z}$ a psát $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$.

6.20. Pro libovolné $a \in \mathcal{C}$ lze definovat obecnou mocninu jako nekonečně mnohoznačnou funkci $z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$. Vyjádřete algebraický tvar mnohoznačné funkce $f(z) = z^{-i}$.

Řešení : Dosazením do obecného zápisu dostanete

$f(z) = z^{-i} = e^{-i \operatorname{Ln} z} = e^{i\,(\ln|z| + i\,(\arg z + 2k\pi))} =$
$= e^{\arg z + 2k\pi}\, e^{-i \lg|z|} = e^{2k\pi} e^{\arg z}(\cos\ln|z| - i \sin\ln|z|)$, $k \in \mathcal{Z}$.

10

6.21. V množině $\mathcal{C}$ vyjádřete, jaký význam mají následující zápisy a) $(-1)^i$ b) $(-1)^{\sqrt{2}}$ c) 2^i d) i^i .

Řešení : a) $(-1)^i = e^{i \operatorname{Ln}(-1)} = e^{i\, i(1+2k)\pi} = \underline{e^{-(2k+1)\pi}}$,

b) $(-1)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln}(-1)} = e^{i\sqrt{2}(2k+1)\pi}$,

c) $2^i = e^{i \operatorname{Ln} 2} = e^{i\,(\lg 2 + i 2k\pi)} = \underline{e^{-2k\pi} e^{i \lg 2}}$,

d) $i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i\, i(2k+\frac{1}{2})\pi} = \underline{e^{-(4k+1)\frac{\pi}{2}}}$.

e

6.22. Vyjádřete inverzní funkci k funkci $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, $z \neq 0$ jako mnohoznačnou funkci.

Řešení : Hodnota inverzní funkce w musí splňovat podmínku $\frac{1}{2}(w + \frac{1}{w}) = z$. Po úpravě dostaneme $w^2 - 2zw + 1 = 0$, takže $\underline{w = z + \sqrt{z^2 - 1}}$.

Symbol odmocniny je třeba chápat jako dvojznačnou funkci.

f

9e

6.23. V množině $\mathcal{C}$ řešte na základě algebraického tvaru rovnici a) $\sin w = 0$, b) $\cos w = 0$.

Řešení : a) Do rovnice dosadíme algebraický tvar funkce $\sin w = \sin(u + iv) = \sin u \cosh v + i \cos u \sinh v = 0$ (podle př. 4.45) a dostaneme soustavu rovnic pro dvě reálné neznámé $u, v \in \mathcal{R}$

Re $\sin w = \sin u \cosh v = 0$, Im $\cos u \sinh v = 0$.

V první rovnici musí být $\sin u = 0$, protože pro všechna $v \in \mathcal{R}$ platí $\cosh v \geq 1$. Odtud vyjde $u = k\pi$, $k \in \mathcal{Z}$.

Ve druhé rovnici $\cos k\pi = (-1)^k \neq 0$ a musí tedy být splněna rovnice $\sinh v = 0$. Odtud dostaneme jednoznačně $v = 0$.

Řešení dané rovnice v množině $\mathcal{C}$ jsou (stejně jako v množině $\mathcal{R}$) hodnoty $\underline{w_k = k\pi \ , \ k \in \mathcal{Z}}$.

b) Z rovnosti $\cos w = \cos(u + iv) = 0$ dostaneme podle př. 4.45 soustavu rovnic pro dvě reálné neznámé $u, v \in \mathcal{R}$

Re $\cos w = \cos u \cosh v = 0$, Im $\cos w = -\sin u \sinh v = 0$.

Z první rovnice vyjde jednoznačně $u = (2k-1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathcal{Z}$ ($\cosh v \geq 1$).

Z druhé rovnice opět jednoznačně $v = 0$. takže řešení dané rovnice v množině $\mathcal{C}$ jsou (stejně jako v množině $\mathcal{R}$) $\underline{w = (2k-1)\frac{\pi}{2} \ , \ k \in \mathcal{Z}}$.

9g

9h

6.24. V množině $\mathcal{C}$ řešte na základě algebraického tvaru rovnici

a) $\cos w = \frac{3}{4}\,\mathrm{i}$, b) $\cos w = 2$.

Všimněte si, že v množině $\mathcal{C}$ existuje (nekonečně mnoho) řešení těchto rovnic, která však samozřejmě nemohou být reálná.

Řešení : a) Po algebraickém vyjádření funkce $\cos w$ (př. 4.45) dostaneme z rovnosti komplexních čísel soustavu rovnic

Re $\cos w = \cos u \cosh v = 0$, Im $\cos w = \sin u \sinh v = -\frac{3}{4}$.

Z první rovnice vyjde jednoznačně $\cos u = 0$, protože v množině $\mathcal{R}$ platí vždy $\cosh v \geq 1$. Množinu všech řešení u je možné vyjádřit jako sjednocení $u = (4k+1)\frac{\pi}{2} \vee u = (4k-1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathcal{Z}$.

