2. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1. Nechť G je souvislá otevřená podmnožina $\mathbb{R}^2$ a $f = (f_1, f_2)$ je funkce $G \to \mathbb{R}^2$, mající spojité parciální derivace na G. Následující vlastnosti jsou ekvivalentní.

1. Integrál funkce f nezávisí v G na cestě
2. $\int_C f \mathrm{d}t = 0$ pro každou Jordanovu křivku C ležící v G.
3. $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$ v každém bodě G.
4. Existuje funkce $F : G \to \mathbb{R}$ taková, že $\operatorname{grad} F = f$ na G.

Pak $\int_C f \mathrm{d}t = F(Q) - F(P)$, kde Q je koncový a P je počáteční bod křivky C ležící v G. Vektorové pole s uvedenými vlastnostmi se nazývá *potenciální*.

Příklady

1. Určete, o jakou se jedná křivku a načrtněte ji.
   (a) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, $a, b > 0$.
   (b) $x = 2 + 3\cos t$, $y = 3 + 3\sin t$, $t \in [0, \pi]$.
   (c) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.
   (d) $x = 2\sin^2 t$, $y = \cos^2 t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}$.
   (e) $x = 1 - t^2$, $y = 3 + t$, $t \in \mathbb{R}$.
   (f) $x = t^2$, $y = t^3$, $t \in \mathbb{R}$.
   (g) $x = t^3$, $y = t^2$.
2. Dána křivka C: $y = x^2$, $x \in [-4, 4]$, s počátečním bodem $[-4, 16]$. Zjistěte, zda následující zobrazení jsou parametrizací jednoduché a hladké křivky C
   (a) (t, t^2), $t \in [-4, 4]$,
   (b) (t^2, t^4), $t \in [-2, 2]$
   (c) $(\sqrt{t}, t)$, $t \in [0, 16]$

3. Dána půlkružnice $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geq 0$, počáteční bod $[-a, 0]$. Zjistěte, zda následující zobrazení je její hladkou parametrizací:

   (a) $(a \cos t, a \sin t,\ t \in [0, \pi]$

   (b) $(t, \sqrt{a^2 - t^2})$, $t \in [-a, a]$

   (c) $\left(\frac{at}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

4. Parametrizujte množinu

   (a) $3x + 2y = 1$, $x \in [1, 3]$,

   (b) $x^2/4 + y^2/9 = 1$,

   (c) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $2x + y - 3z = 0$,

   (d) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z \geq 0$.

5. Najděte souřadnice hmotného bodu pohybujícího se po prodloužené cykloidě. Prodlouženou cykloidu opisujebod nacházející se v rovině kružnice, mající poloměr a, která se kutálí po přímce. Bod je s kružnicí pevně spojen.

6. Načrtněte grafy a doplňte parametry tak, aby se jednalo o shodnou křivku

   (a) i. $(3 + 2t, 5 + 4t)$, $t \in [-1, 0]$
       ii. $(1 + t, 1 + 2t)$, $t \in ?$
       iii. $(-t, -1 - 2t)$, $t \in ?$

   (b) i. $(\cos t, \sin t)$ $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$
       ii. $(\cos 2t, \sin 2t)$, $t \in ?$
       iii. $(\cos \frac{t}{2}, \sin \frac{t}{2})$, $t \in ?$
       iv. $(t, \sqrt{1 - t^2})$, $t \in ?$

   (c) i. (t, t), $t \in (0, \infty)$
       ii. $(1 - 2t, 1 - 2t)$, $t \in ?$
       iii. (e^x, e^x), $t \in ?$
       iv. $(\ln t, \ln t)$, $t \in ?$

7. Aplikace 1. druhu

   (a) Určete velikost části pláště válce $x^2 + y^2 = 1$, omezené shora rovinou $x + y + z = 2$.

   (b) Určete délku asteroidy s parametrizací $(a \cos^3 t, a \sin^3 t)$, $a > 0$, $t \in [0, 2\pi]$.

   (c) Vypočtěte obsah plotu, jehož půdorys tvoří elipsa

   $$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$$

   a jeho výška v bodě (x, y) je rovna $= \sqrt{x^2/4 + 4y^2}$.

(d) Mezi dvěma sloupy, vzdálenými od sebe 4 m, je napnuto lano. Vlivem vlastní hmotnosti se lano prohne do tvaru křivky, která se nazývá řetězovka. Zavedeme kartézskou soustavu souřadnice, osa x prochází patami sloupů, osa y je uprostřed mezi nimi. Lže ji popsat funkcí $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$, $a > 0$. Výška nejnižšího bodu křivky nad rovinou je 1,5 m. Jaká je délka prohnutého lana?

8. Vypočtěte práci, kterou vykoná silové pole $\frac{(-x,-y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ při přemístění hmotného bodu po parabole $y = 1 + x^2$ z bodu $(2,5)$ do bodu $(0,1)$.

9. Ověřte, že dané vektorové pole je potenciální na $\mathbb{R}^2$

   (a) $(3x^2y - 3y^2, x^3 - 6xy)$

   (b) $(2x\cos y, -x^2 \sin y)$

10. Dána funkce $g(x,y) = x^3y + x^2y^2$. Určete

    (a) silové pole f, jehož potenciálem je funkce g,

    (b) práci síly f při pohybu z bodu $[1,1]$ do bodu $[-2,3]$.

    (c) práci síly f podél křivky $x^2 + 4y^2 = 4$.

11. Vyšetřete existenci integrálu

$$\int_C \left(\ln(x^2+y^2), -2\mathrm{arctan}\,\frac{y}{x}\right) \mathrm{d}s$$

a rozhodně o možnosti užití Greenovy věty, jestliže c je

   (a) $x^2 + y^2 = 1$

   (b) $(x-1)^2 + y^2 = 1$

   (c) $(x-2)^2 + y^2 = 1$

   (d) je obvod čtverce s vrcholy $[1,0]$, $[0,1]$, $[-1,0]$, $[0,-1]$.

Integrál nemusíte počítat.

12. Je dáno vektorové pole $f = \frac{(x-y,x+y)}{x^2+y^2}$ na $G = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

    (a) Ověřte, že platí $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$.

    (b) Spočtěte křivkový integrál přes kružnici se středem v počátku a poloměrem 2. Ověřte tak, že pole není potenciální v G.