Z druhé rovnice po dosazení vyjde $\sinh v = \frac{3}{4}$ nebo $\sinh v = -\frac{3}{4}$.

První možnost vede k rovnici $\sinh v = \frac{e^v - e^{-v}}{2} = \frac{3}{4}$ neboli po úpravě $2(e^v)^2 - 3e^v - 2 = 0$.

Tato rovnice má v množině $\mathcal{R}$ dvě řešení $e^v = 2$ a $e^v = -\frac{1}{2}$, ale druhé řešení nevede k reálnému řešení pro hodnotu v . Proto vyjde jednoznačně pouze $v = \ln 2$.

Druhá možnost vede k rovnici $\sinh v = \frac{e^v - e^{-v}}{2} = -\frac{3}{4}$ neboli ke kvadratické rovnici $2(e^v)^2 + 3e^v - 2 = 0$. K reálnému řešení vede pouze $e^v = \frac{1}{2}$, takže $v = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$.

Řešení rovnice $\cos w = \frac{3}{4}\,\mathrm{i}$ jsou hodnoty

$w = (4k+1)\pi + \mathrm{i}\ln 2,\ w = (4k-1)\pi - \mathrm{i}\ln 2.$

b) Dostaneme soustavu rovnic $\cos u \cosh v = 2$, $\sin u \sinh v = 0$ Z druhé rovnice vyjde $\sin u = 0 \vee \sinh v = 0$. Možnost $\sinh v = 0$ vede k jedinému řešení $v = 0$. Protože $\cosh 0 = 1$, vyjde po dosazení do první rovnice $\cos u = 2$ a tato rovnice nemá řešení v množině $\mathcal{R}$. Možnost $\sin u = 0$ vede k řešení $u = 2k\pi$, $k \in \mathcal{Z}$ a po dosazení $(-1)^k \cosh v = 2$. Řešení v množině $\mathcal{R}$ existuje pouze pro sudé hodnoty k : $v = \pm\ln(2+\sqrt{3})$.

Řešení původní rovnice jsou $w = 2k\pi \pm \mathrm{i}\ \ln(2+\sqrt{3})$, $k \in \mathcal{Z}$.

6.25. V množině $\mathcal{C}$ řešte rovnici $3\cosh w + 5 = 0$. V množině $\mathcal{R}$ tato rovnice zřejmě nemá řešení, protože hyperbolický kosinus nemůže být záporný.

Řešení : Je třeba získat algebraický tvar funkce $\cosh w$ (např. na základě rovnosti $\cosh w = \cos \mathrm{i}w$ a podle př. 4.45). Dostaneme Re $\cosh w = \cosh u \cos v = -\frac{5}{3}$, Im $\cosh w = \sinh u \sin v = 0$.

Z první rovnice dostaneme podmínku $\cos v > 0$, protože $\cosh u \geq 1$.

Z druhé rovnice vyjde $u = 0 \vee v = k\pi$. $k \in \mathcal{Z}$, ale $u = 0$ vede v první rovnici k podmínce $\cos v = -\frac{5}{3}$, která nemá v množině $\mathcal{R}$ řešení. Vzhledem k podmínce $\cos v > 0$ zůstává pouze možnost $v = (2k-1)\pi$. Potom pro u musí být splněna podmínka $\cosh u = \frac{5}{3}$, neboli $(e^u)^2 - 10u + 3 = 0 \Rightarrow u = \pm\ln 3$.

Řešení původní rovnice jsou $w = \pm\ln 3 + (2k-1)\pi i$, $k \in \mathcal{Z}$.

8f

6.26. Vyjádřete inverzní funkci k funkci $f(z) = \cos z$.

Řešení : Inverzní funkce je definována rovnicí $\cos w = z$. Z exponenciálního vyjádření $z = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}w} + e^{-\mathrm{i}w}) = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}w} + \frac{1}{e^{\mathrm{i}w}})$ můžeme vyjádřit $e^{\mathrm{i}w} = z + \sqrt{z^2-1}$ (př. 6. 21) a odtud $\mathrm{i}w = \mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2-1})$,

takže $w = -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2-1})$.

Symbol odmocniny je třeba chápat jako dvojznačnou funkci.

V příkladech 1.61 -1.66 zapište pomocí proměnných komplexních čísel z a $\overline{z}$ (bez absolutních hodnot) rovnice daných křivek nebo soustav křivek. Takový zápis rovnic bude velmi výhodný při řešení př. 4.25 a dalších.

1.61. Kružnice se středem v bodě z_0 a s poloměrem r , $r \in \mathcal{R}^+$. Která z těchto kružnic prochází počátkem ?

Řešení : Z rovnice $|z - z_0| = r$ po umocnění a nahrazení absolutní hodnoty vyjde $|z - z_0|^2 = (z - z_0)\,\overline{(z - z_0)} = r^2$.
Po úpravách podle př.1.55 vyjde
$(z - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) = z\overline{z} - z\overline{z_0} - \overline{z}z_0 + z_0\overline{z_0} = \boxed{z\overline{z} - z\overline{z_0} - \overline{z}z_0 + |z_0|^2 = r^2}$
Kružnice prochází počátkem právě tehdy, když poloměr kružnice se rovná vzdálenosti středu z_0 od počátku $(r = |z_0|)$;
Kružnice, která prochází počátkem, má tedy rovnici $\boxed{z\overline{z} - z\overline{z_0} - \overline{z}z_0 = 0}$.

1.62. Množina všech kružnic, které se dotýkají imaginární osy v počátku.

Výsledek : $\boxed{z\overline{z} - c(z + \overline{z}) = 0}$ $c \in \mathcal{R}$.

1.63. Přímka, která prochází počátkem a svírá s kladnou poloosou x úhel φ .

Řešení : Stačí zvolit v Gaussově rovině dva různé body z_1 a z_2 , které mají stejnou vzdálenost od počátku $(|z_1| = |z_2|)$ a jejichž spojnice je kolmá na danou přímku. Potom osa souměrnosti úsečky s krajními body z_1 , z_2 je hledaná přímka a má rovnici $|z - z_1| = |z - z_2|$. Po umocnění a úpravách vyjde

$$(z - z_1)\,\overline{(z - z_1)} = (z - z_2)\,\overline{(z - z_2)}\ ,$$

$$(z - z_1)(\overline{z} - \overline{z_1}) = (z - z_2)(\overline{z} - \overline{z_2})\ ,$$

$$z\overline{z} - z\overline{z_1} - \overline{z}z_1 + |z_1|^2 = z\overline{z} - z\overline{z_2} - \overline{z}z_2 + |z_2|^2\ ,$$

$$z(\overline{z_1} - \overline{z_2}) + \overline{z}(z_1 - z_2) = 0$$

$$z\,\overline{(z_1 - z_2)} + \overline{z}(z_1 - z_2) = 0\ .$$

Jestliže označíme $a = z_1 - z_2$, potom toto komplexní číslo má průvodič kolmý na danou přímku. Při tomto označení má rovnice jednoduchý tvar $\boxed{\overline{a}\,z + a\,\overline{z} = 0}$

1.64. Přímka, která prochází počátkem a svírá s kladnou poloosou x úhel $\frac{\pi}{3}$.

Výsledek : $(\sqrt{3} + i)\,z = (-\sqrt{3} + i)\,\overline{z}$.

1.65. Soustava přímek, které svírají s kladnou poloosou x úhel $\frac{\pi}{4}$.

Řešení : Komplexní číslo $1 - i$ má průvodič kolmý k daným přímkám. Jedna z těchto přímek (procházející počátkem), má rovnici
$(1 + i)\,z + (1 - i)\,\overline{z} = 0$.
Soustava rovnoběžných přímek se dá získat posunutím ve směru reálné osy o libovolné reálné číslo. Rovnice dané soustavy přímek se tedy dá zapsat ve tvaru
$(1 + i)\,z + (1 - i)\,\overline{z} = c$, $c \in \mathcal{R}$.

1.66. Soustava přímek rovnoběžných s reálnou osou.

Výsledek : Rovnice se dá zapsat ve tvaru $\boxed{z - \overline{z} = c}$ $c \in \mathcal{R}$.

1.67. Najděte střed a poloměr kružnice, která je dána rovnicí
$z\overline{z} + (i - 1)z - (i + 1)\overline{z} = 2$.

Řešení : Rovnici $z\overline{z} - (1 - i)z - (1 + i)\overline{z} = 2$ je třeba upravit na tvar uvedený v př. 1.61, tj. přidat hodnotu $|1 + i|^2 = 2$. Vyjde $z\overline{z} - (1 - i)z - (1 + i)\overline{z} + |1 + i|^2 = 4$.
Kružnice má tedy střed v bodě $1 + i$ a poloměr $r = 2$.

1.68. Najděte střed a poloměr kružnice dané rovnicí $z\overline{z} - i\,z + i\,\overline{z} = 3$.

Výsledek : Kružnice má střed v bodě $-i$ a poloměr $r = 2$.

1.69. Najděte množinu všech bodů z v Gaussově rovině, které splňují rovnici
$\frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}} = 1$.

Řešení : Pro $z \neq 0$ je také $\overline{z} \neq 0$, takže daná rovnice je ekvivalentní rovnici $\overline{z} + z = z\,\overline{z}$. Odtud $z\,\overline{z} - z - \overline{z} + 1 = 1$
neboli $(z - 1)(\overline{z} - 1) = |z - 1|^2 = 1$.
Množina hledaných bodů je tedy kružnice se středem v bodě 1 a s poloměrem $r = 1$, ze které je vynechaný počátek (bod $z = 0$).

1.70. Zapište následující komplexní čísla v exponenciálním tvaru ($r\,e^{i\varphi}$)
a) $1 - i\sqrt{3}$, b) $-2 + 2i$, c) $-i$, d) -1 , e) 1 .